ANÁLISIS BÁSICO DE VARIABLE COMPLEJA

JERROLD E. MARSDEN
MICHAEL J. HOFFMAN

EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, España
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

Índice de contenido

Prólogo 5

Cap. 1. Funciones analíticas 11

1.1. Introducción a los números complejos, 11.
1.2. Propiedades de los números complejos, 22.
1.3. Algunas funciones elementales, 36.
1.4. Funciones continuas, 53.
1.5. Funciones analíticas, 73.
1.6. Diferenciación de las funciones elementales, 96.
Ejercicios de repaso del capítulo 1, 105

Cap. 2. Teorema de Cauchy 109

2.1. Integrales de contorno, 109.
Suplemento de la sección 2.1: sumas de Riemann, 124.
2.2. El teorema de Cauchy: versión intuitiva, 126.
2.3. El teorema de Cauchy: versión precisa, 139.
Suplemento A de la sección 2.3, 157.
Suplemento B de la sección 2.3, 161.
2.4. Fórmula integral de Cauchy, 165.
2.5. El teorema del módulo máximo y funciones armónicas, 185.
Ejercicios de repaso del capítulo 2, 199.

Cap. 3. Representación en series de funciones analíticas 203

3.1. Series convergentes de funciones analíticas, 204.
3.2. Series de potencias y el teorema de Taylor, 226.
3.3. Series de Laurent y clasificación de singularidades, 243.
Ejercicios de repaso del capítulo 3, 257.

Cap. 4. Cálculo de residuos **261**

4.1. Cálculo de residuos, 261.
4.2. El teorema del residuo, 274.
Suplemento a la sección 4.2: residuos y comportamiento en infinito, 280.
4.3. Evaluación de integrales definidas, 288.
4.4. Evaluación de series infinitas y expansiones en fracciones parciales, 321.
Ejercicios de repaso del capítulo 4, 330.

Cap. 5. Mapeos conformes **335**

5.1. Teoría básica de los mapeos conformes, 335.
5.2. Fraccionales lineales y transformaciones de Schwarz-Christoffel, 342.
5.3. Aplicación de los mapeos conformes a la ecuación de Laplace, la conducción del calor, electrostática e hidrodinámica, 362.
Ejercicios de repaso del capítulo 5, 378.

Cap. 6. Desarrollo adicional de la teoría **383**

6.1. Continuación analítica y superficies de Riemann elementales, 383.
6.2. El teorema de Rouché y el principio del argumento, 402.
6.3. Propiedades de las funciones analíticas como mapeo, 417.
Suplemento A del capítulo 6: familias normales y el teorema del mapeo de Riemann, 423.
Suplemento B del capítulo 6: la dinámica de los mapeos analíticos complejos, 429.
Ejercicios de repaso del capítulo 6, 432.

Cap. 7. Métodos asintóticos **436**

7.1. Productos infinitos y la función gamma, 436.
7.2. Expansiones asintóticas y el método del descenso más pronunciado, 456.
Suplemento a la sección 7.2: variación acotada y la demostración de la fórmula de la fase estacionaria, 475.
7.3. La fórmula de Stirling y las funciones de Bessel, 483.
Ejercicios de repaso del capítulo 7, 491.

Cap. 8. La transformada de Laplace y aplicaciones **495**

8.1. Propiedades básicas de las transformadas de Laplace, 495.
8.2. La fórmula de inversión compleja, 509.
8.3. Aplicación de las transformadas de Laplace a las ecuaciones diferenciales ordinarias, 514.
Suplemento de la sección 8.3: la transformada de Fourier y la ecuación de onda, 516.
Ejercicios de repaso del capítulo 8, 530.

Respuestas a los ejercicios impares **533**
Índice analítico **567**

1

Funciones analíticas

En este capítulo se introducen las ideas básicas acerca de los números complejos y de las funciones analíticas. La organización del texto es análoga a la de un libro de cálculo elemental que empieza con la recta real $\mathbf{R}$ y una función $f(x)$ de una variable real x y entonces estudia la diferenciación de f. De manera similar, en el análisis complejo empezamos con los números complejos z y el estudio de funciones diferenciables $f(z)$ (éstas son llamadas funciones analíticas). La analogía es, sin embargo, engañosa, porque el análisis complejo es una teoría mucho más rica; puede decirse mucho más acerca de una función analítica que acerca de una función diferenciable de variable real. Las propiedades de las funciones analíticas se desarrollarán por completo en capítulos subsecuentes.

Además de familiarizarse con la teoría, el estudiante debe alcanzar alguna facilidad con *las funciones estándar* (o *elementales*) —tales como polinomios, e^z, $\log z$, $\operatorname{sen} z$— que son usadas en el cálculo. Estas funciones se estudian en la sección 1.3 y aparecen frecuentemente a lo largo del texto.

1.1. INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Bosquejo histórico

La siguiente discusión presupone cierta familiaridad con las principales propiedades de los números reales. *El sistema de los números reales* fue el resultado de la búsqueda de un sistema (un conjunto abstracto con ciertas reglas) que incluyera a los racionales, pero que también proporcionara soluciones a ecuaciones polinomiales tales como $x^2 - 2 = 0$.

Históricamente, una consideración similar dio origen a la extensión de los números reales. A principios del siglo XVI, Geronimo Cardano consideró ecuaciones cuadráticas (y cúbicas) tales como $x^2 + 2x + 2 = 0$, que no son satisfe-

chas por ningún número real x. La fórmula cuadrática $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ da expresiones "formales" para las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Pero esta fórmula puede requerir raíces cuadradas de números negativos, por ejemplo, $-1 \pm \sqrt{-1}$ para la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$. Cardano notó que si estos "números complejos" son tratados como números ordinarios con la regla $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, estos, resolvían en efecto las ecuaciones. A la importante expresión $\sqrt{-1}$ se le da ahora la ampliamente aceptada designación de $i = \sqrt{-1}$. Una convención alternativa es seguida por muchos ingenieros eléctricos, quienes prefieren el símbolo $j = \sqrt{-1}$, puesto que ellos desean reservar el símbolo i para la corriente eléctrica. Sin embargo, en el pasado se sentía que ningún significado podría realmente ser asignado a tales expresiones, que fueron entonces llamadas "imaginarias". Gradualmente, en especial como resultado del trabajo de Leonhard Euler en el siglo XVIII, estas cantidades imaginarias llegaron a desempeñar un papel importante. Por ejemplo, la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ reveló la existencia de una profunda relación entre los números complejos y las funciones trigonométricas. Se encontró que la regla $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$ resumía las reglas para la expansión del seno y del coseno de la suma de dos ángulos de una manera sencilla, y este solo resultado indicó que algún significado debería ser atribuido a estos números "imaginarios".

Sin embargo, no fue hasta los trabajos de Casper Wessel (*circa* 1797), Jean Robert Argand (1806), Karl Friedrich Gauss (1831), Sir William R. Hamilton (1837) y otros, que se clarificó el significado de los números complejos y se comprendió que no hay nada de "imaginario" en ellos (aun cuando este término se emplea todavía.

El análisis complejo, que es el tema de este libro, fue desarrollado en el siglo XIX, principalmente por Augustin Cauchy (1789-1857). Posteriormente, su teoría se hizo más rigurosa y fue extendida por matemáticos como Peter Dirichlet (1805-1859), Karl Weierstrass (1815-1897) y Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

La búsqueda de un método para describir la conducción del calor influenció el desarrollo de la teoría, la cual encontró muchos usos fuera de las matemáticas. En los capítulos subsecuentes se discutirán algunas de estas aplicaciones a problemas en física e ingeniería, tales como hidrodinámica y electrostática. La teoría tiene también aplicaciones matemáticas en problemas que a primera vista no parecen involucrar números complejos. Por ejemplo, la demostración de que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

o que

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha - 1}}{1 + x}\, dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)} \qquad \text{para } 0 < \alpha < 1$$

o que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

puede ser difícil o imposible si se usa el cálculo elemental, pero estas identidades pueden ser probadas rápidamente al usar las técnicas de variable compleja.

El análisis complejo se ha vuelto una herramienta usual e indispensable en el trabajo de matemáticos, físicos e ingenieros. El descuido de éste puede ser un serio impedimento en la mayoría de las áreas de investigación y aplicación que involucran ideas y técnicas matemáticas.

Definición de los números complejos

La primera tarea en esta sección será definir los números complejos y mostrar que poseen propiedades que son adecuadas para que las manipulaciones algebraicas usuales se cumplan. La idea básica de los números complejos se atribuye a Jean Robert Argand, quien sugirió usar puntos en el plano para representar a los números complejos. El estudiante recordará que el plano xy, denotado por $\mathbf{R}^2$, consiste de todas las parejas ordenadas (x, y) de números reales. Vamos a empezar con la definición formal, seguida de una discusión de por qué la multiplicación de números complejos es definida de la manera en que se hace. .

Definición 1.1.1. *El **sistema de los números complejos,** denotado por* $\mathbf{C}$*, es el conjunto* $\mathbf{R}^2$ *junto con las reglas usuales de la adición de vectores y la multiplicación escalar por un número real, a saber*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$a(x, y) = (ax, ay)$$

y con la operación de multiplicación compleja, definida como

$$(x_1, y_1)\,(x_2, y_2) = (x_1\,x_2 - y_1\,y_2, x_1\,y_2 + y_1\,x_2)$$

En vez de usar (x, y) para representar a los números complejos, encontraremos más conveniente regresar a una notación más estándar, como sigue. Vamos a identificar a los números *reales* x con puntos en el eje x; entonces x y $(x, 0)$ representan al mismo punto $(x, 0)$ en $\mathbf{R}^2$. El eje y será llamado el *eje imaginario* y el punto $(0, 1)$ será denotado por i. Así, por definición, $i = (0, 1)$. Entonces,

$$(x, y) = x + yi$$

pues el lado derecho de la ecuación representa a $(x, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$. Usando $y = (y, 0)$ y la definición 1.1.1 de multiplicación de complejos, obtenemos $iy = (0, 1)\,(y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y) = y(0, 1) = yi$ y así también podemos escribir $(x, y) = x + iy$. Un solo símbolo tal como $z = a + ib$ se usa generalmente para indicar un número complejo. La notación $z \in \mathbf{C}$ significa que z pertenece al conjunto de los números complejos.

Nótese que $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1)) = (-1, 0) = -1$, de esta manera tenemos la propiedad que queremos:

$$i^2 = -1$$

Si recordamos esta ecuación, entonces la regla para la multiplicación de números complejos es también fácil de recordar y de motivar:

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

Entonces, por ejemplo, $2 + 3i$ es el número complejo $(2, 3)$ y otra manera de decir que $(2, 3)\ (1, -4) = (2 \cdot 1 - 3\ (-4), 3 \cdot 1 + 2\ (-4)) = (14, -5)$ es $(2 + 3i)\ (1 - 4i) = 2 - 12i^2 + 3i - 8i = 14 - 5i$. La razón de usar la expresión $a + bi$ es doble. Primero, es convencional. Segundo, la regla $i^2 = -1$ es más fácil de usar que la regla $(a, b)\ (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$, aun cuando ambas reglas producen el mismo resultado.

Puesto que la multiplicación de números reales es asociativa, conmutativa y distributiva, la multiplicación de números complejos también lo es; es decir, para todos los números complejos z, w, s, tenemos $(zw)s = z(ws)$, $zw = wz$, y $z(w + s) = zw + zs$.Vamos a verificar la primera de estas propiedades, las otras pueden ser verificadas similarmente.

Sea $z = a + ib$, $w = c + id$ y $s = e + if$. Entonces $zw = (ac - bd) + i(bc + ad)$ y entonces $(zw)s = e(ac - bd) - f(bc + ad) + i[e(bc + ad) + f(ac - bd)]$.

Similarmente.

$$\begin{aligned}z(ws) &= (a + bi)[(ce - df) + i(cf + de)] \\ &= a(ce - df) - b(cf + de) + i[a(cf + de) + b(ce - df)]\end{aligned}$$

Si comparamos estas expresiones y aceptamos las propiedades usuales de los números reales, concluimos que $(zw)s = z(ws)$. Así, podemos escribir, sin ambigüedad, una expresión como $z^n = z \cdot \cdot \cdot z$ (n veces).

Nótese que $a + ib = c + id$ significa que $a = c$ y $b = d$ (puesto que éste es el significado de la igualdad en $\mathbf{R}^2$) y que 0 representa a $0 + i0 = (0, 0)$. Entonces $a + ib = 0$ significa que *ambos*, $a = 0$ y $b = 0$.

¿En qué sentido los números complejos son una extensión de los números reales? Ya hemos dicho que si a es real, podemos también escribir a en lugar de $a + 0i = (a, 0)$. En otras palabras, los reales $\mathbf{R}$ son identificados con el eje x en $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$; vemos entonces que los números reales son aquellos números complejos $a + bi$ para los cuales $b = 0$. Si en la expresión $a + bi$, el término $a = 0$, llamamos a $bi = 0 + bi$ un *número imaginario puro*. En la expresión $a + bi$, decimos que a es la *parte real* y b es la *parte imaginaria*. Algunas veces esto es escrito como $\text{Re}\ z = a$, $\text{Im}\ z = b$, donde $z = a + bi$. Nótese que Re z e Im z son siempre números reales (véase figura 1.1.1).

En efecto, $\mathbf{C}$ obedece todas las reglas algebraicas que los números reales ordinarios obedecen. Por ejemplo, en la siguiente discusión se demostrará que el inverso multiplicativo existe para cualquier elemento distinto de cero. Esto significa que si $z \neq 0$, entonces existe un número (complejo) z' tal que $zz' = 1$ y escribimos $z' = z^{-1}$. Podemos escribir esta expresión sin ninguna ambigüedad (en otras palabras, z' está determinado en forma única), puesto que si también $zz'' = 1$, entonces $z' = z' \cdot 1 = z'\ (zz'') = (z'z)\ z'' = 1 \cdot z'' = z''$ y así $z'' = z'$. Para demostrar que z' existe, supóngase que $z = a + bi \neq 0$. Entonces al menos alguna de las condiciones se satisface, $a \neq 0$ o $b \neq 0$ y así $a^2 + b^2 \neq 0$. Para encontrar z', hagamos $z' = a' + b'i$. La

condición $zz' = 1$ impone condiciones que nos permitirán calcular a' y b'. Calculando el producto da $zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

Las ecuaciones lineales $aa' - bb' = 1$ y $ab' + a'b = 1$ pueden ser resueltas para a' y b' haciendo $a' = a/(a^2 + b^2)$ y $b' = -b/(a^2 + b^2)$, ya que $a^2 + b^2 \neq 0$. Entonces para $z = a + ib \neq 0$, podemos establecer.

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}$$

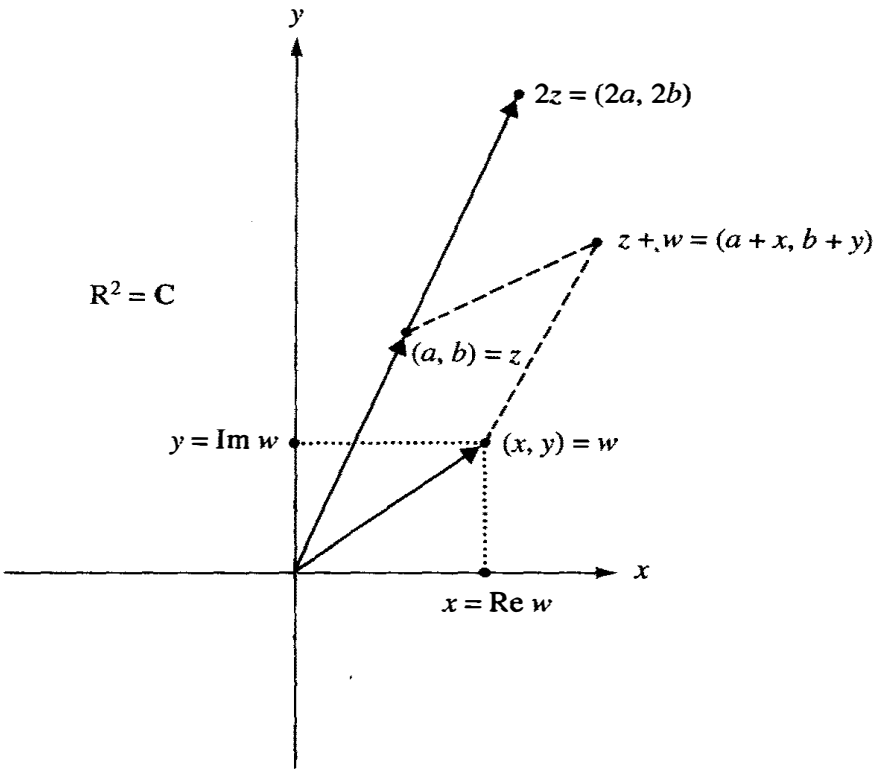


Figura 1.1.1. La geometría de los números complejos.

Si z y w son números complejos, con $w \neq 0$, entonces el símbolo z/w significa zw^{-1}; llamamos a z/w el *cociente* de z por w. Por ende, $z^{-1} = 1/z$.

Para calcular z^{-1}, es común usar la siguiente serie de ecuaciones y es también una útil manera de recordar la anterior fórmula para z^{-1}:

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i$$

En resumen, todas las reglas usuales para la manipulación de números reales, fracciones, polinomios, etcétera, se satisfacen en el análisis complejo.

El sistema de los números complejos es, formalmente, un ejemplo de un *campo*. Las reglas cruciales para un campo, enunciadas aquí como referencia, son:

Reglas de la adición:

(i) $z + w = w + z$
(ii) $z + (w + s) = (z + w) + s$
(iii) $z + 0 = z$
(iv) $z + (-z) = 0$

Reglas de la multiplicación:

(i) $zw = wz$
(ii) $(zw)s = z(ws)$
(iii) $1z = z$
(iv) $z(z^{-1}) = 1$ para $z \neq 0$

Ley distributiva: $z(w + s) = zw + zs$

En resumen, tenemos:

Teorema 1.1.2. *Los números complejos* **C** *forman un campo.*

Se previene al estudiante que generalmente no definimos el símbolo $\leq$, como en $z \leq w$, para complejos z y w. Si uno requiere que las propiedades usuales de orden para los reales se satisfagan, entonces *tal orden es imposible* para los números complejos. Esta afirmación puede ser probada como sigue. Supóngase que tal orden existe. Entonces o $i \geq 0$, o $i \leq 0$. Supongamos que $i \geq 0$. Entonces $i \cdot i \geq 0$ y, por tanto, $-1 \geq 0$, lo cual es absurdo. Alternativamente, supóngase que $i \leq 0$. Entonces $-i \geq 0$, así $(-i)(-i) \geq 0$ o $-1 \geq 0$, otra vez absurdo. Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, podemos decir que $z \leq w$ si $a \leq c$ y $b \leq d$. De cierta manera esto es un orden, pero no satisface todas las reglas que podrían ser requeridas, tales como aquellas obedecidas por los números reales. Por lo tanto, en el texto, la notación $z \leq w$ será evitada a menos que z y w resulten ser reales.

Raíces de ecuaciones cuadráticas

Como previamente se mencionó, una de las razones para usar los números complejos es la de permitirnos sacar raíces cuadradas de números reales negativos. Que, en efecto, esto puede ser hecho para todos los números complejos, se verifica en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.3. *Sea* $z \in \mathbf{C}$. *Entonces existe un* $w \in \mathbf{C}$ *tal que* $w^2 = z$. (*Nótese que* $-w$ *también satisface esta ecuación.*)

Vamos a dar una demostración puramente algebraica. (Otra demostración, basada en coordenadas polares, se da en la sección 1.2.)

Demostración. Sea $z = a + bi$. Queremos encontrar $w = x + iy$ tal que $a + bi = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$, así que debemos resolver simultáneamente $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$. La existencia de tales soluciones es geométricamente clara a partir del examen de las gráficas de las dos ecuaciones. Éstas se muestran en la figura 1.1.2 para el caso en que ambas, a y b, son positivos. A partir de la gráfica es claro que debe haber dos soluciones que son negativas una con respecto de la otra, éstas serán obtenidas algebraicamente en el siguiente párrafo.

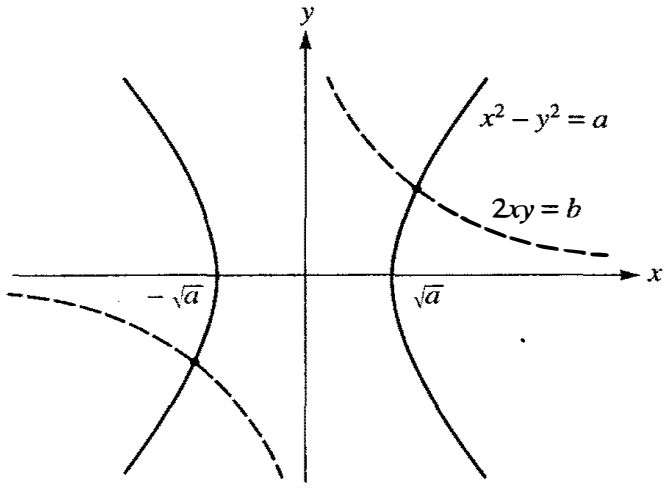


Figura 1.1.2. Gráficas de las curvas $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$.

Sabemos que $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2$. Por tanto, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, y por ende $x^2 = (a + \sqrt{a^2 + b^2})/2$ y $y^2 = (-a + \sqrt{a^2 + b^2})/2$. Si hacemos

$$\alpha = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

donde $\sqrt{\ }$ denota la raíz cuadrada positiva de números reales positivos, entonces, en el caso que b es positivo, tenemos que $x = \alpha$ y $y = \beta$, o $x = -\alpha$ y $y = -\beta$; en el caso en que b es negativo, tenemos que $x = \alpha$ y $y = -\beta$, o $x = -\alpha$ y $y = \beta$, Concluimos que la ecuación $w^2 = z$ tiene soluciones $\pm(\alpha + \mu\beta i)$, donde $\mu = 1$ si $b \geq 0$, y $\mu = -1$ si $b < 0$. ■

De las expresiones para α y β podemos concluir tres cosas: 1) Las raíces cuadradas de un número complejo son reales si y sólo si el número complejo es real y positivo; 2) las raíces cuadradas de un número complejo son puramente imaginarias si y sólo si el número complejo es real y negativo, y 3) las dos raíces cuadradas de un número coinciden si y sólo si el número complejo es cero. (El estudiante deberá comprobar estas conclusiones.)

Podemos fácilmente verificar que la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$, para números complejos a, b, c, tiene soluciones $z = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$, donde ahora el símbolo $\sqrt{u}$ denota la raíz cuadrada de un número complejo, u, como se construyó en la proposición 1.1.3.

Unicidad de los números complejos

La siguiente discusión no será completamente rigurosa, más bien será, en momentos, algo informal. Una explicación absolutamente precisa sería equivalente a un curso corto de álgebra abstracta. A pesar de esto, el estudiante debe ser capaz de reconocer los puntos importantes de la presentación.

Hemos construido el campo **C**, que contiene a los reales y en el que cada ecuación cuadrática tiene una solución. Es natural preguntarse si hay otros campos, que contengan a los reales, en los que cada ecuación cuadrática tenga una solución.

La respuesta es que cualquier otro campo, llamémosle F, debe contener a los números complejos; por lo tanto, el conjunto de los números complejos es el *más pequeño* campo que contiene a **R**, en el cual todas las ecuaciones cuadráticas son resolubles. En este sentido es único. La razón es muy simple. Sea j en F cualquier solución de la ecuación $z^2 + 1 = 0$. Considérese. en F, a todos los números de la forma $a + jb$, para números reales a y b. Este conjunto es, algebraicamente, el mismo que **C**, por el simple hecho de que j juega el papel de i y puede ser identificado con i, puesto que $j^2 = -1$. Debemos también comprobar que $a + jb = c + jd$ implica que $a = c$ y $b = d$, para estar seguros que la igualdad en este conjunto coincide con la de **C**. En efecto, $(a - c) + j(b - d) = 0$, por lo tanto, debemos probar que $e + jf = 0$ implica que $e = 0$ y $f = 0$ (donde $e = a - c$ y $f = b - d$). Si $f = 0$, entonces, claramente también $e = 0$. Pero si $f \neq 0$, entonces $j = -e/f$, que es real y ningún número real satisface que $j^2 = -1$, puesto que el cuadrado de cualquier número real es no negativo y, por tanto, f debe ser 0. Esto prueba nuestra afirmación. Podemos reformular nuestro resultado diciendo que **C** *es la extensión de campo más pequeña de* **R** *en el cual las ecuaciones cuadráticas son resolubles.*

Otra pregunta surge en este punto. Convertimos a $\mathbf{R}^2$ en un campo. ¿Para qué otra n, puede ser $\mathbf{R}^n$ convertido en un campo? Vamos a pedir en principio que las operaciones algebraicas coincidan con aquellas de **R**, suponiendo que **R** es el eje x. La respuesta es; sólo en el caso en que $n = 2$. Una estructura parecida a la de un campo, llamada los *cuaterniones*, puede ser obtenida para $n = 4$, excepto que la regla $zw = wz$ falla.

Tal estructura es llamada un *campo no conmutativo*. La prueba de estos resultados puede encontrarse en un texto de álgebra abstracta avanzada.

Ejemplos resueltos

1.1.4. *Pruebe que* $1/i = -i$ *y que* $1/(i + 1) = (1 - i)/2$.

Solución. Primero.

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = -i$$

ya que $i \cdot -i = -(i)^2 = -(-1) = 1$. Asimismo

$$\frac{1}{i+1} = \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2}$$

puesto que $(1 + i)(1 - i) = 1 + 1 = 2$.

La proposición 1.2.4 resume las principales propiedades de la conjugación compleja.

Proposición 1.2.4

(i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.

(ii) $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$.

(iii) $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$ *para* $z' \neq 0$.

(iv) $z\bar{z} = |z|^2$ *y en consecuencia si* $z \neq 0$, *tenemos que* $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.

(v) $z = \bar{z}$ *si y sólo si* z *es real.*

(vi) $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$ *e* $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/2i$.

(vii) $\bar{\bar{z}} = z$.

Demostración

(i) Sea $z = a + ib$ y sea $z' = a' + ib'$. Entonces, $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ y, por lo tanto, $\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = \bar{z} + \bar{z}'$.

(ii) Sea $z = a + ib$ y sea $z' = a' + ib'$. Entonces

$$\overline{zz'} = \overline{(aa' - bb') + i(ab' + a'b)} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$$

Por otra parte, $\bar{z}\bar{z}' = \overline{(a - ib)(a' - ib')} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$.

(iii) De (ii) tenemos que $\bar{z}'\,\overline{z/z'} = \overline{z'\,z/z'} = \bar{z}$. Así, $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$.

(iv) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

(v) Si $a + ib = a - ib$, entonces $ib = -ib$ y, por tanto, $b = 0$.

(vi) Esta afirmación es clara de la definición de $\bar{z}$.

(vii) Esta afirmación también es clara de la definición de la conjugación compleja. ■

El valor absoluto de un número complejo, $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, el cual es meramente la longitud euclidiana usual del vector que representa al número complejo, ya ha sido definido. De la proposición 1.2.4 (iv), notamos que $|z|$ está también dado como $|z|^2 = z\bar{z}$. El valor absoluto de un número complejo aparece a lo largo de todo el análisis complejo; las siguientes propiedades del valor absoluto son básicas.

Proposición 1.2.5

(i) $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.

(ii) *Si* $z' \neq 0$, *entonces* $|z/z'| = |z| / |z'|$.

(iii) $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ *y* $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$; *esto es,* $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *y* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(iv) $|\bar{z}| = |z|$.

(v) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

(vi) $|z - z'| \geq ||z| - |z'||$.

(vii) $|z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}\ \sqrt{|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2}$.

El resultado (iv) es claro geométricamente de la figura 1.2.9, (v) es la *desigualdad del triángulo* usual para vectores en $\mathbf{R}^2$ (véase figura 1.2.10) y (vii) es referida como la *desigualdad de Cauchy*. Mediante la aplicación repetida de (v) obtenemos el postulado general $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$.

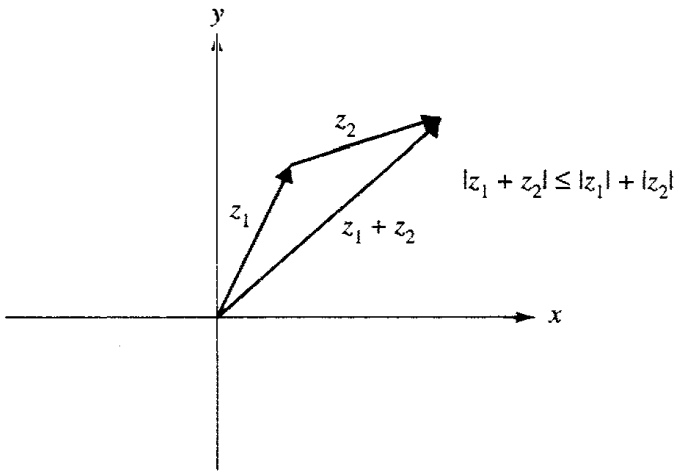


Figura 1.2.10. Desigualdad del triángulo.

Demostración

(i) Esta identidad fue probada en la proposición 1.2.1.

(ii) Por (i), $|z'|\,|z / z'| = |z' \cdot (z/z')| = |z|$, así que $|z/z'| = |z| / |z'|$.

(iii) Si $z = a + ib$, entonces $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ puesto que $b^2 \geq 0$. La otra desigualdad afirmada en (iii) se prueba en forma similar.

(iv) Si $z = a + ib$, entonces $\bar{z} = a - ib$, y claramente tenemos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\bar{z}|$.

(v) Por la proposición 1.2.4 (iv),

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\,\overline{(z + z')} \\ &= (z + z')\,(\bar{z} + \bar{z'}) \\ &= z\bar{z} + z'\bar{z'} + z'\bar{z} + z\bar{z'} \end{aligned}$$

Pero $z\bar{z'}$ es el conjugado de $z'\bar{z}$ (¿por qué?), por tanto, por la proposición 1.2.4 (vi) y (iii) de esta demostración, $|z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z'\bar{z} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z'\bar{z}| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'|$. Pero esto es igual a $(|z| + |z'|)^2$, con lo que obtenemos nuestro resultado.

(iv) Al aplicar (v) a z' y $z - z'$, obtenemos $|z| = |z' + (z - z')| \leq |z'| + |z - z'|$, por lo tanto, $|z - z'| \geq |z| - |z'|$. Al intercambiar los roles de z y z', obtenemos de modo semejante que $|z - z'| \geq |z'| - |z| = -(|z| - |z'|)$, que es lo que originalmente afirmamos.

(vii) Esta desigualdad es menos evidente y su prueba requiere de un pequeño truco matemático (véase el ejercicio 22 para una demostración diferente). Supongamos que no todos los $w_k = 0$ (en otro caso el resultado es claro). Sea

$$v = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \quad t = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \quad s = \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \text{ y } c = s/t$$

Ahora considérese

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - c\bar{w}_k|^2$$

la cual es ≥ 0 e igual a

$$v + |c|^2 t - c\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \bar{w}_k - \bar{c}\sum_{k=1}^{n} z_k w_k = v + |c|^2 t - 2 \operatorname{Re} \bar{c}s$$

$$= v + \frac{|s|^2}{t} - 2 \operatorname{Re} \frac{ss}{t}$$

Dado que t es real y $s\bar{s} = |s|^2$ es real, $v + (|s|^2/t) - 2(|s|^2/t) = v - |s|^2/t \geq 0$. Así, $|s|^2 \leq vt$, que es el resultado deseado. ■

Ejemplos resueltos

1.2.6. *Resuelva para* z, $z^8 = 1$.

Solución. Dado que $1 = \cos k2\pi + i \operatorname{sen} k2\pi$, donde k es cualquier entero, el corolario 1.2.3 nos da

$$z = \cos \frac{k2\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{k2\pi}{8} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 7$$

$$= 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Éstos pueden dibujarse como puntos igualmente espaciados sobre el círculo en el plano complejo (véase figura 1.2.11).

1.2.7. *Muestre que* $\overline{\left[\frac{(3 + 7i)^2}{(8 + 6i)}\right]} = \frac{(3 - 7i)^2}{(8 - 6i)}$.

Solución. El punto aquí no es necesariamente desarrollar primero $(3 + 7i)^2/(8 + 6i)$; si simplemente usamos las propiedades desarrolladas en el texto, a saber, $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$ y $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z'}$, obtenemos que

$$\overline{\left[\frac{(3 + 7i)^2}{(8 + 6i)}\right]} = \frac{\overline{(3 + 7i)^2}}{\overline{(8 + 6i)}} = \frac{\overline{(3 + 7i)}^2}{8 - 6i} = \frac{(3 - 7i)^2}{8 - 6i}$$

1.2.8. *Si* $|z| = 1$, *pruebe que*

$$\left|\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right| = 1$$

para cualesquiera números complejos a *y* b.

Solución. Puesto que $|z| = 1$, tenemos que $z = \bar{z}^{-1}$. Por lo tanto

$$\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} = \frac{az + b}{\bar{b} + \bar{a}\bar{z}} \cdot \frac{1}{z}$$

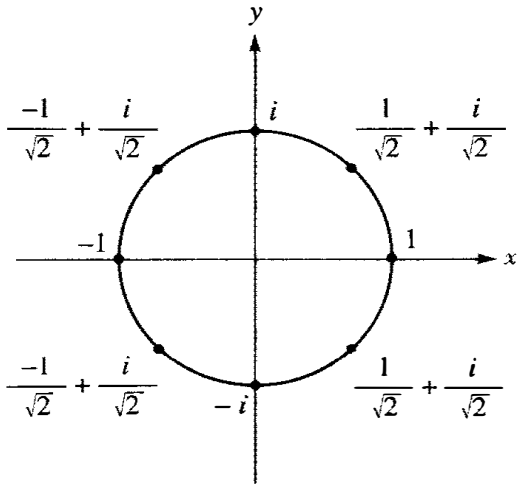


Figura 1.2.11. Las ocho raíces octavas de la unidad.

Por las propiedades del valor absoluto y puesto que $|z| = 1$,

$$\left|\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right| = \left|\frac{az + b}{\bar{a}\,\bar{z} + \bar{b}}\right| \cdot \frac{1}{|z|} = 1$$

ya que $|az + b| = \overline{|az + b|} = |\bar{a}\bar{z} + \bar{b}|$.

1.2.9. *Muestre que el máximo del valor absoluto de* $z^2 + 1$ *en el disco* $|z| \leq 1$ *es* 2.

Solución. Por la desigualdad del triángulo. $|z^2 + 1| \leq |z^2| + 1 \leq |z|^2 + 1 \leq 1^2 + 1 = 2$, ya que $|z| \leq 1$, así $|z^2 + 1|$ no excede a 2 en el disco. Puesto que el valor 2 se alcanza en $z = 1$, entonces el máximo es 2.

1.2.10. *Exprese cos* 3θ *en términos de cos* θ *y sen* θ *usando la fórmula de De Moivre.*

Solución. La fórmula de De Moivre para $r = 1$ y $n = 3$ nos da la identidad

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$$

Cuando se expande el lado izquierdo de esta ecuación (véase el ejercicio 14 de la sección 1.1), resulta

$$\cos^3\theta + i3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta - i\operatorname{sen}^3\theta$$

Al igualar las partes reales e imaginarias, obtenemos que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

y la fórmula adicional

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\operatorname{sen}^3\theta + 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta$$

1.2.11. *Escriba, en notación compleja, la ecuación de una línea recta, de un círculo y de una elipse.*

Solución

La línea recta se expresa más convenientemente en forma parametrizada: $z = a + bt$, $a, b \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{R}$, la cual representa una línea en la dirección de b y que pasa por el punto a.
El círculo puede expresarse como $|z - a| = r$ (radio r, centro a).
La elipse puede expresarse como $|z - d| + |z + d| = 2a$; los focos están localizados en $\pm d$ y el semieje mayor es igual a a.
Estas ecuaciones, en las que $|\cdot|$ es interpretado como la longitud, son las definiciones de estos lugares geométricos.

1.2.12. *Suponga que* $u = a + ib$ *y* $v = c + id$ *son números complejos fijos y que* μ *es un número real positivo. Demuestre que la ecuación.*

$$\left|\frac{z-u}{z-v}\right|^2 = \mu$$

describe un círculo o una línea recta en el plano complejo.

Solución. Si hacemos $z = x + iy$, la ecuación resulta

$$\mu = \left|\frac{(x-a)+i(y-b)}{(x-c)+i(y-d)}\right|^2 = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-c)^2+(y-d)^2}$$

Después de hacer el producto cruzado, desarrollar y luego agrupar los términos en x y y en el lado izquierdo, obtenemos

$$(1-\mu)x^2 + (1-\mu)y^2 - 2(a-\mu c)x - 2(b-\mu d)y = \mu(c^2+d^2) - (a^2+b^2)$$

Si $\mu = 1$, ésta es la ecuación de una línea. En efecto, es la línea perpendicular que bisecta el segmento entre u y v. Si $\mu \neq 1$, al completar cuadrados obtenemos

$$\left(x - \frac{a-\mu c}{1-\mu}\right)^2 + \left(y - \frac{b-\mu d}{1-\mu}\right)^2 = \frac{\mu(c^2+d^2)-(a^2+b^2)}{1-\mu} + \left(\frac{a-\mu c}{1-\mu}\right)^2 + \left(\frac{b-\mu d}{1-\mu}\right)^2$$

$$= \frac{\mu}{(1-\mu)^2}[(a-c)^2 + (b-d)^2]$$

que es la ecuación de un círculo con centro en $((a-\mu c)/(1-\mu), (b-\mu d)/(1-\mu)$ y de radio $(\sqrt{\mu}/|1-\mu|)\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^5 - 2 = 0$ *b)* $z^4 + i = 0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^6 + 8 = 0$ *b)* $z^3 - 4 = 0$

3. ¿Cuál es el conjugado complejo de $(3+8i)^4/(1+i)^{10}$?

4. ¿Cuál es el conjugado complejo de $(8-2i)^{10}/(4+6i)^5$?

5. Exprese cos $5x$ y sen $5x$ en términos de cos x y sen x.

6. Exprese cos $6x$ y sen $6x$ en términos de cos x y sen x.

7. Encuentre el valor absoluto de $[i(2+3i)(5-2i)]/(-2-i)$.

8. Encuentre el valor absoluto de $(2-3i)^2/(8+6i)^2$.

9. Sea w una raíz n-ésima de la unidad, $w \neq 1$. Demuestre que $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$.

10. Demuestre que las raíces de un polinomio con coeficientes reales ocurren en parejas conjugadas.

11. Si $a, b \in \mathbf{C}$, pruebe la *identidad del paralelogramo*: $|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$.

12. Interprete geométricamente la identidad del ejercicio 11.

13. ¿Cuándo se satisface la igualdad en la desigualdad del triángulo $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$? Interprete geométricamente su resultado.

14. Suponga que $|z| = 1$ o $|w| = 1$ y que $\bar{z}w \neq 1$, demuestre que

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = 1$$

15. ¿Es cierto que $z^2 = |z|^2$? Si lo es, demuestre esta identidad. Si no lo es, ¿para qué valores de z es cierto?

16. Haciendo $z = x + iy$, pruebe que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\,|z|$.

17. Sean $z = a + ib$ y $z' = a' + ib'$. Pruebe que $|zz'| = |z|\,|z'|$ evaluando cada uno de los lados.

18. Pruebe lo siguiente:

a) $\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$ *b*) $\arg(z/w) = \arg z - \arg w \pmod{2\pi}$

c) $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$

19. ¿Cuál es la ecuación del círculo con radio 3 y centro en $8 + 5i$ en notación compleja?

20. Usando la fórmula $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$, muestre cómo construir geométricamente z^{-1}.

21. Describa al conjunto de todas las z tales que $\text{Im}\,(z + 5) = 0$.

22. Pruebe la identidad de Lagrange:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \right) - \sum_{k<j} |z_k \bar{w}_j - z_j \bar{w}_k|^2$$

Deduzca la desigualdad de Cauchy a partir de su demostración.

23. Encuentre el máximo de $|z^n + a|$ para aquellas z con $|z| \leq 1$.

24. Calcule la mínima cota superior (esto es, el supremo) del siguiente conjunto de números reales: $\{\text{Re}\,(iz^3 + 1)$ tal que $|z| < 2\}$.

25. Pruebe la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

(Suponga que $\operatorname{sen}(\theta/2) \neq 0$.)

26. Suponga que los números complejos z_1, z_2, z_3 satisfacen la ecuación

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

Pruebe que $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. (*Sugerencia*: argumente geométricamente, interpretando el resultado de cada afirmación.)

27. Dé una condición necesaria y suficiente para

a) z_1, z_2, z_3 estén en una línea recta.

b) z_1, z_2, z_3, z_4, estén en una línea recta o en un círculo.

28. Pruebe la identidad

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \cdots \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Sugerencia: El producto dado puede ser escrito como $1/2^{n-1}$ veces el producto de las raíces diferentes de cero del polinomio $(1 - z)^{n-1}$.)

29. Sea w una raíz n-ésima de la unidad, $w \neq 1$. Evalúe $1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1}$.

30. La correspondencia del número complejo $z = a + ib$ con la matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \psi_z$ mencionada en el párrafo anterior al resultado 1.2.2, da otra manera de representar los números complejos. Demuestre que

a) $\psi_{z\omega} = \psi_z \psi_\omega$.

b) $\psi_{z+\omega} = \psi_z + \psi_\omega$.

c) $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\lambda \psi_z = \psi_{\lambda z}$ si λ es real.

e) $\psi_{\bar{z}} = (\psi_z)^t$ (la matriz transpuesta).

f) $\psi_{1/z} = (\psi_z)^{-1}$.

g) z es real si y sólo si $\psi_z = (\psi_z)^t$.

h) $|z| = 1$ si y sólo si ψ_z es una matriz ortogonal.

1.3. ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

Las funciones trigonométricas seno y coseno, así como la función exponencial y la función logaritmo, se estudian en cálculo elemental. Recuérdese que las funciones trigonométricas pueden definirse en términos de las razones de los lados de un triángulo rectángulo. La definición de "ángulo" puede extenderse hasta incluir cualquier número real y de este modo cos θ y sen θ se convierten en funciones con valores reales de variable real, θ. Es un hecho básico que el cos θ y sen θ son diferenciables, con derivadas dadas por $d(\cos \theta)/d\theta = -\text{sen } \theta$ y $d(\text{sen } \theta)/d\theta = \cos \theta$. Alternativamente, el cos θ y el sen θ pueden definirse por sus series de potencias:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

La convergencia de estas series, por supuesto, debe también demostrarse; tal demostración puede encontrarse en el capítulo 3 y en cualquier texto de cálculo.[1] Alternativamente, el sen x puede definirse como la única solución $f(x)$ de la ecuación diferencial $f''(x) + f(x) = 0$ que satisface $f(0) = 0, f'(0) = 1$; y el cos x puede definirse como la única solución de $f''(x) + f(x) = 0, f(0) = 1, f'(0) = 0$ (otra vez, véase un texto de cálculo para las demostraciones).

[1] Tal como, J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus*, 2a. ed., Nueva York, Springer-Verlag, 1985, cap. 12.

La función exponencial

La función exponencial, denotada por e^x, puede definirse como la única solución de la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$, sujeta a la condición inicial $f(0) = 1$. (Puede demostrarse que existe una única solución.) La función exponencial también puede definirse por su serie de potencias:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Aceptamos del cálculo el hecho que e^x es una función de x, positiva y estrictamente creciente. Por tanto, para $y > 0$, $\log y$ puede definirse como la función inversa de e^x; esto es, $e^{\log y} = y$. Otro enfoque que es usado frecuentemente en libros de cálculo es empezar por definir

$$\log y = \int_1^y \frac{1}{t} dt$$

para $y > 0$ y entonces definir e^x como la función inversa de $\log y$. (*Nota*: Muchos libros de cálculo escriben $\ln y$ para el logaritmo con base en e. Como en la mayoría de los textos avanzados de matemáticas, a lo largo de este libro escribiremos $\log y$ en vez de $\ln y$.)

En esta sección, se extenderán estas funciones al plano complejo. En otras palabras, se definirán las funciones sen z, cos z, e^z y $\log z$ para complejos z y sus restricciones a la línea real serán los usuales sen x, cos x, e^x y $\log x$. La extensión a los números complejos debe ser natural en el sentido que muchas de las propiedades familiares de sen, cos, exp y log se conserven. Estas funciones, así como la función potencia z^n, se estudiarán geométricamente más adelante en esta misma sección.

Primero extenderemos la función exponencial. Sabemos del cálculo que para un número real x, e^x puede representarse por su serie de Maclaurin:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Así. debe ser de lo más natural definir e^{iy} por

$$1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots$$

para $y \in \mathbf{R}$. Por supuesto, esta definición no es muy legítima, ya que la convergencia de series en $\mathbf{C}$ no ha sido aún discutida. En el capítulo 3 se mostrará que esta serie efectivamente representa un número complejo bien definido para cada y, pero por el momento, la serie es usada informalmente como la base de la definición que sigue, la cual será precisa. Un ligero reordenamiento de la serie (usando el ejercicio 16, sección 1.1.) muestra que

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$$

Pero reconocemos que esto es simplemente cos $y + i$ sen y. Por lo tanto, *definimos*.

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Hasta aquí, hemos definido e^z para z a lo largo de los ejes real e imaginario. ¿Cómo definimos $e^z = e^{x+iy}$? Deseamos que nuestra extensión de la exponencial conserve las propiedades familiares y entre estas está la ley de los exponentes: $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$. Este requisito nos obliga a definir $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Esto puede expresarse en una definición formal:

Definición 1.3.1. *Si* $z = x + iy$, *entonces definimos* e^z *como* e^x (cos y + i sen y).

Nótese que si z es real (esto es, si $y = 0$), esta definición coincide con la función exponencial usual e^x. El estudiante debe ser cauto en este punto, no estamos pensando a e^z como "e elevado a la ≪potencia≫ z" puesto que el concepto de exponentes complejos no ha sido definido aún. La notación e^z es meramente una abreviatura de la función definida como $e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

Existe también otra razón, puramente formal, para definir $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Si escribimos $e^{iy} = f(y) + ig(y)$, notamos que puesto que queremos que $e^0 = 1$, debemos tener $f(0) = 1$ y $g(0) = 0$. Al derivar con respecto de y nos da $ie^{iy} = f'(y) + ig'(y)$, por lo tanto, cuando $y = 0$, obtenemos $f'(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Al diferenciar nuevamente nos queda $-e^{iy} = f''(y) + ig''(y)$. Si comparamos estos resultados con $e^{iy} = f(y) + ig(y)$, obtenemos que $f''(y) + f(y) = 0, f(0) = 1, f'(0) = 0$, de modo que $f(y) = \cos y$; y $g''(y) + g(y) = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, de modo que $g(y) = \operatorname{sen} y$, por la definición de sen y y cos y en términos de ecuaciones diferenciales. Así, obtenemos que $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, como en la definición 1.3.1.

Algunas de las propiedades importantes de e^z están resumidas en la siguiente proposición. Para enunciarlas necesitamos recordar la definición de función periódica, a saber, una función $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ se llama periódica, si existe un $w \in \mathbf{C}$ (llamado *periodo*) tal que $f(z + w) = f(z)$ para toda $z \in \mathbf{C}$.

Proposición 1.3.2

(i) $e^{z+w} = e^z e^w$ *para toda* $z,w \in \mathbf{C}$.

(ii) e^z *nunca es* 0.

(iii) *Si* x *es real, entonces* $e^x > 1$ *cuando* $x > 0$, *y* $e^x < 1$ *cuando* $x < 0$.

(iv) $|e^{x+iy}| = e^x$.

(v) $e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{3\pi i/2} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.

(vi) e^z *es periódica, cualquier periodo de* e^z *tiene la forma* $2\pi ni$, n *entero*.

(vii) $e^z = 1$ *si y sólo si* $z = 2n\pi i$ *para algún entero* n (*positivo*, negativo, o 0).

Demostración

(i) Sea $z = x + iy$ y sea $w = s + it$. Por nuestra definición de e^z,

La proposición 1.2.4 resume las principales propiedades de la conjugación compleja.

Proposición 1.2.4

(i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.

(ii) $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$.

(iii) $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$ *para* $z' \neq 0$.

(iv) $z\bar{z} = |z|^2$ *y en consecuencia si* $z \neq 0$, *tenemos que* $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.

(v) $z = \bar{z}$ *si y sólo si* z *es real.*

(vi) $\operatorname{Re} z = (z + \bar{z})/2$ *e* $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/2i$.

(vii) $\bar{\bar{z}} = z$.

Demostración

(i) Sea $z = a + ib$ y sea $z' = a' + ib'$. Entonces, $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ y, por lo tanto, $\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = \bar{z} + \bar{z}'$.

(ii) Sea $z = a + ib$ y sea $z' = a' + ib'$. Entonces

$$\overline{zz'} = \overline{(aa' - bb') + i(ab' + a'b)} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$$

Por otra parte, $\bar{z}\bar{z}' = \overline{(a - ib)(a' - ib')} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$.

(iii) De (ii) tenemos que $\bar{z}'\,\overline{z/z'} = \overline{z'\,z/z'} = \bar{z}$. Así, $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$.

(iv) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

(v) Si $a + ib = a - ib$, entonces $ib = -ib$ y, por tanto, $b = 0$.

(vi) Esta afirmación es clara de la definición de $\bar{z}$.

(vii) Esta afirmación también es clara de la definición de la conjugación compleja. ■

El valor absoluto de un número complejo, $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, el cual es meramente la longitud euclidiana usual del vector que representa al número complejo, ya ha sido definido. De la proposición 1.2.4 (iv), notamos que $|z|$ está también dado como $|z|^2 = z\bar{z}$. El valor absoluto de un número complejo aparece a lo largo de todo el análisis complejo; las siguientes propiedades del valor absoluto son básicas.

Proposición 1.2.5

(i) $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.

(ii) *Si* $z' \neq 0$, *entonces* $|z/z'| = |z| / |z'|$.

(iii) $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ *y* $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$; *esto es,* $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *y* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(iv) $|\bar{z}| = |z|$.

(v) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

(vi) $|z - z'| \geq ||z| - |z'||$.

(vii) $|z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}\ \sqrt{|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2}$.

El resultado (iv) es claro geométricamente de la figura 1.2.9, (v) es la *desigualdad del triángulo* usual para vectores en $\mathbf{R}^2$ (véase figura 1.2.10) y (vii) es referida como la *desigualdad de Cauchy*. Mediante la aplicación repetida de (v) obtenemos el postulado general $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$.

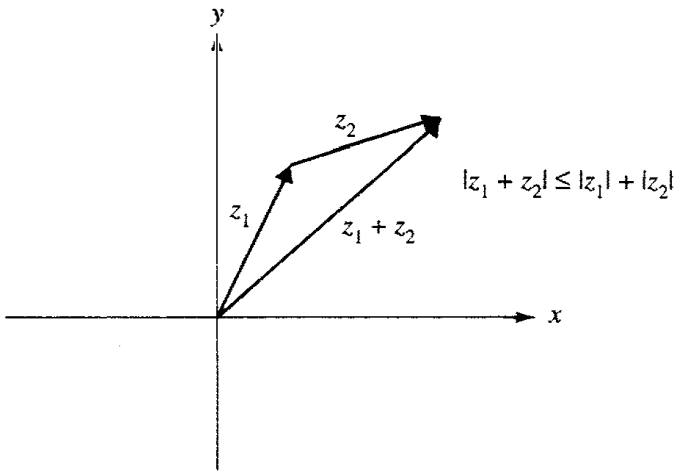


Figura 1.2.10. Desigualdad del triángulo.

Demostración

(i) Esta identidad fue probada en la proposición 1.2.1.

(ii) Por (i), $|z'|\,|z / z'| = |z' \cdot (z/z')| = |z|$, así que $|z/z'| = |z| / |z'|$.

(iii) Si $z = a + ib$, entonces $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ puesto que $b^2 \geq 0$. La otra desigualdad afirmada en (iii) se prueba en forma similar.

(iv) Si $z = a + ib$, entonces $\overline{z} = a - ib$, y claramente tenemos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$.

(v) Por la proposición 1.2.4 (iv),

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\,\overline{(z + z')} \\ &= (z + z')\,(\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z'\overline{z'} + z'\overline{z} + z\overline{z'} \end{aligned}$$

Pero $z\overline{z'}$ es el conjugado de $z'\overline{z}$ (¿por qué?), por tanto, por la proposición 1.2.4 (vi) y (iii) de esta demostración, $|z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z'\overline{z} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z'\overline{z}| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'|$. Pero esto es igual a $(|z| + |z'|)^2$, con lo que obtenemos nuestro resultado.

(iv) Al aplicar (v) a z' y $z - z'$, obtenemos $|z| = |z' + (z - z')| \leq |z'| + |z - z'|$, por lo tanto, $|z - z'| \geq |z| - |z'|$. Al intercambiar los roles de z y z', obtenemos de modo semejante que $|z - z'| \geq |z'| - |z| = -(|z| - |z'|)$, que es lo que originalmente afirmamos.

(vii) Esta desigualdad es menos evidente y su prueba requiere de un pequeño truco matemático (véase el ejercicio 22 para una demostración diferente). Supongamos que no todos los $w_k = 0$ (en otro caso el resultado es claro). Sea

$$v = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \quad t = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \quad s = \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \text{ y } c = s/t$$

Ahora considérese

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - c\bar{w}_k|^2$$

la cual es ≥ 0 e igual a

$$v + |c|^2 t - c\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \bar{w}_k - \bar{c}\sum_{k=1}^{n} z_k w_k = v + |c|^2 t - 2 \operatorname{Re} \bar{c}s$$

$$= v + \frac{|s|^2}{t} - 2 \operatorname{Re} \frac{ss}{t}$$

Dado que t es real y $s\bar{s} = |s|^2$ es real, $v + (|s|^2/t) - 2(|s|^2/t) = v - |s|^2/t \geq 0$. Así, $|s|^2 \leq vt$, que es el resultado deseado. ■

Ejemplos resueltos

1.2.6. *Resuelva para* z, $z^8 = 1$.

Solución. Dado que $1 = \cos k2\pi + i \operatorname{sen} k2\pi$, donde k es cualquier entero, el corolario 1.2.3 nos da

$$z = \cos \frac{k2\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{k2\pi}{8} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 7$$

$$= 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Éstos pueden dibujarse como puntos igualmente espaciados sobre el círculo en el plano complejo (véase figura 1.2.11).

1.2.7. *Muestre que* $\overline{\left[\frac{(3 + 7i)^2}{(8 + 6i)}\right]} = \frac{(3 - 7i)^2}{(8 - 6i)}$.

Solución. El punto aquí no es necesariamente desarrollar primero $(3 + 7i)^2/(8 + 6i)$; si simplemente usamos las propiedades desarrolladas en el texto, a saber, $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$ y $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z'}$, obtenemos que

$$\overline{\left[\frac{(3 + 7i)^2}{(8 + 6i)}\right]} = \frac{\overline{(3 + 7i)^2}}{\overline{(8 + 6i)}} = \frac{\overline{(3 + 7i)}^2}{8 - 6i} = \frac{(3 - 7i)^2}{8 - 6i}$$

1.2.8. *Si* $|z| = 1$, *pruebe que*

$$\left|\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right| = 1$$

para cualesquiera números complejos a *y* b.

Solución. Puesto que $|z| = 1$, tenemos que $z = \bar{z}^{-1}$. Por lo tanto

$$\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} = \frac{az + b}{\bar{b} + \bar{a}\bar{z}} \cdot \frac{1}{z}$$

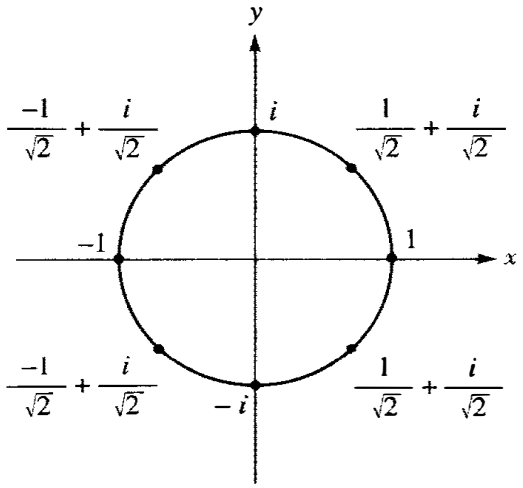


Figura 1.2.11. Las ocho raíces octavas de la unidad.

Por las propiedades del valor absoluto y puesto que $|z| = 1$,

$$\left|\frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}\right| = \left|\frac{az + b}{\bar{a}\,\bar{z} + \bar{b}}\right| \cdot \frac{1}{|z|} = 1$$

ya que $|az + b| = \overline{|az + b|} = |\bar{a}\bar{z} + \bar{b}|$.

1.2.9. *Muestre que el máximo del valor absoluto de* $z^2 + 1$ *en el disco* $|z| \leq 1$ *es* 2.

Solución. Por la desigualdad del triángulo. $|z^2 + 1| \leq |z^2| + 1 \leq |z|^2 + 1 \leq 1^2 + 1 = 2$, ya que $|z| \leq 1$, así $|z^2 + 1|$ no excede a 2 en el disco. Puesto que el valor 2 se alcanza en $z = 1$, entonces el máximo es 2.

1.2.10. *Exprese cos* 3θ *en términos de cos* θ *y sen* θ *usando la fórmula de De Moivre.*

Solución. La fórmula de De Moivre para $r = 1$ y $n = 3$ nos da la identidad

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$$

Cuando se expande el lado izquierdo de esta ecuación (véase el ejercicio 14 de la sección 1.1), resulta

$$\cos^3\theta + i3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta - i\operatorname{sen}^3\theta$$

Al igualar las partes reales e imaginarias, obtenemos que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

y la fórmula adicional

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\operatorname{sen}^3\theta + 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta$$

1.2.11. *Escriba, en notación compleja, la ecuación de una línea recta, de un círculo y de una elipse.*

Solución

La línea recta se expresa más convenientemente en forma parametrizada: $z = a + bt$, $a, b \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{R}$, la cual representa una línea en la dirección de b y que pasa por el punto a.
El círculo puede expresarse como $|z - a| = r$ (radio r, centro a).
La elipse puede expresarse como $|z - d| + |z + d| = 2a$; los focos están localizados en $\pm d$ y el semieje mayor es igual a a.
Estas ecuaciones, en las que $|\cdot|$ es interpretado como la longitud, son las definiciones de estos lugares geométricos.

1.2.12. *Suponga que* $u = a + ib$ *y* $v = c + id$ *son números complejos fijos y que* μ *es un número real positivo. Demuestre que la ecuación.*

$$\left|\frac{z-u}{z-v}\right|^2 = \mu$$

describe un círculo o una línea recta en el plano complejo.

Solución. Si hacemos $z = x + iy$, la ecuación resulta

$$\mu = \left|\frac{(x-a)+i(y-b)}{(x-c)+i(y-d)}\right|^2 = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-c)^2+(y-d)^2}$$

Después de hacer el producto cruzado, desarrollar y luego agrupar los términos en x y y en el lado izquierdo, obtenemos

$$(1-\mu)x^2 + (1-\mu)y^2 - 2(a-\mu c)x - 2(b-\mu d)y = \mu(c^2+d^2) - (a^2+b^2)$$

Si $\mu = 1$, ésta es la ecuación de una línea. En efecto, es la línea perpendicular que bisecta el segmento entre u y v. Si $\mu \neq 1$, al completar cuadrados obtenemos

$$\left(x - \frac{a-\mu c}{1-\mu}\right)^2 + \left(y - \frac{b-\mu d}{1-\mu}\right)^2 = \frac{\mu(c^2+d^2)-(a^2+b^2)}{1-\mu} + \left(\frac{a-\mu c}{1-\mu}\right)^2 + \left(\frac{b-\mu d}{1-\mu}\right)^2$$

$$= \frac{\mu}{(1-\mu)^2}[(a-c)^2 + (b-d)^2]$$

que es la ecuación de un círculo con centro en $((a-\mu c)/(1-\mu), (b-\mu d)/(1-\mu)$ y de radio $(\sqrt{\mu}/|1-\mu|)\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^5 - 2 = 0$ *b)* $z^4 + i = 0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $z^6 + 8 = 0$ *b)* $z^3 - 4 = 0$

3. ¿Cuál es el conjugado complejo de $(3+8i)^4/(1+i)^{10}$?

4. ¿Cuál es el conjugado complejo de $(8-2i)^{10}/(4+6i)^5$?

5. Exprese cos $5x$ y sen $5x$ en términos de cos x y sen x.

6. Exprese cos $6x$ y sen $6x$ en términos de cos x y sen x.

7. Encuentre el valor absoluto de $[i(2+3i)(5-2i)]/(-2-i)$.

8. Encuentre el valor absoluto de $(2-3i)^2/(8+6i)^2$.

9. Sea w una raíz n-ésima de la unidad, $w \neq 1$. Demuestre que $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$.

10. Demuestre que las raíces de un polinomio con coeficientes reales ocurren en parejas conjugadas.

11. Si $a, b \in \mathbf{C}$, pruebe la *identidad del paralelogramo*: $|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$.

12. Interprete geométricamente la identidad del ejercicio 11.

13. ¿Cuándo se satisface la igualdad en la desigualdad del triángulo $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$? Interprete geométricamente su resultado.

14. Suponga que $|z| = 1$ o $|w| = 1$ y que $\bar{z}w \neq 1$, demuestre que

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = 1$$

15. ¿Es cierto que $z^2 = |z|^2$? Si lo es, demuestre esta identidad. Si no lo es, ¿para qué valores de z es cierto?

16. Haciendo $z = x + iy$, pruebe que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\,|z|$.

17. Sean $z = a + ib$ y $z' = a' + ib'$. Pruebe que $|zz'| = |z|\,|z'|$ evaluando cada uno de los lados.

18. Pruebe lo siguiente:

a) $\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$ *b*) $\arg(z/w) = \arg z - \arg w \pmod{2\pi}$

c) $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$

19. ¿Cuál es la ecuación del círculo con radio 3 y centro en $8 + 5i$ en notación compleja?

20. Usando la fórmula $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$, muestre cómo construir geométricamente z^{-1}.

21. Describa al conjunto de todas las z tales que $\text{Im}\,(z + 5) = 0$.

22. Pruebe la identidad de Lagrange:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k w_k \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \right) - \sum_{k<j} |z_k \bar{w}_j - z_j \bar{w}_k|^2$$

Deduzca la desigualdad de Cauchy a partir de su demostración.

23. Encuentre el máximo de $|z^n + a|$ para aquellas z con $|z| \leq 1$.

24. Calcule la mínima cota superior (esto es, el supremo) del siguiente conjunto de números reales: $\{\text{Re}\,(iz^3 + 1)$ tal que $|z| < 2\}$.

25. Pruebe la identidad trigonométrica de Lagrange:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

(Suponga que $\operatorname{sen}(\theta/2) \neq 0$.)

26. Suponga que los números complejos z_1, z_2, z_3 satisfacen la ecuación

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

Pruebe que $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. (*Sugerencia*: argumente geométricamente, interpretando el resultado de cada afirmación.)

27. Dé una condición necesaria y suficiente para

a) z_1, z_2, z_3 estén en una línea recta.

b) z_1, z_2, z_3, z_4, estén en una línea recta o en un círculo.

28. Pruebe la identidad

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \cdots \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Sugerencia: El producto dado puede ser escrito como $1/2^{n-1}$ veces el producto de las raíces diferentes de cero del polinomio $(1 - z)^{n-1}$.)

29. Sea w una raíz n-ésima de la unidad, $w \neq 1$. Evalúe $1 + 2w + 3w^2 + \cdots + nw^{n-1}$.

30. La correspondencia del número complejo $z = a + ib$ con la matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \psi_z$ mencionada en el párrafo anterior al resultado 1.2.2, da otra manera de representar los números complejos. Demuestre que

a) $\psi_{z\omega} = \psi_z \psi_\omega$.

b) $\psi_{z+\omega} = \psi_z + \psi_\omega$.

c) $\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\lambda \psi_z = \psi_{\lambda z}$ si λ es real.

e) $\psi_{\bar{z}} = (\psi_z)^t$ (la matriz transpuesta).

f) $\psi_{1/z} = (\psi_z)^{-1}$.

g) z es real si y sólo si $\psi_z = (\psi_z)^t$.

h) $|z| = 1$ si y sólo si ψ_z es una matriz ortogonal.

1.3. ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

Las funciones trigonométricas seno y coseno, así como la función exponencial y la función logaritmo, se estudian en cálculo elemental. Recuérdese que las funciones trigonométricas pueden definirse en términos de las razones de los lados de un triángulo rectángulo. La definición de "ángulo" puede extenderse hasta incluir cualquier número real y de este modo cos θ y sen θ se convierten en funciones con valores reales de variable real, θ. Es un hecho básico que el cos θ y sen θ son diferenciables, con derivadas dadas por $d(\cos \theta)/d\theta = -\text{sen } \theta$ y $d(\text{sen } \theta)/d\theta = \cos \theta$. Alternativamente, el cos θ y el sen θ pueden definirse por sus series de potencias:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

La convergencia de estas series, por supuesto, debe también demostrarse; tal demostración puede encontrarse en el capítulo 3 y en cualquier texto de cálculo.[1] Alternativamente, el sen x puede definirse como la única solución $f(x)$ de la ecuación diferencial $f''(x) + f(x) = 0$ que satisface $f(0) = 0, f'(0) = 1$; y el cos x puede definirse como la única solución de $f''(x) + f(x) = 0, f(0) = 1, f'(0) = 0$ (otra vez, véase un texto de cálculo para las demostraciones).

[1] Tal como, J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus*, 2a. ed., Nueva York, Springer-Verlag, 1985, cap. 12.

La función exponencial

La función exponencial, denotada por e^x, puede definirse como la única solución de la ecuación diferencial $f'(x) = f(x)$, sujeta a la condición inicial $f(0) = 1$. (Puede demostrarse que existe una única solución.) La función exponencial también puede definirse por su serie de potencias:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Aceptamos del cálculo el hecho que e^x es una función de x, positiva y estrictamente creciente. Por tanto, para $y > 0$, $\log y$ puede definirse como la función inversa de e^x; esto es, $e^{\log y} = y$. Otro enfoque que es usado frecuentemente en libros de cálculo es empezar por definir

$$\log y = \int_1^y \frac{1}{t} dt$$

para $y > 0$ y entonces definir e^x como la función inversa de $\log y$. (*Nota*: Muchos libros de cálculo escriben $\ln y$ para el logaritmo con base en e. Como en la mayoría de los textos avanzados de matemáticas, a lo largo de este libro escribiremos $\log y$ en vez de $\ln y$.)

En esta sección, se extenderán estas funciones al plano complejo. En otras palabras, se definirán las funciones sen z, cos z, e^z y $\log z$ para complejos z y sus restricciones a la línea real serán los usuales sen x, cos x, e^x y $\log x$. La extensión a los números complejos debe ser natural en el sentido que muchas de las propiedades familiares de sen, cos, exp y log se conserven. Estas funciones, así como la función potencia z^n, se estudiarán geométricamente más adelante en esta misma sección.

Primero extenderemos la función exponencial. Sabemos del cálculo que para un número real x, e^x puede representarse por su serie de Maclaurin:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Así. debe ser de lo más natural definir e^{iy} por

$$1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots$$

para $y \in \mathbf{R}$. Por supuesto, esta definición no es muy legítima, ya que la convergencia de series en $\mathbf{C}$ no ha sido aún discutida. En el capítulo 3 se mostrará que esta serie efectivamente representa un número complejo bien definido para cada y, pero por el momento, la serie es usada informalmente como la base de la definición que sigue, la cual será precisa. Un ligero reordenamiento de la serie (usando el ejercicio 16, sección 1.1.) muestra que

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$$

Pero reconocemos que esto es simplemente cos $y + i$ sen y. Por lo tanto, *definimos*.

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Hasta aquí, hemos definido e^z para z a lo largo de los ejes real e imaginario. ¿Cómo definimos $e^z = e^{x+iy}$? Deseamos que nuestra extensión de la exponencial conserve las propiedades familiares y entre estas está la ley de los exponentes: $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$. Este requisito nos obliga a definir $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Esto puede expresarse en una definición formal:

Definición 1.3.1. *Si* $z = x + iy$, *entonces definimos* e^z *como* e^x (cos y + i sen y).

Nótese que si z es real (esto es, si $y = 0$), esta definición coincide con la función exponencial usual e^x. El estudiante debe ser cauto en este punto, no estamos pensando a e^z como "e elevado a la ≪potencia≫ z" puesto que el concepto de exponentes complejos no ha sido definido aún. La notación e^z es meramente una abreviatura de la función definida como $e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

Existe también otra razón, puramente formal, para definir $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Si escribimos $e^{iy} = f(y) + ig(y)$, notamos que puesto que queremos que $e^0 = 1$, debemos tener $f(0) = 1$ y $g(0) = 0$. Al derivar con respecto de y nos da $ie^{iy} = f'(y) + ig'(y)$, por lo tanto, cuando $y = 0$, obtenemos $f'(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Al diferenciar nuevamente nos queda $-e^{iy} = f''(y) + ig''(y)$. Si comparamos estos resultados con $e^{iy} = f(y) + ig(y)$, obtenemos que $f''(y) + f(y) = 0, f(0) = 1, f'(0) = 0$, de modo que $f(y) = \cos y$; y $g''(y) + g(y) = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, de modo que $g(y) = \operatorname{sen} y$, por la definición de sen y y cos y en términos de ecuaciones diferenciales. Así, obtenemos que $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, como en la definición 1.3.1.

Algunas de las propiedades importantes de e^z están resumidas en la siguiente proposición. Para enunciarlas necesitamos recordar la definición de función periódica, a saber, una función $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ se llama periódica, si existe un $w \in \mathbf{C}$ (llamado *periodo*) tal que $f(z + w) = f(z)$ para toda $z \in \mathbf{C}$.

Proposición 1.3.2

(i) $e^{z+w} = e^z e^w$ *para toda* $z,w \in \mathbf{C}$.

(ii) e^z *nunca es* 0.

(iii) *Si* x *es real, entonces* $e^x > 1$ *cuando* $x > 0$, *y* $e^x < 1$ *cuando* $x < 0$.

(iv) $|e^{x+iy}| = e^x$.

(v) $e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{3\pi i/2} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.

(vi) e^z *es periódica, cualquier periodo de* e^z *tiene la forma* $2\pi ni$, n *entero*.

(vii) $e^z = 1$ *si y sólo si* $z = 2n\pi i$ *para algún entero* n (*positivo*, negativo, o 0).

Demostración

(i) Sea $z = x + iy$ y sea $w = s + it$. Por nuestra definición de e^z,

$$e^{z+w} = e^{(x+s)+i(y+t)}$$

$$= e^{x+s}[\cos(y+t) + i \operatorname{sen}(y+t)]$$

$$= [e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)]\,[e^s(\cos t + \mathrm{i} \operatorname{sen} t)]$$

al usar las fórmulas de adición para senos y cosenos y la propiedad, bien conocida del cálculo elemental, de que $e^{x+s} = e^x \cdot e^s$ para números reales x y s. Así, $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ para cualesquiera números complejos z y w.

(ii) Para cada z, tenemos que $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$ ya que como sabemos la función exponencial usual satisface $e^0 = 1$. Así, e^z nunca puede ser cero, porque si lo fuera, entonces $e^z \cdot e^{-z}$ sería cero, lo cual no es cierto.

(iii) Esto se sigue del cálculo elemental. Por ejemplo, es obvio que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots > 1 \quad \text{cuando } x > 0$$

(Otra demostración, que utiliza la definición de e^z en términos de ecuaciones diferenciales es la siguiente. Recordemos que e^z es la única solución de $f'(x) = f(x)$ con $e^0 = 1$ (x real). Dado que e^x es continua y nunca se hace cero, debe ser estrictamente positiva. Por lo tanto, $(e^x)' = e^x$ es siempre positiva y, en consecuencia, e^x es estrictamente creciente. Así, para $x > 0$, $e^x > 1$ y para $x < 0$, $e^x < 1$.)

(iv) Usando $|zz'| = |z|\,|z'|$ (véase la proposición 1.2.5), obtenemos

$$|e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x|\,|e^{iy}|$$

$$= e^x |\cos y + i \operatorname{sen} y| \quad \text{ya que } e^x > 0$$

$$= e^x \quad \text{ya que } \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$$

(v) De la definición, $e^{\pi i/2} = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2) = i$. La prueba de las otras fórmulas es similar.

(vi) Suponga que $e^{z+w} = e^z$ para toda $z \in \mathbf{C}$. Haciendo $z = 0$, obtenemos $e^w = 1$. Si $w = s + ti$, entonces, usando (iv), $e^w = 1$ implica que $e^s = 1$ y, por lo tanto, $s = 0$ Así, cualquier periodo es de la forma ti, $t \in \mathbf{R}$. Suponga que $e^{ti} = 1$, esto es, que $\cos t + i \operatorname{sen} t = 1$. Entonces $\cos t = 1$, $\operatorname{sen} t = 0$, y, por tanto, $t = 2\pi n$ para algún entero n.

(vii) $e^0 = 1$, como hemos visto y $e^{2\pi ni} = 1$ pues e^z es periódica, por (vi). Recíprocamente, $e^z = 1$ implica que $e^{z+z'} = e^{z'}$ para toda z'; así, por (vi), $z = 2\pi ni$ para algún entero n. ■

¿Cómo podemos representar e^{iy}? Conforme y va de 0 a 2π, e^{iy} se mueve a lo largo del círculo unitario en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj, alcanzando i en $y = \pi/2$, -1 en π, $-i$ en $3\pi/2$ y 1 nuevamente en 2π. Así, e^{iy} es el punto sobre el círculo unitario con argumento y (véase figura 1.3.1).

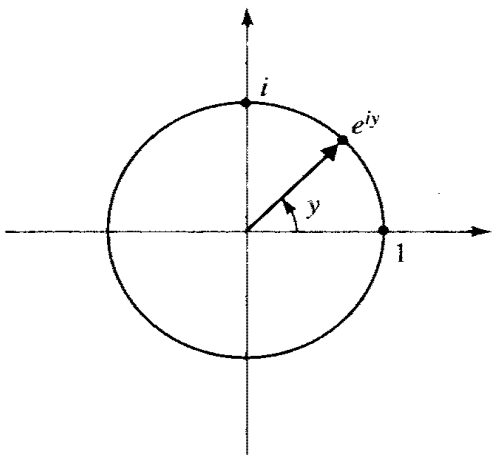


Figura 1.3.1. Puntos en el círculo unitario.

Nótese que en forma exponencial, la representación polar de un número complejo toma la forma

$$z = |z|e^{i(\arg z)}$$

la cual se abrevia algunas veces como $z = re^{i\theta}$.

Las funciones trigonométricas

A continuación, deseamos extender las definiciones de seno y coseno al plano complejo. La extensión de la exponencial al plano complejo sugiere un modo de extender las definiciones de seno y coseno. Tenemos que $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, y $e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$, lo cual implica que

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

Pero como e^{iz} está definida ahora para cualquier $z \in \mathbf{C}$, esto nos conduce a formular la siguiente definición:

Definición 1.3.3

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

para cualquier número complejo z.

Nuevamente, si z es real, estas definiciones coinciden con las definiciones usuales de seno y coseno aprendidas en cálculo elemental.

La siguiente proposición enlista algunas de las propiedades de las funciones seno y coseno, que ahora han sido definidas en todo **C** y no tan sólo en **R**.

Proposición 1.3.4

(i) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.

(ii) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w + \cos z \cdot \cos w$ y
$\cos(z + w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$.

Otra vez, el estudiante debe ser cauto con estas fórmulas, aun cuando son plausibles, deben ser probadas, ya que hasta el momento nosotros conocemos su validez sólo cuando w y z son reales.

Demostración

(i) $$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$$

(ii) $\operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

la cual, al usar $e^{iz}e^{iw} = e^{i(z+w)}$, se simplifica a

$$\frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} + \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z + w)$$

El estudiante puede verificar, en forma similar, la fórmula para $\cos(z + w)$. ■

Además del $\cos z$ y el $\operatorname{sen} z$, podemos definir $\tan z = (\operatorname{sen} z)/(\cos z)$ cuando $\cos z \neq 0$ y obtener similarmente las otras funciones trigonométricas.

La función logaritmo

Definiremos ahora el logaritmo de tal forma que nuestra definición coincida con la definición usual de $\log x$, cuando x está localizado en la parte positiva del eje real. En el caso real podemos definir al *logaritmo* como la inversa de la exponencial (esto es, $\log x = y$ es la solución de $e^y = x$). Cuando permitimos a z variar sobre **C**, debemos ser más cuidadosos porque, como se ha mostrado, la exponencial es periódica y por ende no tiene inversa. Más aún, la exponencial nunca es cero, por lo que no podemos esperar que se pueda definir el logaritmo en cero. Así,

debemos ser más cuidadosos en nuestra elección del dominio en **C** sobre el cual podemos definir el logaritmo. La siguiente proposición indica cómo puede hacerse esto.

Proposición 1.3.5. *Denótese por* A_{y_0} *el conjunto de números complejos* $x + iy$ *tales que* $y_0 \le y < y_0 + 2\pi$; *simbólicamente,*

$$A_{y_0} = \{ x + iy \mid x \in \mathbf{R} \text{ y } y_0 \le y < y_0 + 2\pi \}$$

Entonces e^z *mapea* A_{y_0} *en forma uno a uno sobre el conjunto* $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

Recuérdese que una función es *uno a uno* cuando manda cualesquiera dos puntos distintos en dos puntos distintos; en otras palabras: dos puntos distintos nunca son enviados al mismo punto. Afirmar que una función es *sobre* en un conjunto B, significa que cada punto de B es la imagen de algún punto bajo la función. La notación $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ significa todo el plano complejo menos el punto 0; esto es, el plano complejo con el origen removido.

Demostración. Si $e^{z_1} = e^{z_2}$, entonces $e^{z_1 - z_2} = 1$ y así $z_1 - z_2 = 2\pi in$, para algún entero n, por la proposición 1.3.2. Pero dado que ambos, z_1 y z_2, están en A_{y_0}, donde la diferencia entre las partes imaginarias de cualesquiera dos puntos es menor que 2π, debemos tener que $z_1 = z_2$. Este argumento muestra que e^z es uno a uno. Sea $w \in \mathbf{C}$ con $w \neq 0$. Afirmamos que la ecuación $e^z = w$ tiene solución z en A_{y_0}. La ecuación $e^{x+iy} = w$ es equivalente a las dos ecuaciones $e^x = |w|$ y $e^{iy} = w / |w|$ (¿por qué?). La solución de la primera ecuación es $x = \log |w|$, donde "log" es el logaritmo ordinario definido en la parte positiva del eje real. La segunda ecuación tiene una infinidad de soluciones y, y cada una de ellas difiere de las otras por un múltiplo entero de 2π, pero exactamente una de éstas está en el intervalo $[y_0, y_0 + 2\pi[$. Esta y es simplemente $\arg w$, donde el rango especificado para la función $\arg w$ es $[y_0, y_0 + 2\pi[$. Así, e^z es sobre en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. ■

Los conjuntos definidos en esta proposición se muestran en la figura 1.3.2. Aquí e^z mapea la banda horizontal entre $y_0 i$ y $(y_0 + 2\pi)i$ en forma uno a uno sobre $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. (La notación $z \to f(z)$ es usada para indicar que z es mandada a $f(z)$ bajo la función f.)

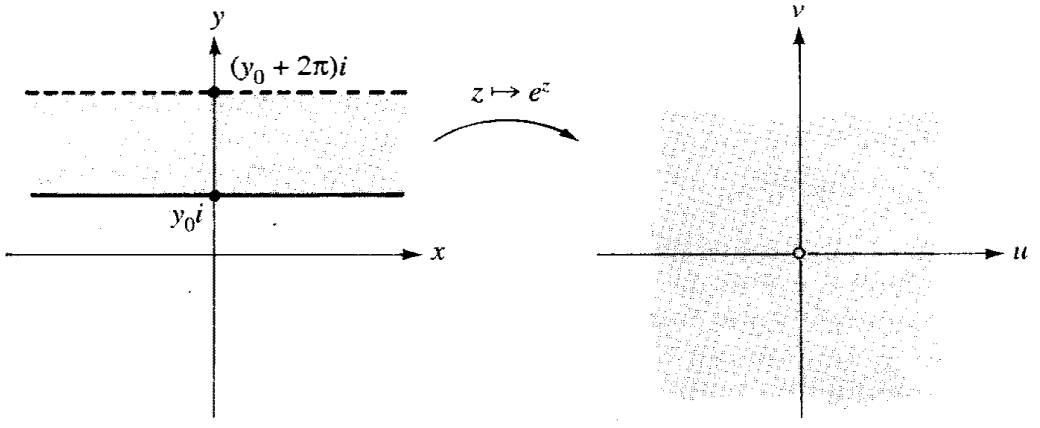


Figura 1.3.2. e^z es una función uno a uno y sobre en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

En la demostración de la proposición 1.3.5 también se dedujo una expresión implícita para la inversa de e^z, restringida a la banda $y_0 \leq \text{Im } z < y_0 + 2\pi$ y esta expresión es enunciada formalmente en la siguiente definición.

Definición 1.3.6. *La función* log: $\mathbf{C}\backslash\{0\} \to \mathbf{C}$, *con rango* $y_0 \leq \text{Im log } z < y_0 + 2\pi$, *está definida como*

$$\log z = \log |z| + i \arg z,$$

donde arg z *toma valores en el intervalo* $[y_0, y_0 + 2\pi[$ *y* log |z| *es el logaritmo usual del número real positivo* |z|.

Algunas veces, esta función es referida como "la *rama* de la función logaritmo en $\{x + iy \mid y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$". Pero, debemos recordar que la función log z está bien definida cuando especificamos un intervalo de longitud 2π en el cual arg z toma sus valores, esto es, cuando se elige una rama específica. Por ejemplo, supóngase que el intervalo especificado es $[0, 2\pi[$. Entonces $\log(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\pi/4$. Sin embargo, si el intervalo especificado es $[\pi, 3\pi[$, entonces $\log (1 + i) = \log \sqrt{2} + i9\pi/4$. Cualquier rama del logaritmo definida de esta forma sufre un salto repentino conforme z se mueve a través del rayo arg $z = y_0$. Para evitar esto, uno puede restringir el dominio a $y_0 < y < y_0 + 2\pi$. Esta idea será importante en la sección 1.6.

Proposición 1.3.7. log z *es la inversa de* e^z *en el siguiente sentido*: *Para cualquier rama de* log z, *tenemos que* $e^{\log z} = z$, *si escogemos la rama comprendida en* $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$, *entonces* log $(e^z) = z$ *para* $z = x + iy$ *y* $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$.

Demostración. Dado que $\log z = \log |z| + i \arg z$,

$$e^{\log z} = e^{\log|z|}\, e^{i \arg z} = |z| e^{i \arg z} = z$$

Recíprocamente, suponga que $z = x + iy$ y $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$. Por definición, $\log e^z = \log |e^z| + i \arg e^z$. Pero $|e^z| = e^x$ y $\arg e^z = y$ por nuestra elección de la rama. Así, $\log e^z = \log e^x + iy = x + iy = z$. ■

El logaritmo definido en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ se comporta de la misma manera con respecto del producto, que el logaritmo restringido a la parte positiva del eje real.

Proposición 1.3.8. *Si* $z_1, z_2 \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$, *entonces* log $(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ (*excepto por la adición de un múltiplo entero de* $2\pi i$).

Demostración: $\log z_1 z_2 = \log |z_1 z_2| + i \arg (z_1 z_2)$, donde se ha elegido un intervalo $[y_0, y_0 + 2\pi[$ para los valores de la función arg. Sabemos que $\log |z_1 z_2| = \log |z_1|\, |z_2| = \log |z_1| + \log |z_2|$ y $\arg (z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ (excepto por un múltiplo entero de 2π). Entonces $\log z_1 z_2 = (\log |z_1| + i \arg z_1) + (\log |z_2| + i \arg z_2) = \log z_1 + \log z_2$ (excepto por múltiplos enteros de $2\pi i$). ■

Para ejemplificar: Encontremos $\log [(-1 - i)(1 - i)]$ donde el rango de la función arg es escogido como, por ejemplo, $[0, 2\pi[$. Entonces $\log [(-1 - i)(1 - i)] = \log (-2) = \log 2 + \pi i$. Por otra parte, $\log (-1 - i) = \log \sqrt{2} + i5\pi/4$ y $\log (1 - i) = \log \sqrt{2} + i7\pi/4$. Así, $\log (-1 - i) + \log (1 - i) = \log 2 + i3\pi = (\log 2 + \pi i) + 2\pi i$; por lo que en este caso, cuando $z_1 = -1 - i$ y $z_2 = 1 - i$, $\log z_1 z_2$ difiere de $\log z_1 + \log z_2$ por $2\pi i$.

La propiedad básica de la proposición 1.3.8 puede ayudar a uno a recordar la definición de $\log z$ si se escribe $\log z = \log (re^{i\theta}) = \log r + \log e^{i\theta} = \log |z| + i \arg z$.

Potencias complejas

Estamos ahora en posición de definir el término a^b, donde $a, b \in \mathbf{C}$ y $a \neq 0$ (léase "a elevado a la potencia b"). Por supuesto, no importa cómo definamos a^b, la definición debe reducirse a la usual cuando a y b son números reales. El truco consiste en notar que a también puede escribirse como $e^{\log a}$ de acuerdo a la proposición 1.3.7. Si b es un entero, tenemos que $a^b = (e^{\log a})^b = e^{b \log a}$. Esta última igualdad es válida ya que si n es un entero y z es cualquier número complejo, $(e^z)^n = e^z \cdot \cdot \cdot e^z = e^{nz}$ por la proposición 1.3.2 (i), lo que nos conduce a formular la siguiente definición.

Definición 1.3.9. a^b (donde $a, b \in \mathbf{C}$ *y* $a \neq 0$) *se define como* $e^{b \log a}$, *se sobreentiende que se ha elegido algún intervalo* $[y_0, y_0 + 2\pi[$ (*esto es, una rama de* log), *en el que la función* arg *toma sus valores.*

Es de extrema importancia entender precisamente lo que esta definición involucra. En especial nótese que, en general, $\log z$ es una función "multivaluada"; esto es, a $\log z$ se le pueden asignar varios valores distintos porque pueden elegirse diferentes intervalos $[y_0, y_0 + 2\pi[$. Esto no es sorprendente, ya que si $b = 1/q$, donde q es un entero, entonces nuestro trabajo previo con la fórmula de De Moivre nos llevaría a esperar que a^b sea una de las q-ésimas raíces de a y, por tanto, debe tener q valores distintos. El siguiente teorema dirime este punto.

Proposición 1.3.10 *Sean* $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. *Entonces* a^b *es univaluada* (*esto es, el valor de* a^b *no depende de la elección de la rama de* log) *si y sólo si* b *es un entero. Si* b *es un número real racional y si* $b = p/q$ *está en su forma reducida* (*en otras palabras, si* p *y* q *no tienen factores comunes*), *entonces* a^b *tiene exactamente* q *valores distintos, a saber, las* q *raíces de* a^p. *Si* b *es real e irracional o si* b *tiene parte imaginaria diferente de cero, entonces* a^b *tiene una infinidad de valores. Cuando* a^b *tiene distintos valores, estos valores difieren por un factor de la forma* $e^{2\pi nbi}$.

Demostración. Elíjase un intervalo, por ejemplo, $[0, 2\pi[$, para los valores de la función arg. Sea $\log z$ la rama correspondiente del logaritmo. Si escogiéramos cualquier otra rama de la función log, obtendríamos $\log a + 2\pi ni$ en lugar de $\log a$, para algún entero n. Así, $a^b = e^{b \log a + 2\pi nbi} = e^{b \log a} \cdot e^{2\pi nbi}$, donde el valor de n depende de la rama del logaritmo (esto es, del intervalo elegido para los valores de la función arg). Pero por la proposición 1.3.2, $e^{2\pi nbi}$ es el mismo valor para diferentes

valores de n si y sólo si b es un entero. Similarmente puede mostrarse que $e^{2\pi nip/q}$ tiene q valores distintos si p y q no tienen factores comunes. Si b es irracional y si $e^{2\pi nbi} = e^{2\pi mbi}$ se sigue que $e^{(2\pi bi)(n-m)} = 1$ y, por tanto, $b(n-m)$ es un entero; dado que b es irracional, esto implica que $n - m = 0$. Así, si b es irracional, $e^{2\pi nbi}$ tiene una infinidad de valores distintos. Si b es de la forma $x + iy$, $y \neq 0$, entonces $e^{2\pi nbi} = e^{-2\pi ny} \cdot e^{2\pi nix}$, que también tiene una infinidad de valores distintos. ■

Reiteramos: Cuando escribimos $e^{b \log a}$, se sobreentiende que se ha elegido alguna rama de log y, acorde con esto, $e^{b \log a}$ tiene un valor bien definido. Pero al cambiar la rama de log, obtenemos valores de $e^{b \log a}$ que difieren por un factor de la forma $e^{2\pi inb}$. Esto es lo que entendemos cuando decimos que $a^b = e^{b \log a}$ es "multivaluada".

Un ejemplo debe clarificar esto. Sea $a = 1 + i$ y sea b algún número real e irracional. Entonces la infinidad de posibles valores distintos de a^b son dados por $e^{b[\log(1+i) + 2\pi ni]} = e^{b(\log \sqrt{2} + i\pi/4 + 2\pi ni)} = (e^{b \log \sqrt{2} + ib\pi/4}) e^{b 2\pi ni}$ a medida que n toma todos los valores enteros (cada uno correspondiente a una elección diferente de la rama). Por ejemplo, si usamos la rama correspondiente a $[-\pi, \pi[$ o $[0, 2\pi[$, haríamos $n = 0$.

Algunas propiedades de a^b aparecen en los ejercicios al final de esta sección, pero ahora estamos interesados en el caso especial en el que b es de la forma $1/n$, porque éste nos da la raíz n-ésima.

La función raíz n-ésima

Sabemos que $\sqrt[n]{z}$ tiene exactamente n valores para $z \neq 0$. Para obtener una función específica debemos nuevamente escoger una rama de log como se describió en el párrafo anterior.

Definición 1.3.11. *La función raíz* n-*ésima se define como.*

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = e^{(\log z)/n}$$

para una elección específica de la rama de log z; *con esta elección,* $\sqrt[n]{z} = e^{(\log z)/n}$ *es llamada una* ***rama*** *de la función raíz* n-*ésima.*

El siguiente teorema no debe sorprendernos.

Proposición 1.3.12. $\sqrt[n]{z}$ *así definida, es una raíz* n-*ésima de* z. *Se obtiene como sigue. Si* $z = re^{i\theta}$, *entonces*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}$$

donde θ *es elegida de modo que permanezca dentro de un intervalo particular correspondiente a la rama elegida. Conforme se agregan múltiplos de* 2π a θ, *obte-*

nemos las n *raíces* n*-ésimas de* z. *En el lado derecho,* $\sqrt[n]{r}$ *es la raíz* n*-ésima positiva del número real positivo* r.

Demostración. Por nuestra definición.

$$\sqrt[n]{z} = e^{(\log z)/n}$$

Pero $\log z = \log r + i\theta$, así

$$e^{(\log z)/n} = e^{(\log r)/n} \cdot e^{i\theta/n} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}$$

La afirmación es entonces clara. ■

El lector deberá, ahora, tomar su tiempo para convencerse de que este modo de describir las n raíces n-ésimas de z es el mismo que el descrito en el corolario 1.2.3.

Geometría de las funciones elementales

Para entender mejor las funciones z^n, $\sqrt[n]{z}$, e^z y $\log z$, consideraremos la interpretación geométrica de cada una de ellas en lo que resta de esta sección. Empecemos con la función potencia z^n, con $n = 2$. Sabemos que z^2 tiene longitud $|z|^2$ y argumento $2 \arg z$. Así, la función $z \mapsto z^2$ eleva al cuadrado las longitudes y duplica los argumentos (véase figura 1.3.3).

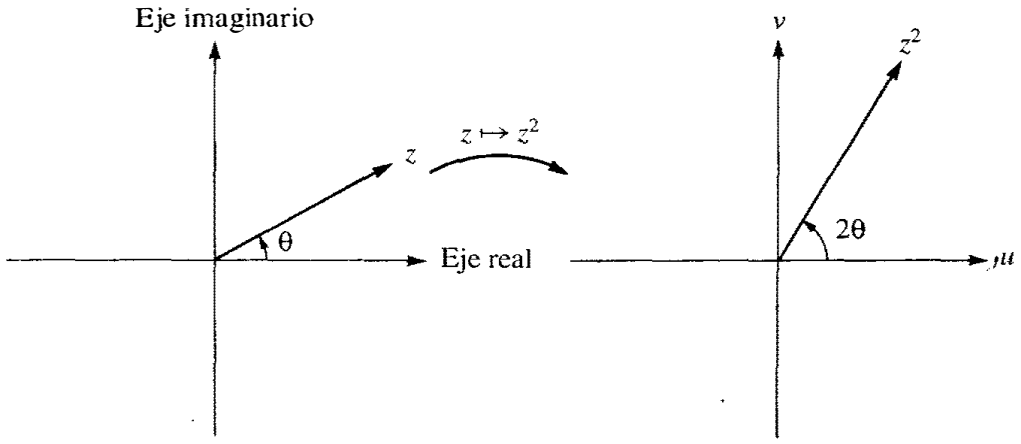


Figura 1.3.3. Función elevar al cuadrado.

Debe ser claro, de la duplicación de ángulos, que la función potencia z^2 transforma el primer cuadrante en todo el semiplano superior (véase figura 1.3.4). Similarmente, el semiplano superior es transformado en la totalidad del plano.

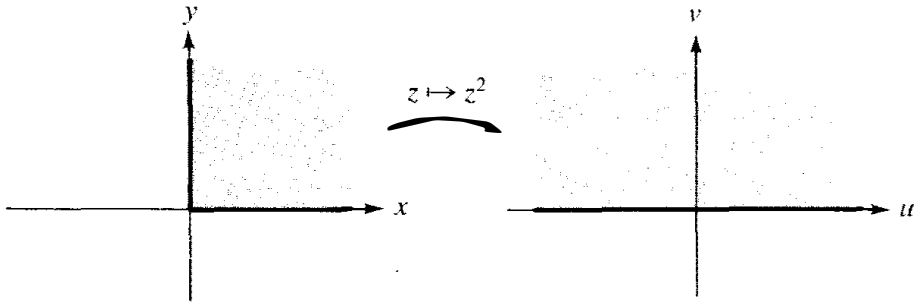


Figura 1.3.4. Efecto de la función elevar al cuadrado en el primer cuadrante.

Considérese ahora la función raíz cuadrada $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$. Suponga que elegimos una rama especificando el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$. Entonces $0 \leq \theta/2 < \pi$, por lo tanto, $\sqrt{z}$ permanece siempre en el semiplano superior y los ángulos se reducen a la mitad. La situación es similar a la de la exponencial ya que $z \mapsto \sqrt{z}$ es la inversa de $z \mapsto z^2$, cuando la última se restringe a la región en la cual es uno a uno. En la misma medida, si elegimos la rama $-\pi \leq \theta < \pi$ tenemos que $-\pi/2 \leq \theta/2 < \pi/2$, por lo que $\sqrt{z}$ toma sus valores en el semiplano de la derecha en lugar del semiplano superior. (En general, puede usarse cualquier "semiplano", véase figura 1.3.5). Si elegimos una rama específica de $\sqrt{z}$, también elegimos cuál de las dos posibles raíces cuadradas obtendremos.

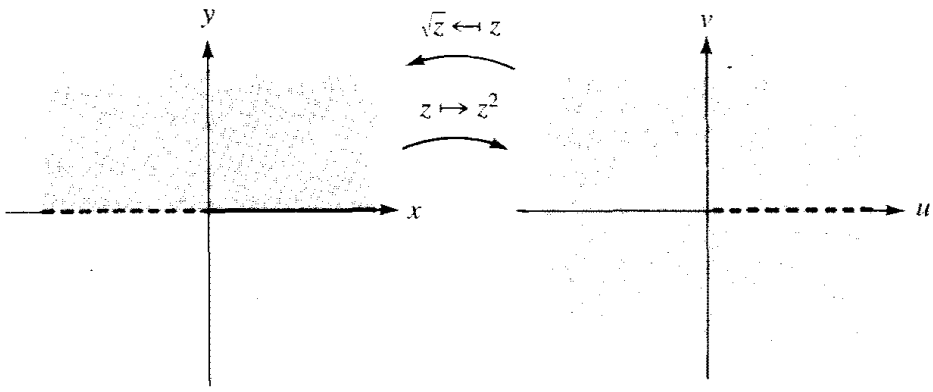


Figura 1.3.5. La función elevar al cuadrado y su inversa.

Pueden formularse varios enunciados geométricos en relación a la función $z \mapsto z^2$ que también dan información sobre la inversa, $z \mapsto \sqrt{z}$. Por ejemplo, un círculo de radio r, descrito por el conjunto de puntos $re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, es transformado en $r^2e^{i2\theta}$, un círculo de radio r^2; conforme $re^{i\theta}$ se mueve una vez alrededor del primer círculo, el punto imagen da dos vueltas (véase figura 1.3.6). El mapeo inverso hace lo contrario: conforme z se mueve alrededor del círculo $re^{i\theta}$ de radio r, $\sqrt{z}$ se mueve la mitad de rápido alrededor del círculo $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ de radio $\sqrt{r}$.

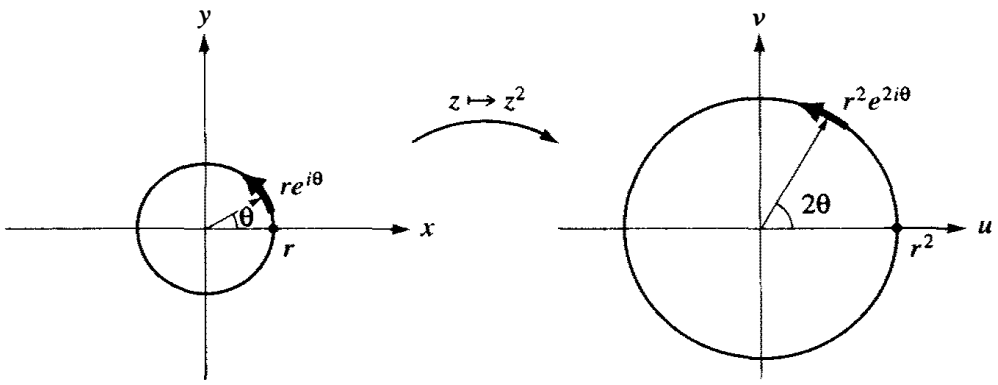


Figura 1.3.6. Efecto de la función elevar al cuadrado en un círculo de radio r.

Los dominios correctos sobre los cuales $z \mapsto e^z$ y $z \mapsto \log z$ son inversas, se han discutido ya (véase figura 1.3.2). Notemos que una línea y = constante, descrita por los puntos $x + iy$ conforme x varía, son mapeados por la función $z \mapsto e^z$ en puntos $e^x e^{iy}$, que es un rayo con argumento y. Conforme x varía de $-\infty$ a $+\infty$, el punto imagen sobre el rayo va desde 0 hasta infinito (véase figura 1.3.7). Similarmente, la línea vertical x = constante es mapeada en un círculo de radio e^x. Si restringimos y a un intervalo de longitud 2π, el círculo imagen es descrito una vez, pero si no se restringe y, el círculo imagen es descrito un número infinito de veces conforme y varía de $-\infty$ a $+\infty$. El logaritmo, que es la inversa de e^z, mapea puntos en la dirección contraria a e^z, como se muestra en la figura 1.3.7. Debido a la naturaleza especial de las regiones en forma de banda en las figuras 1.3.2 y 1.3.7 (sobre ellas e^z es uno a uno) y debido a la periodicidad de e^z, estas regiones merecen un nombre. Ellas son usualmente llamadas *bandas de periodicidad* de e^z.

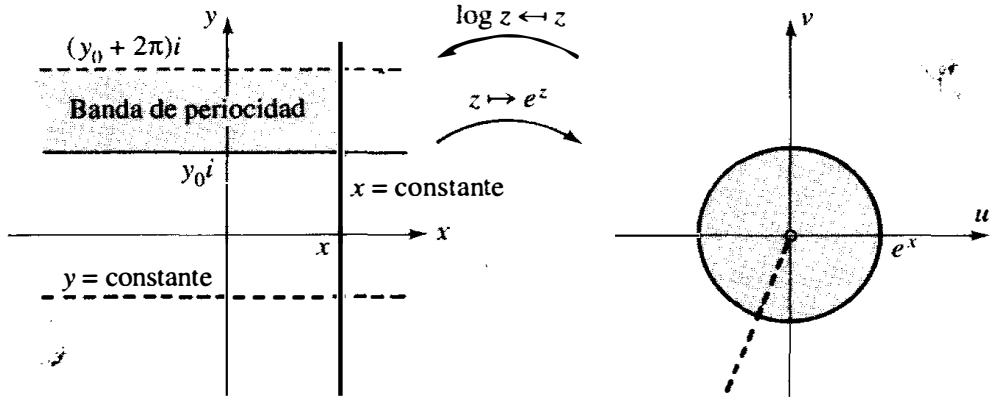


Figura 1.3.7. Geometría de e^z y $\log z$.

Ejemplos resueltos

1.3.13. *Encuentre las partes real e imaginaria de* exp e^z. (exp w *es otra forma de escribir* e^w.)

Solución. Sea $z = x + iy$; entonces $e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$. De este modo $\exp e^z = e^{e^x \cos y}[\cos(e^x \operatorname{sen} y) + i \operatorname{sen}(e^x \operatorname{sen} y)]$. En consecuencia, Re $(\exp e^z) = (e^{e^x \cos y}) \cos(e^x \operatorname{sen} y)$ e Im $(\exp e^z) = (e^{e^x \cos y}) \times (e^x \operatorname{sen} y)$.

1.3.14. *Demuestre que* sen (iy) = i senh y, *donde, por definición,*

$$\operatorname{senh} y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

Solución.

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = i\,\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i \operatorname{senh} y.$$

1.3.15. *Encuentre todos los valores de* i^i.

Solución.

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i[\log 1 + (i\pi/2) + (2\pi n)i]} = (e^{-2\pi n})e^{-\pi/2} = e^{-2\pi(n + 1/4)}$$

Todos los valores de i^i están dados por la última expresión conforme toma valores enteros, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

1.3.16. *Resuelva* $\cos z = \frac{1}{2}$.

Solución. Sabemos que $z_n = \pm(\pi/3 + 2\pi n)$, n entero, resuelven la ecuación $\cos z = \frac{1}{2}$, vamos a mostrar ahora que z_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$, son las *únicas* soluciones; esto es, no hay soluciones fuera del eje real. Hemos dado

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia $e^{2iz} - e^{iz} + 1 = 0$, así $e^{iz} = (1 \pm \sqrt{-3})/2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}i/2$. Por lo tanto $iz = \log(\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}i/2) = \pm \log(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i/2)$, ya que $\frac{1}{2} + \sqrt{3}i/2$ y $\frac{1}{2} - \sqrt{3}i/2$ son recíprocos uno del otro. Obtenemos así

$$z = \pm i \log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \pm i\left(\log 1 + \frac{\pi}{3} i + 2\pi n i\right) = \pm\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$$

1.3.17. *Considere la transformación*[2] $z \mapsto \operatorname{sen} z$. *Muestre que líneas paralelas al eje real son transformadas en elipses y que líneas paralelas al eje imaginario son transformadas en hipérbolas.*

Solución. Usando la proposición 1.3.4 (véase también el ejemplo 1.3.14), obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos(iy) + \operatorname{sen}(iy) \cos x \\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x \end{aligned}$$

[2] La palabra *mapping*, en el original, se tradujo indistintamente por *función, transformación* o *transformada*, excepto en algunos casos que se tradujo como *mapeo* para ajustarse al uso establecido en México. (N. del E.)

donde

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Suponga que $y = y_0$ es constante; entonces, si escribimos

$$\operatorname{sen} z = u + iv$$

tenemos

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 y_0} = 1$$

Puesto que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Ésta es una elipse.

Similarmente, si $x = x_0$ es constante, de la ecuación $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ obtenemos

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1$$

la cual es una hipérbola.

1.3.18. *Sea* $f(z) = z^2$ *y suponga* $f(z_0) = a + bi$. *Describa las curvas definidas implícitamente en el plano* xy *por las ecuaciones* Re $f(z) = a$ *e* Im $f(z) = b$. *Demuestre que estas curvas son perpendiculares una de la otra en el punto* z_0.

Solución. Si $z = x + iy$, entonces $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$. Las curvas deseadas son las hipérbolas $x^2 - y^2 = a$ y $xy = b/2$, las cuales están esbozadas en la figura 1.3.8 para el caso en que $a > 0$ y $b > 0$. Estas curvas son las curvas de nivel de las funciones $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Los vectores normales a ellas están dadas, del cálculo, por sus gradientes

$$\nabla u = (2x, -2y)$$

y

$$\nabla v = (2y, 2x)$$

En un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ sobre ambas curvas, su producto punto es $\nabla u \cdot \nabla v = 4x_0y_0 - 4y_0x_0 = 0$. Los vectores normales son entonces perpendiculares uno del otro en z_0 y de esta manera las curvas lo son también.

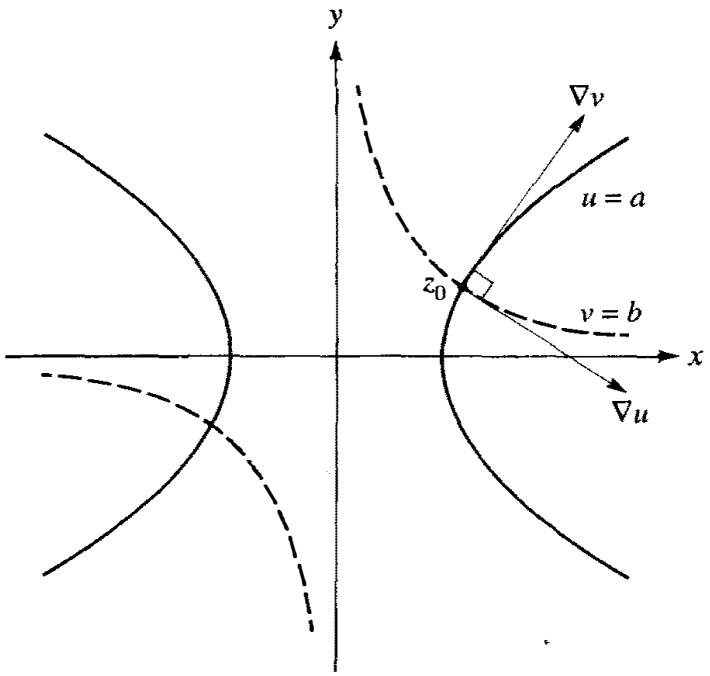


Figura 1.3.8. Los conjuntos de nivel de Re $f(z)$ e Im $f(z)$ para $f(z) = z^2$.

Ejercicios

1. Exprese en la forma $a + bi$:

a) e^{2+i} *b*) sen $(1 + i)$

2. Exprese en la forma $a + bi$:

a) e^{3-i} *b*) cos $(2 + 3i)$

3. Resuelva:

a) $\cos z = \frac{3}{4} + i/4$ *b*) $\cos z = 4$

4. Resuelva

a) $\operatorname{sen} z = \frac{3}{4} + i/4$ *b*) $\operatorname{sen} z = 4$

5. Encuentre todos los valores de:

a) log 1 *b*) log i

6. Encuentre todos los valores de:

a) log $(-i)$ *b*) log $(1 + i)$

7. Encuentre todos los valores de:

a) $(-i)^i$ *b*) $(1+i)^{1+i}$

8. Encuentre todos los valores de:

a) $(-1)^i$ *b*) 2^i

9. ¿Para qué valores de z se satisface $\overline{(e^{iz})} = e^{i\bar{z}}$?

10. Denótese por $\sqrt{\ }$ la raíz cuadrada particular definida por $\sqrt{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = r^{1/2}\,[\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2)]$, $0 \le \theta < 2\pi$; la otra raíz es $r^{1/2}\{\cos[(\theta+2\pi)/2] + i \operatorname{sen}[(\theta+2\pi)/2]\}$. ¿Para qué valores de z se cumple la ecuación $\sqrt{z^2} = z$?

11. ¿Sobre qué rayos a través del origen (un rayo está determinado por $\arg z$ = costante) existe $\lim_{z\to\infty} |e^z|$?

12. Pruebe que

$$z = \tan\left[\frac{1}{i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{1/2}\right]$$

13. Simplifique e^{z^2}, e^{iz}, y $e^{1/z}$ donde $z = x + iy$. Para $e^{1/z}$ especificamos que $z \neq 0$.

14. Examine el comportamiento de e^{x+iy} cuando $x \to \pm\infty$ y el comportamiento de e^{x+iy} cuando $y \to \pm\infty$.

15. Pruebe que $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, que $\cos(-z) = \cos z$, y que $\operatorname{sen}(\pi/2 - z) = \cos z$.

16. Defina senh y cosh sobre todo $\mathbf{C}$ como $\operatorname{senh} z = (e^z - e^{-z})/2$ y $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$. Pruebe que:

a) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$
b) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$
c) $\cosh(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$
d) $\operatorname{senh}(x+iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$
e) $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$

17. Use la ecuación $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x$, donde $z = x + iy$ para probar que $|\operatorname{senh} y| \le |\operatorname{sen} z| \le |\cosh y|$.

18. Si b es real, pruebe que $|a^b| = |a|^b$.

19. ¿Es cierto que $|a^b| = |a|^{|b|}$ para toda $a, b \in \mathbf{C}$?

20. *a*) Para los números complejos a, b, c, pruebe que $a^b a^c = a^{b+c}$, usando una rama fija del log.
b) Demuestre que $(ab)^c = a^c b^c$ si escogemos ramas tales que $\log(ab) = \log a + \log b$ (sin $2\pi ni$ extra).

21. Usando coordenadas polares, demuestre que $z \mapsto z + 1/z$ mapea el círculo $|z| = 1$ en el intervalo $[-2, 2]$ sobre el eje x.

22. *a*) ¿Sobre qué mapea la función $z \mapsto z^3$ al primer cuadrante?
b) Discuta la geometría de $z \mapsto \sqrt[3]{z}$ como fue hecho en el texto para $\sqrt{z}$.

23. La función $z \mapsto 1/z$ toma al exterior del círculo unitario en el interior (excluyendo al cero) y viceversa. ¿ En qué son transformadas las líneas $\arg z$ = constante?

24. ¿Cuál es la imagen de líneas horizontales y verticales bajo $z \mapsto \cos z$?

25. ¿Bajo qué condiciones se satisface que $\log a^b = b \log a$ para números complejos a, b? (Use la rama del log con $-\pi \leq \theta < \pi$).

26. *a*) Demuestre que bajo la función $z \mapsto z^2$, líneas paralelas al eje real son transformadas en parábolas.

b) Demuestre que bajo (una rama de) $z \mapsto \sqrt{z}$, líneas paralelas al eje real son transformadas en hipérbolas.

27. Demuestre que las n raíces n-ésimas de la unidad son $1, w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1}$, donde $w = e^{2\pi i/n}$.

28. Demuestre que las identidades trigonométricas pueden deducirse si se supone que $e^{i(x_1 + x_2)} = e^{ix_1} \cdot e^{ix_2}$.

29. Demuestre que $\operatorname{sen} z = 0$ si $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

30. Demuestre que el seno y el coseno son periódicas con periodo mínimo 2π, esto es, que

a) $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$ para toda z.

b) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ para toda z.

c) $\operatorname{sen}(z + \omega) = \operatorname{sen} z$ para toda z, implica que $\omega = 2\pi n$ para algún entero n.

d) $\cos(z + \omega) = \cos z$ para todo z implica que $\omega = 2\pi n$ para algún entero n.

31. Encuentre el máximo de $|\cos z|$ en el cuadrado $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi$.

32. Demuestre que el $\log z = 0$ si $z = 1$, usando la rama con $-\pi < \arg z \leq \pi$.

33. Calcule numéricamente, hasta dos cifras significativas, lo siguiente: $e^{3.2 + 6.1i}$, $\log(1.2 - 3.0i)$, $\operatorname{sen}(8.1i - 3.2)$.

34. Demuestre que $\operatorname{sen} z$ mapea la banda $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ sobre $\mathbf{C} \setminus \{ z \mid \operatorname{Im} z = 0 \text{ y } |\operatorname{Re} z| \geq 1 \}$.

35. Discuta la función inversa $\operatorname{sen}^{-1} z$, $\cos^{-1} z$. Por ejemplo, ¿es el $\operatorname{sen} z$ uno a uno en $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi$?

1.4. FUNCIONES CONTINUAS

En esta sección y en la siguiente, serán analizadas las nociones de continuidad y diferenciabilidad para funciones con valores complejos de una variable compleja. Los resultados son muy similares a aquellos aprendidos en el cálculo de funciones de variables reales. Estas secciones se dedicarán principalmente a la teoría básica. Esta teoría será aplicada a las funciones elementales en la sección 1.6.

Dado que $\mathbf{C}$ es $\mathbf{R}^2$ con la estructura adicional de la multiplicación compleja, varios conceptos geométricos pueden ser trasladados de $\mathbf{R}^2$ a la notación compleja. Esto ya ha sido hecho para el valor absoluto, $|z|$, el cual es igual a la norma o longitud de z considerado como un vector en $\mathbf{R}^2$. Más aún, muy pronto el estudiante será capaz de usar sus conocimientos del cálculo de funciones de dos variables en el estudio de funciones de una variable compleja.

Conjuntos abiertos

Primero es necesario poder disponer de la noción de un conjunto abierto. Un conjunto $A \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ es *abierto*, cuando para cada punto z_0 en A, existe un número

real $\varepsilon > 0$ tal que $z \in A$ siempre que $|z - z_0| < \varepsilon$ (véase figura 1.4.1). Note que el valor de ε depende de z_0, conforme z_0 se acerca a la "orilla" de A, ε se hace más pequeña. Intuitivamente, un conjunto es abierto si no contiene a ninguno de sus puntos "frontera" u "orilla".

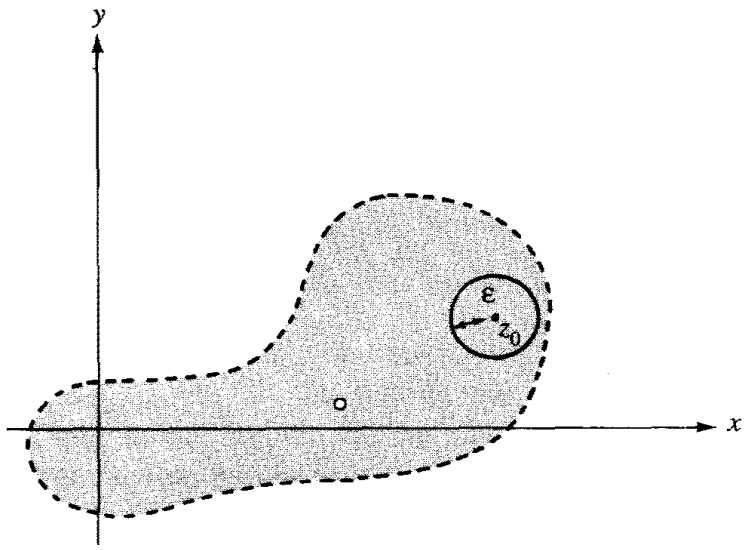
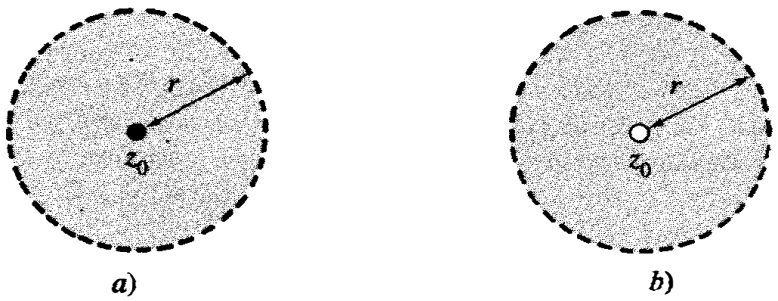


Figura 1.4.1. Un conjunto abierto.

Para un número $r > 0$, la *r-vecindad* o *r-disco* en torno a un punto z_0 en $\mathbf{C}$, se define como el conjunto $D(z_0; r) = \{ z \in \mathbf{C}$ tal que $|z - z_0| < r \}$. Como práctica, el estudiante debe probar que para cada $w_0 \in \mathbf{C}$ y $r > 0$, el disco $A = \{ z \in \mathbf{C}$ tal que $|z - w_0| < r \}$ es en sí mismo, abierto. Una *r-vecindad agujerada*, es una r-vecindad cuyo centro ha sido removido. Por lo que una vecindad agujerada tiene la forma $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$, la cual representa al conjunto $D(z_0; r)$ menos el conjunto con un solo elemento $\{z_0\}$ (véase figura 1.4.2). Una vecindad de un punto z_0 es, por definición, un conjunto abierto que contiene a z_0. Así podemos reformular la definición de "abierto" como sigue; un conjunto A es abierto, si para cada z_0 en A, existe una r-vecindad de z_0 totalmente contenida en A.

Las propiedades básicas de los conjuntos abiertos se recopilan en la proposición 1.4.1.



a) *b)*

Figura 1.4.2. Una vecindad (*a*) y una vecindad agujerada (*b*).

Proposición 1.4.1

(i) **C** *es abierto.*
(ii) *El conjunto vacío,* $\varnothing$, *es abierto.*
(iii) *La unión de cualquier colección de subconjuntos abiertos de* **C** *es abierta.*
(iv) *La intersección de cualquier colección finita de subconjuntos abiertos de* **C** *es abierta.*

Demostración. Las dos primeras afirmaciones son válidas casi por definición; la primera porque cualquier ε servirá para cualquier punto z_0 y la segunda porque no hay puntos para los que se requiera encontrar una ε. Al lector se le pide dar la demostración de las últimas dos afirmaciones en los ejercicios 19 y 20, al final de esta sección. ■

Funciones, límites y continuidad

Sea A un subconjunto de **C**. Recordemos que una función $f : A \to \mathbf{C}$ asigna un punto específico $f(z)$ en **C** a cada punto z en A. El conjunto A es llamado el *dominio* de f y decimos que f está *definida en A*. Cuando el dominio y el rango (el conjunto de valores que toma f) son ambos subconjuntos de **C**, como aquí, hablamos de f como una *función compleja de una variable compleja*. Alternativamente, podemos pensar a f como una función $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$; en tal caso f es llamada una función de dos variables reales con valores vectoriales. Para $f : A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, podemos escribir $z = x + iy = (x, y)$ y definir $u(x, y) = \text{Re } f(z)$ y $v(x, y) = \text{Im } f(z)$. Entonces u y v son simplemente las componentes si se piensa a f como una función vectorial. Por tanto, podemos escribir, de manera única, $f(x + iy) = u(x, y) + i(x, y)$, donde u y v son funciones reales definidas en A.

Enseguida vamos a transcribir la noción de límite a la notación de números complejos.

Definición 1.4.2. *Sea* f *definida en un conjunto que contiene alguna* r*-vecindad agujerada de* z_0. *La expresión*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a$$

significa que para cada $\varepsilon > 0$, *existe una* $\delta > 0$ *tal que* $z \in D(z_0; r)$, $z \neq z_0$, y $|z - z_0| < \delta$ *implica que* $|f(z) - a| < \varepsilon$.

La expresión en esta definición tiene el mismo significado intuitivo que el que tiene en cálculo, a saber, $f(z)$ está cerca de a cuando z está cerca de z_0. No es necesario definir f sobre *toda* la vecindad agujerada para tener una teoría de límites válida, pero se usan aquí las vecindades agujeradas por motivo de simplicidad y también porque tal tratamiento será más apropiado a lo largo del texto.

Exactamente como con los números reales y con las funciones de valores reales,

una función no puede tener más de un límite en un punto y los límites se comportan bien con respecto de las operaciones algebraicas.

Éste es el contenido de las siguientes dos proposiciones.

Proposición 1.4.3. *Los límites son únicos, si existen.*

Demostración, Suponga que $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$ y que $\lim_{z \to z_0} f(z) = b$ con $a \neq b$. Sea $2\varepsilon = |a - b|$, de modo que $\varepsilon > 0$. Existe una $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ implica que $|f(z) - a| < \varepsilon$ y $|f(z) - b| < \varepsilon$. Elíjase un punto tal que $z \neq z_0$ (puesto que f está definida en una vecindad agujerada de z_0). Entonces, por la desigualdad del triángulo, $|a - b| \leq |a - f(z)| + |f(z) - b| < 2\varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a = b$. ■

Proposición 1.4.4. *Si* $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$ *y* $\lim_{z \to z_0} g(z) = b$, *entonces*

(i) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = a + b.$

(ii) $\lim_{z \to z_0} [f(z)\, g(z)] = ab.$

(iii) $\lim_{z \to z_0} [f(z)/g(z)] = a/b$ *si* $b \neq 0.$

Demostración. Únicamente se probará aquí la afirmación (ii). La demostración de la afirmación (i) es fácil y la demostración de la afirmación (iii) es ligeramente más retadora, pero el lector puede obtener las claves necesarias a partir del correspondiente caso de variable real. Para probar la afirmación (ii), escribimos

$$|f(z)g(z) - ab| \leq |f(z)g(z) - f(z)b| + |f(z)b - ab| \quad \text{(desigualdad del triángulo)}$$

$$= |f(z)|\,|g(z) - b| + |f(z) - a|\,|b| \quad \text{(factorizando)}$$

Queremos estimar cada término. Para hacerlo, escojamos $\delta_1 > 0$ de modo que $0 < |z - z_0| < \delta_1$ implique que $|f(z) - a| < 1$ y, por lo tanto, $|f(z)| < |a| + 1$, ya que $|f(z)| - a| \geq |f(z)| - |a|$, por la proposición 1.2.5 (vi).

Dada $\varepsilon > 0$, podemos escoger $\delta_2 > 0$, tal que $0 < |z - z_0| < \delta_2$ implique que

$$|f(z) - a| < \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2|b|} & \text{si } b \neq 0 \\ 1 & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

y $\delta_3 > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta_3$, entonces

$$|g(z) - b| < \frac{\varepsilon}{2\,(|a| + 1)}$$

Sea δ la menor de $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Entonces, si $0 < |z - z_0| < \delta$,

$$|f(z)g(z) - ab| \leq |f(z)||g(z) - b| + |f(z) - a|\,|b|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}|f(z)| + \frac{\varepsilon}{2|b|}|b| \quad \text{(si } b \neq 0\text{; si } b = 0 \text{ reemplace el segundo término por 0)}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \blacksquare$$

Definición 1.4.5. *Sea* $A \subset \mathbf{C}$ *un conjunto abierto y sea* $f: A \to \mathbf{C}$ *una función. Decimos que* f *es continua en* $z_0 \in A$ *si y sólo si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

y que f *es* ***continua en*** A *si* f *es continua en cada punto* z_0 *en* A.

Esta definición tiene el mismo significado intuitivo que en cálculo elemental: Si z está cerca de z_0, entonces $f(z)$ está cerca de $f(z_0)$. De la proposición 1.4.4 podemos inmediatamente deducir que si f y g son continuas en A, entonces también lo son la suma $f + g$ y el producto fg, y también f/g si $g(z_0) \neq 0$, para todos los puntos z_0 en A. Es también verdadero que una composición de funciones continuas es continua.

Proposición 1.4.6

(i) *Si* $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$ *y* h *es una función definida en una vecindad de* a *y es continua en* a, *entonces* $\lim_{z \to z_0} h(f(z)) = h(a)$.

(ii) *Si* f *es una función continua en un conjunto abierto* A *en* **C** y h *es continua en* f(A), *entonces la función composición* $(h \circ f)(z) = h(f(z))$ *es continua en A.*

Demostración. Dada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta_1 > 0$ tal que $|h(w) - h(a)| < \varepsilon$ cuando $|w - a| < \delta_1$ y existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - a| < \delta_1$ cuando $0 < |z - z_0| < \delta$. Por tanto obtenemos $|h(f(z)) - h(a)| < \varepsilon$ cuando $0 < |z - z_0| < \delta$, lo cual establece (i). Una demostración de (ii) se sigue a partir de (i) y se pide en el ejercicio 22 al final de esta sección. ■

Sucesiones

El concepto de sucesiones convergentes de números complejos es análogo a aquel para sucesiones de números reales estudiado en cálculo. Una sucesión z_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, de puntos de **C** *converge a* z_0 si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $n \geq N$ implica $|z_n - z_0| < \varepsilon$. El límite de una sucesión se expresa como

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0 \quad \text{o} \quad z_n \to z_0$$

Los límites de sucesiones tienen las mismas propiedades (obtenidas por las mismas demostraciones) que los límites de funciones. Por ejemplo, el límite es único si éste existe; y si $z_n \to z_0$ y $w_n \to w_0$, entonces

(i) $z_n + w_n \to z_0 + w_0$
(ii) $z_n w_n \to z_0 w_0$

y

(iii) $z_n/w_n \to z_0/w_0$ (si w_0 y w_n no son 0)

También, $z_n \to z_0$ si Re $z_n \to$ Re z_0 e Im $z_n \to$ Im z_0. Una prueba de esto para funciones, se pide al final de la sección en el ejercicio 2.

Una sucesión z_n es llamada una *sucesión de Cauchy*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ cuando ambas, $n \geq N$ y $m \geq N$. Una propiedad básica de los números reales, la cual será aceptada sin demostración, es que toda sucesión de Cauchy en **R** converge. Más precisamente, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números reales entonces existe un número real x_0 tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Esto es equivalente a la *completez* del sistema de los números reales.[3] Del hecho de que $z_n \to z_0$ si Re $z_n \to$ Re z_0 e Im $z_n \to$ Im z_0, podemos concluir que

toda sucesión de Cauchy en **C** *converge.*

Éste es un punto técnico, pero es útil en las demostraciones de convergencia, como veremos en el capítulo 3.

Debe notarse que existe un vínculo entre sucesiones y continuidad, a saber, $f : A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es continua si para toda sucesión convergente $z_n \to z_0$ de puntos en A (esto es, $z_n \in A$ y $z_0 \in A$), tenemos $f(z_n) \to f(z_0)$. Se pide que el estudiante demuestre esto en el ejercicio 18 al final de esta sección.

Conjuntos cerrados

Se dice que un subconjunto F de **C** es *cerrado*, si su complemento, $\mathbf{C}\backslash F = \{z \in \mathbf{C} \mid z \notin F\}$ es abierto. Tomando complementos y usando la proposición 1.4.1, uno descubre las siguientes propiedades de los conjuntos cerrados.

Proposición 1.4.7

(i) *El conjunto vacío es cerrado.*
(ii) **C** *es cerrado.*
(iii) *La intersección de cualquier colección de subconjuntos cerrados de* **C** *es cerrada.*
(iv) *La unión de cualquier colección finita de subconjuntos cerrados de* **C** *es cerrada.*

[3] Ver, por ejemplo, J. Marsden, *Elementary Classical Analysis,* Nueva York, W.H. Freeman and Company, 1974.

Los conjuntos cerrados y abiertos son importantes por su relación con las funciones continuas y las sucesiones, y por otras construcciones que veremos después.

Proposición 1.4.8. *Un conjunto* $F \subset C$ *es cerrado si siempre que* $z^1, z^2, z^3, \ldots$ *es una sucesión de puntos en* F *tal que* $w = \lim_{n \to \infty} z_n$ *existe*, entonces $w \in F$.

Demostración. Suponga que F es cerrado y que z_n es una sucesión de puntos en F. Si $D(w; r)$ es cualquier disco alrededor de w, entonces, por la definición de convergencia, z_n está en $D(w; r)$ para n suficientemente grande. Así, $D(w; r)$ no puede estar contenida en el complemento de F. Ya que el complemento es abierto, w no debe estar en el complemento de F. Debe estar en F.

Si F no es cerrado, entonces el complemento no es abierto. En otras palabras, hay puntos w en $\mathbf{C}\backslash F$ tales que ninguna vecindad de w está contenida en $\mathbf{C}\backslash F$. En particular, podemos escoger puntos z_n en $F \cap D(w; 1/n)$; esto nos da una sucesión convergente de puntos en F cuyo límite no está en F. ■

Proposición 1.4.9. *Si* $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) f *es continua.*
(ii) *La imagen inversa de cualquier conjunto cerrado es cerrada.*
(iii) *La imagen inversa de cualquier conjunto abierto es abierta.*

Demostración. Para demostrar que (i) implica (ii), suponga que f es continua y que F es cerrado. Sea $z_1, z_2, z_3, \ldots$ una sucesión de puntos en $f^{-1}(F)$ y suponga que $z_n \to w$. Puesto que f es continua. $f(z_n) \to f(w)$. Pero los puntos $f(z_n)$ están en el conjunto cerrado F y, por tanto, $f(w)$ está también en F. Esto es, w está en $f^{-1}(F)$. La proposición 1.4.8 demuestra que $f^{-1}(F)$ es cerrado.

Para demostrar que (ii) implica (iii), sea U abierto. Entonces $F = \mathbf{C}\backslash U$ es cerrado. Si se cumple (ii), entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado. Por lo tanto $\mathbf{C}\backslash f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbf{C}\backslash F) = f^{-1}(U)$ es abierto.

Para demostrar que (iii) implica (i), fíjese z_0 y sea $\varepsilon > 0$. Entonces z_0 es un elemento del conjunto abierto $f^{-1}(D(f(z^0); \varepsilon))$. En consecuencia existe una $\delta > 0$ con $D(z_0; \delta) \subset f^{-1}(D(f(z_0); \varepsilon))$. Esto nos dice precisamente que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. Obtenemos así exactamente la desigualdad que se necesita para establecer la continuidad. ■

Para manejar la continuidad en un subconjunto de $\mathbf{C}$ es conveniente introducir la noción de conjuntos abiertos y cerrados relativos. Si $A \subset \mathbf{C}$, un subconjunto B de A es llamado *abierto relativo de* A si $B = A \cap U$ para algún conjunto abierto U. Se dice que es *cerrado relativo de* A si $B = A \cap F$ para algún conjunto cerrado F. Esto nos conduce a la siguiente proposición, cuya demostración se deja al lector.

Proposición 1.4.10. *Si* f: A → C, *las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) f *es continua.*

(ii) *La imagen inversa de todo conjunto cerrado es cerrado relativo de* A.
(iii) *La imagen inversa de todo conjunto abierto es abierto relativo de* A.

Conjuntos conexos

En esta subsección y en la siguiente, se estudiarán dos importantes clases de conjuntos los cuales ocupan, hasta cierto punto, el lugar en la teoría de la variable compleja, que el que ocupan los intervalos, y los intervalos cerrados acotados en la teoría de funciones de una variable real. Éstos son los conjuntos conexos y los conjuntos compactos.

Un *conjunto conexo* debe ser uno que "consista de una pieza". Esto puede enfocarse desde un punto de vista positivo: "Cualquier punto puede ser conectado a cualquier otro" o desde uno negativo: "El conjunto no puede separarse en dos partes." Esto nos conduce a dos posibles definiciones.

Definición 1.4.11. *Un conjunto* C en **C** *es* ***conexo por trayectorias*** *si para cada par de puntos* a, b *en* C *existe una función continua* γ: $[0, 1] \to \mathbf{C}$ *con* $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. *Decimos que* γ *es una trayectoria que une* a *y* b.

Con frecuencia uno puede decir fácilmente si un conjunto es conexo por trayectorias, como en el caso que se muestra en la figura 1.4.3. El punto de vista negativo sugiere una definición ligeramente distinta.

Definición 1.4.12. *Un conjunto* $C \subset \mathbf{C}$ ***no es conexo*** *si hay conjuntos abiertos* U y V tales que

(i) $C \subset U \cup V$
(ii) $C \subset U \neq \varnothing$ y $C \cap V \neq \varnothing$
(iii) $(C \cap U) \cap (C \cap V) = \varnothing$

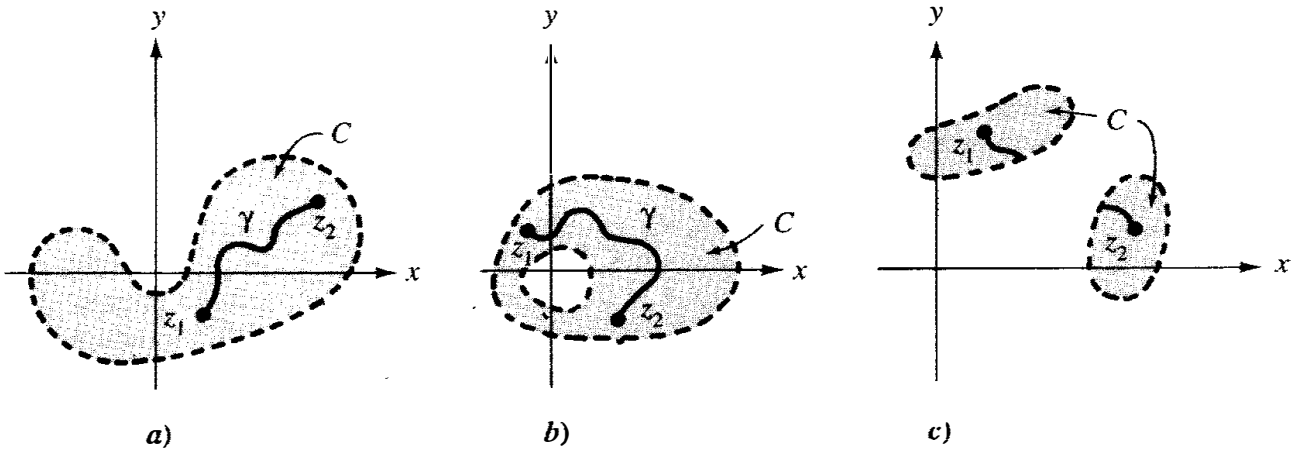


Figura 1.4.3. Conexidad. *a)* y *b)* son regiones conexas; *c)* no es conexa.

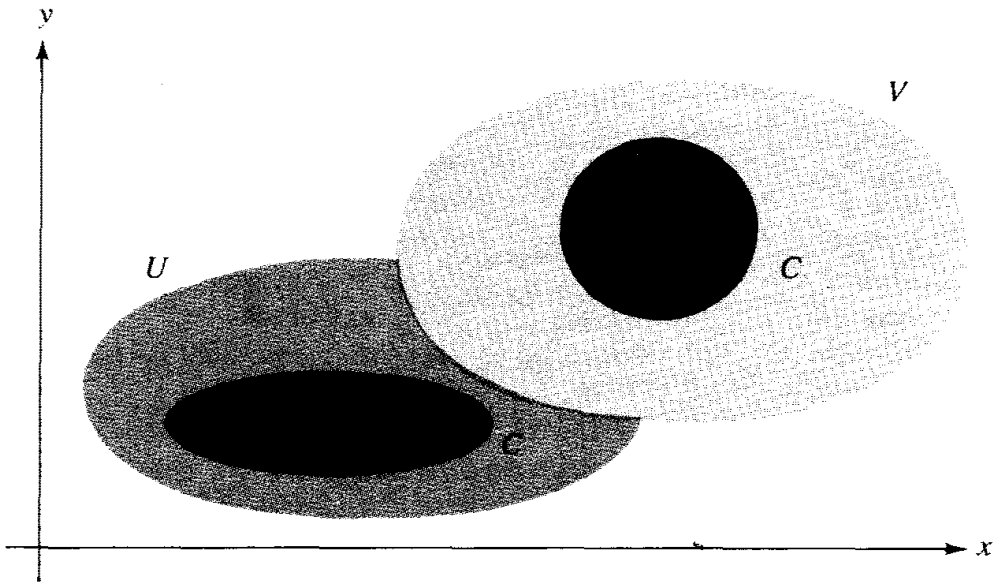


Figura 1.4.4. El conjunto C no es conexo.

La noción de conjuntos abiertos y cerrados relativos nos permite reformular esto en términos de subconjuntos de C. Dado que la intersección de C con U es igual a la intersección de C con el complemento de V, el conjunto $C \cap U$ es tanto abierto como cerrado relativo de C, y también lo es $C \cap V$. Esto prueba el siguiente resultado.

Proposición 1.4.13. *Un conjunto* C *es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de* C *que son tanto abiertos como cerrados relativos a* C, *son el vacío y el propio conjunto* C.

Las dos siguientes proposiciones dan la relación entre las dos definiciones. Las dos nociones no son en general equivalentes, pero sí lo son para conjuntos abiertos. La prueba de esta última afirmación (dada más abajo en la proposición 1.4.15) ilustra un modo bastante típico de usar la noción de conectividad. Uno prueba que cierta propiedad es válida en todo C mostrando que el conjunto donde es válida es no vacío y que es tanto abierto relativo como cerrado relativo.

Proposición 1.4.14. *Un conjunto conexo por trayectorias es conexo.*

Demostración. Supóngase que C es un conjunto conexo por trayectorias y que D es un conjunto no vacío que es a un mismo tiempo abierto y cerrado relativo de C. Si $C \neq D$, existe un punto z_1 en D y un punto z_2 en $C \backslash D$. Sea γ: $[a, b] \to C$ una trayectoria continua que une a z_1 con z_2. Sea $B = \gamma^{-1}(D)$, entonces B es un subconjunto del intervalo $[a, b]$ el cual es tanto abierto como cerrado relativo de $[a, b]$, puesto que γ es continua. (Véase proposición 1.4.10.) Ya que a está en B, B es no vacío y $[a, b] \backslash B$ es no vacío pues contiene a b.

Este argumento muestra que es suficiente probar el teorema para el caso de un intervalo $[a, b]$. Necesitamos, entonces, establecer el siguiente lema:

Los intervalos de la recta real son conexos.

Una demostración requiere del uso de la propiedad del supremo (o de alguna otra caracterización del hecho de que el sistema de los números reales es completo). Sea $x = \sup B$ (esto es, el supremo de B). Nos encontramos con que x está en B ya que B es cerrado. Pero B es abierto y por ende existe una vecindad en torno a x contenida en B (recuerde que $x \neq b$ pues b está en $[a, b]\backslash B$). Esto significa que para alguna $\varepsilon > 0$, el punto $x + \varepsilon$ está en B. Así que x no puede ser el supremo. Esta contradicción muestra que B no puede existir. ■

Un conjunto conexo no es necesariamente conexo por trayectorias, [4] pero si es abierto, entonces sí lo es. De hecho, aun más es cierto.

Proposición 1.4.15. *Si* C *es un conjunto abierto conexo y* a y b *están en* C, *entonces existe una trayectoria diferenciable* γ: $[0, 1] \to \mathbf{C}$ *con* $\gamma(0) = a$ *y* $\gamma(1) = b$.

Demostración. Tómese a en C. Si z_0 está en C, puesto que C es abierto, existe una $\varepsilon > 0$ tal que el disco $D(z_0; \varepsilon)$ está contenido en C. Al combinar una trayectoria de a a z_0 con una de z_0 a z, el cual está en el disco, vemos que z_0 puede conectarse con a por una trayectoria diferenciable si y sólo si lo mismo es cierto para cualquier punto z en $D(z_0; \varepsilon)$. Esto muestra que ambos conjuntos

$$A = \{z \in \mathbf{C} \mid z \text{ no puede conectarse a } a \text{ por una trayectoria diferenciable}\}$$

y

$$B = \{z \in \mathbf{C} \mid z \text{ no puede conectarse a } a\}$$

son abiertos. Puesto que C es conexo, uno de los conjuntos A o B debe ser vacío. Obviamente lo es B. Veáse figura 1.4.5. ■

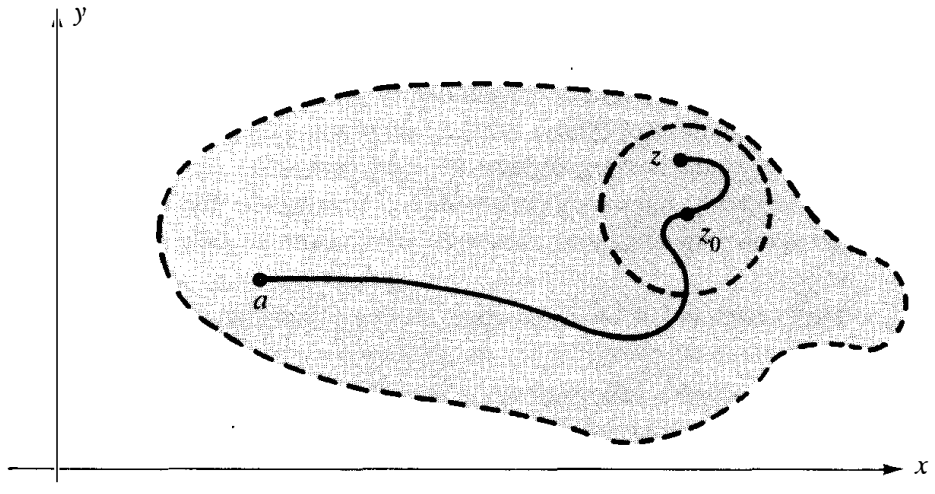


Figura 1.4.5. Un conjunto abierto conexo es conexo por trayectorias.

[4] Un ejemplo usual está dado al hacer C la unión de la gráfica $y = \operatorname{sen} 1/x$, donde $x > 0$, y el segmento de línea $-1 \leq y \leq 1, x = 0$. Este conjunto es conexo pero no por trayectorias.

Debido a la importancia de los conjuntos abiertos y conexos, éstos se designan frecuentemente mediante un término especial. Aun cuando su uso no es completamente estándar en la bibliografía, las palabras *región* y *dominio* se usan frecuentemente. En este texto, estos términos serán usados como sinónimos de un subconjunto abierto y conexo de **C**. El lector debe tener cuidado y debe checar el significado de estas palabras cuando las encuentre en otros textos.

La noción de conjuntos conexos será usada por nosotros en varias ocasiones. Una observación es que una función continua no puede separar un conjunto conexo.

Proposición 1.4.16. *Si* f *es una función continua definida en un conjunto conexo* C, *entonces el conjunto imagen* f(C) *también es conexo.*

Demostración. Si U y V son conjuntos abiertos que desconectan a $f(C)$, entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos que desconectan a C. ■

Tenga cuidado, esta proposición trabaja en la dirección opuesta a aquella acerca de conjuntos abiertos y cerrados. Para funciones continuas, la imagen inversa de conjuntos abiertos es abierta y la imagen inversa de conjuntos cerrados es cerrada. Pero es para las imágenes directas para las que se garantiza la conectividad y *no* para las imágenes inversas de conjuntos conexos. (Podría pensar en algún ejemplo.) La misma situación se presentará con la clase de conjuntos estudiados en la siguiente subsección, los conjuntos compactos.

Conjuntos compactos

La siguiente clase de conjuntos especiales que queremos introducir es la de los conjuntos compactos. Éstos resultarán ser aquellos subconjuntos K de **C** que son acotados en el sentido que existe un número M tal que $|z| \leq M$ para toda z en K y que son cerrados. Una de las agradables propiedades de estos subconjuntos es que toda sucesión de puntos en el conjunto, debe tener una subsucesión la cual converja a algún punto en el conjunto. Por ejemplo, la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \ldots$ de puntos en $]0, 1[$ tiene la subsucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, la cual converge al punto 0, que no está en el intervalo abierto $]0, 1[$, pero está en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Nótese que en la propiedad pretendida, no se asegura que la sucesión misma converja. Todo lo que se pretende es que algunas subsucesiones lo hagan; el ejemplo demuestra que esto es necesario.

Como sucede frecuentemente en matemáticas, el estudio consiste de tres partes:

(i) Una caracterización fácilmente reconocible: cerrado y acotado.
(ii) Una propiedad que queremos: la existencia de subsucesiones convergentes.
(iii) Una definición técnica, útil en demostraciones y problemas.

En el caso en cuestión, la definición técnica involucra la relación entre compacidad y conjuntos abiertos. Una colección de conjuntos abiertos U_α para α en algún conjunto de índices $\mathcal{A}$ es llamada una *cubierta* (o una *cubierta abierta*) de un

conjunto K, si K está contenida en su unión: $K \subset \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Por ejemplo, la colección de todos los discos abiertos de radio 2 es una cubierta abierta de $\mathbf{C}$:

$$U_z = D(z; 2) \qquad C \subset \cup_{z \in \mathbf{C}} D(z; 2)$$

Podría ser, como aquí, que el proceso de recubrimiento haya sido excesivo, al usar más conjuntos de los necesarios. En ese caso, podríamos usar sólo algunos de los conjuntos y hablar de una *subcubierta*, por ejemplo, $\mathbf{C} \subset \cup_{n,\, m \in \mathbf{Z}} D(n + mi; 2)$, donde $\mathbf{Z}$ denota al conjunto de enteros.

Definición 1.4.17. *Un conjunto* K *es* ***compacto*** *si toda cubierta abierta de* K *tiene una subcubierta finita.*

Esto es, si U_α es cualquier colección de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K, entonces existe una subcolección finita $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_k}$ tal que $K \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$.

Proposición 1.4.18. *Las siguientes condiciones son equivalentes* para *un subconjunto* K *de* $\mathbf{C}$ (*o de* $\mathbf{R}$):

(i) K *es cerrado y acotado.*
(ii) *Toda sucesión de puntos en* K *tiene una subsucesión que converge a algún punto en* K.
(iii) K *es compacto.*

Esta proposición requiere un estudio más profundo de las propiedades de completez de los números complejos del que es necesario para llegar hasta aquí, por lo que se omite la demostración. Ésta puede encontrarse en la mayoría de los textos de cálculo avanzado o análisis (tal como *Elementary Classical Analysis*, de J. Marsden, Nueva York, W.H. Freeman and Co., 1974). Es fácil ver porque (i) es necesaria para (ii) y (iii). Si K no es acotado, podemos escoger z_1 en K y sucesivamente elegir z_2 con $|z_2| > |z_1| + 1$ y, en general, z_n con $|z_n| > |z_{n-1}| + 1$. Esto da una sucesión que no contiene una subsucesión convergente. Los discos abiertos $D(0; n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ serían una cubierta abierta sin ninguna subcubierta finita.

Si K es un conjunto en $\mathbf{C}$ que no es cerrado, entonces existe un punto w en $\mathbf{C} \backslash K$ y una sucesión $z_1, z_2, \ldots$ de puntos en K que converge a w. Puesto que la sucesión converge, w es el único posible límite de una subsucesión, por lo tanto, ninguna subsucesión puede converger a un punto de K. Los conjuntos $\{z$ tal que $|z - w| > 1/n\}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ forman una cubierta abierta de K sin ninguna subcubierta.

La utilidad de la definición técnica 1.4.17 se ilustra en los siguientes resultados.

Proposición 1.4.19. *Si* K *es un conjunto compacto y f es una función continua definida en* K, *entonces el conjunto imagen* f(K) *también es compacto.*

Demostración. Si U_α es una cubierta abierta de $f(K)$, entonces $f^{-1}(U_\alpha)$ forma una cubierta abierta de K. La selección de una subcubierta finita nos da.

$$K \subset f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\alpha_k})$$

por lo tanto $f(K) \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$. ■

1.4.20. Teorema del valor extremo. *Si* K *es un conjunto compacto y* f : K → **R** *es continua, entonces* f *alcanza sus valores máximo y mínimo, y ambos son finitos.*

Demostración. La imagen $f(K)$ es un compacto, por ende cerrado y acotado. Puesto que es acotado, los números $M = \sup\{f(z) \mid z \in K\}$ y $m = \inf\{f(z) \mid z \in K\}$ son finitos. Ya que $f(K)$ es cerrado, m y M están incluidos en $f(K)$. ■

Otra ilustración del uso de la compacidad está dada por el siguiente lema, el cual establece que la distancia de un conjunto compacto a un conjunto cerrado es positiva. Esto es, debe haber un espacio entre los dos conjuntos.

Lema de la distancia. 1.4.21. *Suponga que* K *es compacto,* C *es cerrado y* $K \cap C = \varnothing$. *Entonces, la distancia* d(K, C) *de* K *a* C *es mayor que* 0. *Esto es, existe un número* $\rho > 0$ *tal que* $|z - w| > \rho$ *siempre y cuando* z *esté en* k *y* w *esté en* C.

Demostración. El complemento de C, $U = \mathbf{C} \backslash C$, es un abierto, y $K \subset U$, por lo que cada punto z en K es el centro de algún disco $D(z; \rho(z)) \subset U$. La familia de discos más pequeños $D(z; \rho(z)/2)$ también cubre a K y, por la compacidad, existe una colección finita de ellos, que denotamos por $D_k = D(z_k; \rho(z_k)/2)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, N$, que cubre a K (véase figura 1.4.6). Sean $\rho_k = \rho(z_k)/2$ y $\rho = \min(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$. Si z está en K y w está en C, entonces z está en D_k para alguna k, y por ende $|z - z_k| < \rho_k$. Pero $|w - z_k| > \rho(z_k) = 2\rho_k$. Así que $|z - w| > \rho_k > \rho$. ■

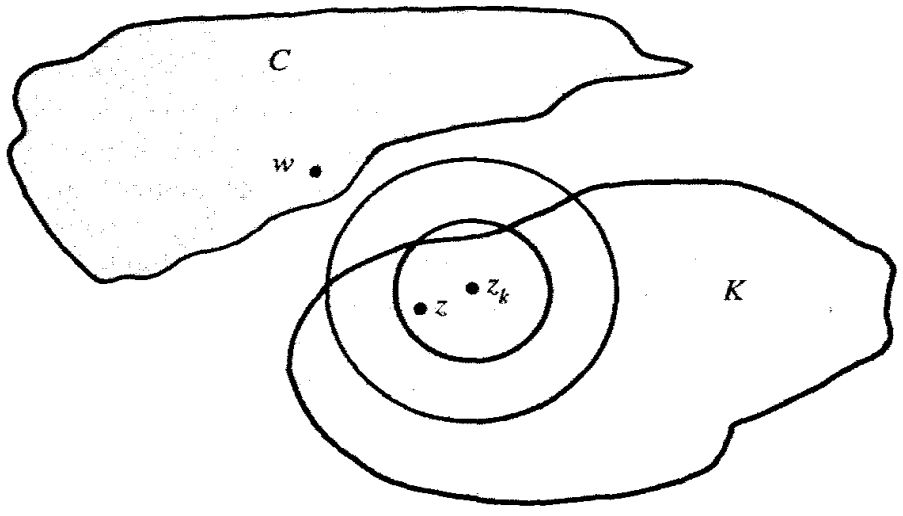


Figura 1.4.6. La distancia entre un conjunto cerrado C y un conjunto compacto K es mayor que cero.

Continuidad uniforme

Recuérdese que una función se dice que es continua en un conjunto K si es continua en cada punto de K. Éste es un ejemplo de lo que se llama una *propiedad local*. Ésta se define en términos del comportamiento de una función en o cerca de cada punto, y puede determinarse para cada punto mirando solamente cerca de éste y no al conjunto en su totalidad. Esto está en contraste con las *propiedades globales* de una función, las cuales dependen del comportamiento en todo el conjunto.

Un ejemplo de una propiedad global es el de ser acotada. Decir que una función f es acotada por algún número M en un conjunto K, es una afirmación que depende de la totalidad del conjunto. Si la función es continua es, ciertamente, acotada cerca de cada punto, pero esto no diría automáticamente que es acotada en todo el conjunto. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ es continua en el intervalo abierto $]0, 1[$, pero ciertamente allí no es acotada. Hemos visto que si f es continua en un conjunto compacto K, entonces es acotada en K y que, en efecto, las cotas son alcanzadas. Así la compacidad de K nos permite llevar la propiedad local de ser acotada cerca de cada punto, dada por la continuidad, a todo el conjunto. Con frecuencia, la compacidad puede ser usada para llevar una propiedad local a una global. La siguiente es una versión global de la continuidad.

Definición 1.4.22. *Una función* $f: A \to \mathbf{C}$ (o $\mathbf{R}$) *es* ***uniformemente continua*** *en* A, *si para cualquier elección de* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ *siempre que* s *y* t *estén en* A *y* $|s - t| < \delta$.

Nótese que la diferencia entre ésta y la definición ordinaria de continuidad, es que ahora la elección de δ puede hacerse de modo que la misma δ trabaje en cualquier parte del conjunto A. Obviamente, las funciones uniformemente continuas son continuas. En un compacto, lo opuesto también es verdad.

Proposición 1.4.23. *Una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.*

Demostración. Supóngase que f es una función continua en el conjunto compacto K y sea $\varepsilon > 0$. Para cada apunto t en K, existe un número $\delta(t)$ tal que $|f(s) - f(t)| < \varepsilon/2$ siempre que $|s - t| < \delta$. Los conjuntos abiertos $D(t; \delta(t)/2)$ cubren a K y, por compacidad, existe un número finito de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_N$ tales que los conjuntos $D_k = D(t_k; \delta(t_k)/2)$ cubren a K. Sea $\delta_k = \delta(t_k)/2$ y sea δ igual al mínimo de $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$. Si $|s - t| < \delta$, entonces t está en D_k para alguna k y, en consecuencia, $|t - t_k| < \delta_k$. Así, $|f(t) - f(t_k)| < \varepsilon/2$. Pero también

$$\begin{aligned} |s - t_k| &= |s - t + t - t_k| \\ &\leq |s - t| + |t - t_k| \\ &\leq \delta + \delta_k \\ &\leq \delta(t_k) \end{aligned}$$

y así $|f(s)-f(t_k)| \leq \varepsilon/2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(s)-f(t)| &= |f(s)-f(t_k)+f(t_k)-f(t)| \\ &\leq |f(s)-f(t_k)+|f(t_k)-f(t)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Hemos producido una sola δ que trabaja en todas partes de K y, por lo tanto, f es uniformemente continua. ■

Lema de la cubierta de una trayectoria

La noción de continuidad uniforme es muy poderosa y no será de utilidad varias veces, la usaremos primero en conjunción con el lema de la distancia y algunas propiedades de los conjuntos compactos, para establecer un útil lema geométrico acerca de curvas en subconjuntos abiertos del plano complejo. Este lema será útil en el texto posteriormente, en particular para estudiar integrales a lo largo de tales curvas. Éste nos dice que una curva puede ser cubierta con un número finito de discos cuyos centros están a lo largo de la curva, de tal manera que cada disco está contenido en el conjunto abierto y cada disco contiene tanto el centro del disco anterior como el del siguiente, a lo largo de la curva (véase figura 1.4.7).

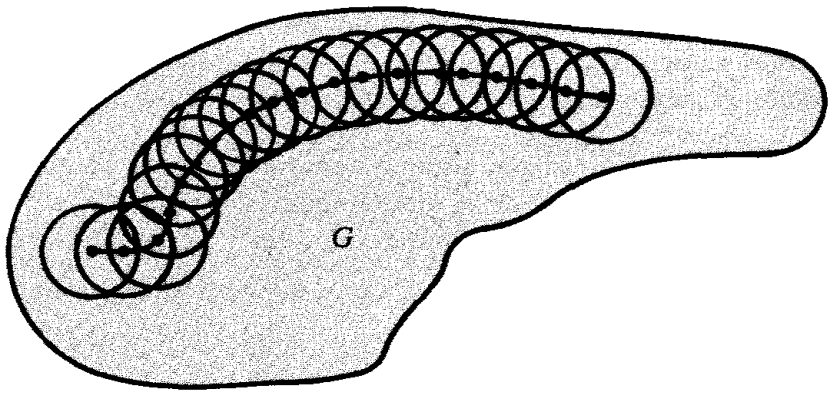


Figura 1.4.7. Una trayectoria continua en un conjunto abierto puede ser cubierta por un número finito de discos que se traslapen adecuadamente.

Lema de la cubierta de una trayectoria. 1.4.24. *Supóngase que* γ: [a, b] $\to$ G *es una trayectoria continua del intervalo* [a, b] *en el subconjunto abierto* G *de* **C**. *Entonces existe un número* $\rho > 0$ *y una subdivisión del intervalo* $a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b$ *tal que*

(i)	$D(\gamma(t_k); \rho) \subset G$	para toda k
(ii)	$\gamma(t) \in D(\gamma(t_0); \rho)$	para $t_0 \leq t \leq t_1$
(iii)	$\gamma(t) \in D(\gamma(t_k); \rho)$	para $t_{k-1} \leq t \leq t_{k+1}$
(iv)	$\gamma(t) \in D(\gamma(t_n); \rho)$	para $t_{n-1} \leq t \leq t_n$

Demostración. Dado que γ es continua y el intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto, la curva imagen $K = \gamma([a, b])$ es compacta. Del lema de la distancia 1.4.21, existe un número ρ tal que cada punto de la curva está a una distancia de al menos ρ del complemento de G. En consecuencia, $D(\gamma(t); \rho) \subset G$ para todo t en $[a, b]$. Ya que γ es continua en el conjunto compacto $[a, b]$, es uniformemente continua y existe un número $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \rho$ siempre y cuando $|s - t| < \delta$. Así, si la subdivisión se toma lo suficientemente fina de modo que $t_k - t_{k-1} < \delta$ para toda $k = 1, 2, 3, \ldots, N$, entonces las conclusiones del teorema se satisfacen. ■

La esfera de Riemann y el "punto al infinito"

Para ciertos propósitos es conveniente introducir un punto "∞" además de los puntos $z \in \mathbf{C}$. Uno debe ser cauteloso al hacerlo, pues esto puede llevar a confusión y abuso del símbolo ∞, pero con cuidado esto puede ser útil y, ciertamente, queremos ser capaces de hablar inteligiblemente sobre límites infinitos y límites al infinito.

En contraste con la recta real, en la cual $+\infty$ y $-\infty$ pueden ser agregados, tenemos sólo un ∞ para $\mathbf{C}$. La razón de esto es que $\mathbf{C}$ no tiene un orden natural, como el que tiene $\mathbf{R}$. Formalmente, agregamos el símbolo "∞" a $\mathbf{C}$ para obtener el *plano complejo extendido*, $\overline{\mathbf{C}}$, y definimos las operaciones con ∞ mediante las "reglas"

$$\begin{aligned} z + \infty &= \infty \\ z \cdot \infty &= \infty \qquad \text{siempre que } z \neq 0 \\ \infty + \infty &= \infty \\ \infty \cdot \infty &= \infty \\ \frac{z}{\infty} &= 0 \end{aligned}$$

para $z \in \mathbf{C}$. Nótese que algunas cosas no están definidas: ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, y así sucesivamente, son *formas indeterminadas* por la misma razón, esencialmente, que lo son en el cálculo de números reales. También definimos apropiadamente conceptos de límite:

$\lim_{z \to \infty} f(z) = z_0$ significa: Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $|f(z) - z_0| < \varepsilon$ siempre que $|z| \geq R$.

$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ significa: Para cualquier $R > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > R$ siempre que $|z - z_0| < \delta$.

y para sucesiones:

$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$ significa: Para cualquier $R > 0$, existe una $N > 0$ tal que $|z_n| > R$ siempre que $n \geq N$.

Así un punto $z \in \mathbf{C}$ está "cerca de ∞" cuando está situado en el exterior de un círculo grande. Este tipo de cercanía puede ilustrarse geométricamente por medio de la *esfera de Riemann*, mostrada en la figura 1.4.8. Por el método de *proyección esterográfica* ilustrado en esta figura, un punto z' sobre la esfera es asociado con cada punto z en $\mathbf{C}$. Se ha omitido exactamente un punto sobre la esfera $\mathbf{S}$ —el polo

"norte"—. Asignamos ∞ en $\overline{\mathbf{C}}$ al polo norte de **S**. Geométricamente vemos que z está cerca de ∞ si y sólo si los puntos correspondientes sobre la esfera de Riemann están cerca en el sentido usual de cercanía en $\mathbf{R}^3$. La demostración de esto se pide en el ejercicio 24.

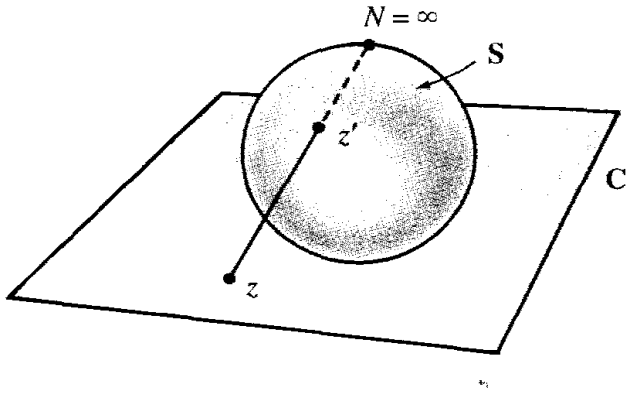


Figura 1.4.8. La esfera de Riemann.

La esfera de Riemann **S** representa una ilustración geométrica conveniente del plano extendido $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. La esfera destaca un hecho acerca del plano extendido el cual es algunas veces útil en la teoría subsecuente. Puesto que **S** es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbf{R}^3$, es compacto. Por lo tanto, toda sucesión en él tiene una subsucesión convergente. Puesto que la proyección estereográfica hace que la convergencia en **S** coincida con la convergencia de la sucesión de puntos correspondientes en $\overline{\mathbf{C}}$, lo mismo es cierto allí. Esto es, $\overline{\mathbf{C}}$ es compacto. Toda sucesión de puntos en $\overline{\mathbf{C}}$ debe tener una subsucesión convergente en $\overline{\mathbf{C}}$. *Cuidado*: Ya que la convergencia se da en el plano extendido, el límite podría ser ∞, en cuyo caso podríamos decir normalmente que el límite no existe. Básicamente, hemos añadido el punto al infinito como otro límite disponible, de forma tal, que sucesiones que formalmente no tenían un límite, ahora lo tengan. La esfera puede usarse para ayudar a visualizar así como para hacer precisas algunas nociones acerca del desarrollo de funciones "al infinito" que nos encontraremos en capítulos posteriores.

Ejemplos resueltos

1.4.25. *¿Dónde es continua la función*

$$f(z) \quad \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1} \quad ?$$

Solución. Puesto que las sumas, productos y cocientes de funciones continuas son continuas, excepto donde el denominador es 0, esta función es continua sobre todo el plano excepto en las raíces cúbicas de -1. Esto es, sobre $\mathbf{C} \setminus \{e^{\pi i/3}, e^{5\pi i/3}, -1\}$.

1.4.26. *Demuestre que* $\{z|\,\mathrm{Re}\ z > 0\}$ *es abierto.*

Solución. Una demostración puede basarse en las siguientes propiedades de los números complejos (véase ejercicio 1): Si $w \in \mathbf{C}$, entonces

(i) $|\mathrm{Re}\ w| \leq |w|$

(ii) $|\mathrm{Im}\ w| \leq |w|$

(iii) $|w| \leq |\mathrm{Re}\ w| + |\mathrm{Im}\ w|$

Sea $U = \{z|\mathrm{Re}\ z > 0\}$ y sea z_0 en U. Suponga que z está en el disco $D(z_0, \mathrm{Re}\ z_0)$. Entonces $|\mathrm{Re}\ z - \mathrm{Re}\ z_0| = |\mathrm{Re}\ (z - z_0)| \leq |z - z_0| < \mathrm{Re}\ z_0$ y, por lo tanto, $\mathrm{Re}\ z > 0$ y z está en U. Así $D(z_0; \mathrm{Re}\ z_0)$ es una vecindad de z_0 que está contenida en U. Puesto que esto puede hacerse para cualquier punto z_0 que esté en U, el conjunto U es abierto. Véase figura 1.4.9.

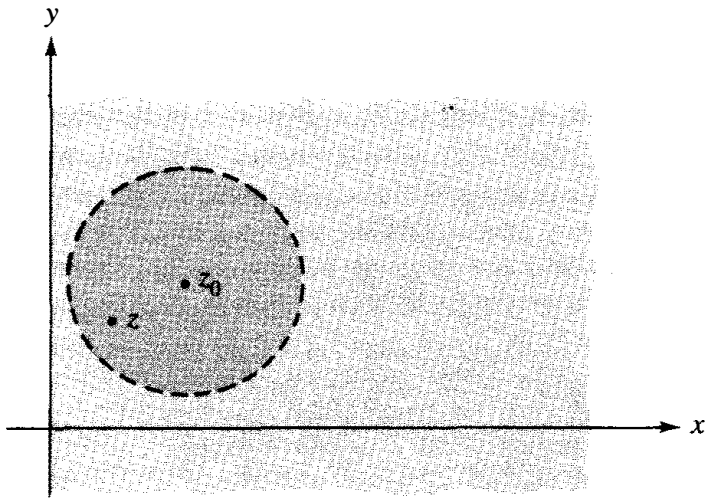


Figura 1.4.9. El semiplano derecho abierto.

1.4.27. *Demuestre la siguiente afirmación: Sea* $A \subset \mathbf{C}$ *abierto y* $z_0 \in A$. *y suponga que* $D_r = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq r\} \subset A$. *Entonces, existe un número* $\rho > r$ *tal que* $D(z_0; \rho) \subset A$.

Solución. Sabemos del teorema del valor extremo (1.4.20), que una función continua de valores reales en un conjunto cerrado y acotado de $\mathbf{C}$, alcanza su máximo y su mínimo en algún punto del conjunto. Para z en D_r sea $f(z) = \inf\{|z - w| \text{ tal que } w \in \mathbf{C}\backslash A\}$. (Aquí "inf" significa la más grande de las cotas inferiores.) En otras palabras, $f(z)$ es la distancia de z al complemento de A. Puesto que A es abierto, $f(z) > 0$ para toda z en D_r. Podemos también verificar que f es continua. De este modo, f alcanza su mínimo en algún punto z_1 en D_r. Tome $\rho = f(z_1) + r$, y cheque que esta ρ tiene las propiedades deseadas. Véase figura. 1.4.10.

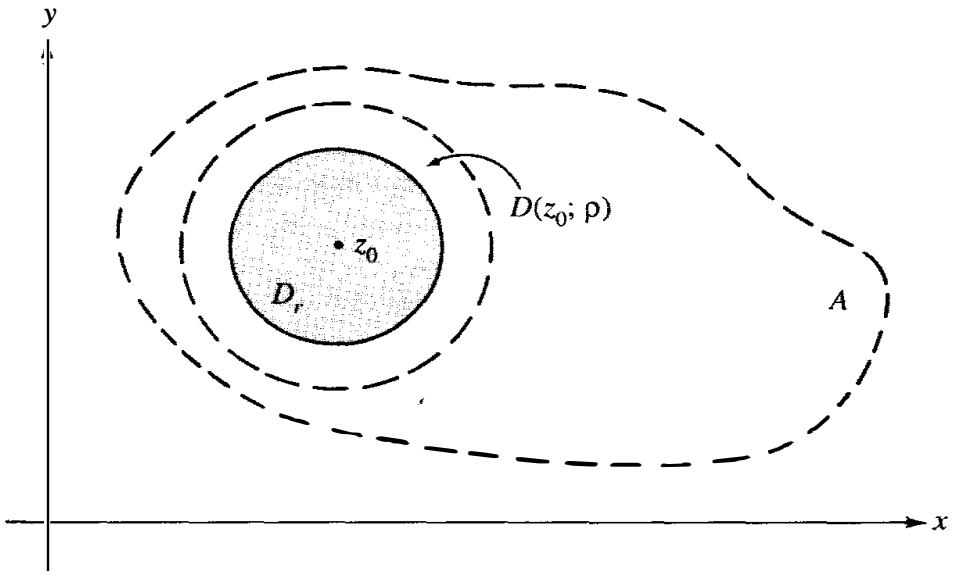


Figura 1.4.10. Un disco cerrado en un conjunto abierto puede ser agrandado.

1.4.28. Encuentre

$$\lim_{z \to \infty} \frac{3z^4 + 2z^2 - z + 1}{z^4 + 1}$$

Solución.

$$\lim_{z \to \infty} \frac{3z^4 + 2z^2 - z + 1}{z^4 + 1} = \lim_{z \to \infty} \frac{3 + 2z^{-2} - z^{-3} + z^{-4}}{1 + z^{-4}} = 3$$

usando $\lim_{z \to \infty} z^{-1} = 0$ y las propiedades básicas de límites.

Ejercicios

1. Demuestre que si $w \in \mathbf{C}$, entonces

a) $|\text{Re } w| \leq |w|$ *b*) $|\text{Im } w| \leq |w|$ *c*) $|w| \leq |\text{Re } w| + |\text{Im } w|$

2. *a*) Demuestre que $|\text{Re } z_1 - \text{Re } z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |\text{Re } z_1 - \text{Re } z_2| + |\text{Im } z_1 - \text{Im } z_2|$ para cualesquiera dos números complejos z_1 y z_2.

b) Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, demuestre que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y)$$

existe si ambos límites en el lado derecho de la ecuación existen. Recíprocamente, si el límite de la izquierda existe, demuestre que ambos límites de la derecha también existen y que la igualdad se cumple. Demuestre que $f(z)$ es continua si u y v lo son.

3. Demuestre: Si f es continua y $f(z_0) \neq 0$, existe una vecindad de z_0 en la cual f es $\neq 0$.

4. Si $z_0 \in \mathbf{C}$, demuestre que el conjunto $\{z_0\}$ es cerrado.

5. Demuestre: El complemento de un número finito de puntos es un conjunto abierto.

6. Use el hecho de que una función es continua si y sólo si la imagen inversa de todo conjunto abierto es abierta, para demostrar que una composición de dos funciones continuas es continua.

7. Muestre que $f(z) = \bar{z}$ es continua.

8. Muestre que $f(z) = |z|$ es continua.

9. ¿Cuál es el conjunto más grande sobre el cual la función $f(z) = 1/(1 - e^z)$ es continua?

10. Demuestre o dé un ejemplo si es falso: Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$, h está definida en los puntos $f(z)$, y $\lim_{w \to a} h(w) = c$, entonces $\lim_{z \to z_0} h(f(z)) = c$. [*Sugerencia*: Podríamos tener $h(a) \neq c$].

11. ¿Para qué valores de z converge la sucesión $z_n = nz^n$?

12. Defina $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ haciendo $f(0) = 0$ y $f(r[\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta]) = \operatorname{sen}\theta$ si $r > 0$. Muestre que f es discontinua en 0 pero es continua en cualquier otro lugar.

13. Para cada uno de los siguientes conjuntos, establezca (i) si es o no es abierto y (ii) si es o no es cerrado

a) $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ *b*) $\{z \mid 0 < |z| \leq 1\}$ *c*) $\{z \mid 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\}$

14. Para cada uno de los siguientes conjuntos, establezca (i) si es o no es abierto y (ii) si es o no es cerrado.

a) $\{z \mid \operatorname{Im} z > 2\}$ *b*) $\{z \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ *c*) $\{z \mid -1 < \operatorname{Re} z \leq 2\}$

15. Para cada uno de los siguientes conjuntos, establezca (i) si es o no es conexo y (ii) si es o no es compacto.

a) $\{z \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$ *b*) $\{z \text{ tal que } |z| \leq 3 \text{ y } |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$

c) $\{z \text{ tal que } |\operatorname{Re} z| \leq 1\}$ *d*) $\{z \text{ tal que } |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$

16. Para cada uno de los siguientes conjuntos establezca (i) si es o no es conexo y (ii) si es o no es compacto.

a) $\{z \mid 1 < \operatorname{Re} z \leq 2\}$ *b*) $\{z \mid 2 \leq |z| \leq 3\}$

c) $\{z \text{ tal que } |z| \leq 5 \text{ y } |\operatorname{Im} z| \geq 1\}$

17. Si $A \subset \mathbf{C}$ y $f; \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, muestre que $\mathbf{C} \backslash f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbf{C} \backslash A)$.

18. Muestre que $f: A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es continua si y sólo si $z_n \to z_0$ en A implica que $f(z_n) \to f(z_0)$.

19. Muestre que la unión de cualquier colección de subconjuntos abiertos de $\mathbf{C}$ es abierta.

20. Muestre que la intersección de cualquier colección finita de subconjuntos abiertos de $\mathbf{C}$ es abierta.

21. Dé un ejemplo para mostrar que la afirmación en el ejercicio 20 es falsa si se omite la palabra "finita".

22. Demuestre la parte (ii) de la proposición 1.4.6. usando la parte (i).

23. Muestre que si $|z| > 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} (z^n/n) = \infty$.

24. Introduzca la *métrica cordal* ρ en $\overline{\mathbf{C}}$ haciendo $\rho(z_1, z_2) = d(z_1', z_2')$ donde z_1' y z_2' son los puntos correspondientes en la esfera de Riemann y d es la distancia usual entre puntos de $\mathbf{R}^3$.

a) Muestre que $z_n \to z$ en $\mathbf{C}$ si y sólo si $\rho(z_n, z) \to 0$.

b) Muestre que $z_n \to \infty$ si y sólo si $\rho(z_n, \infty) \to 0$.

c) Si $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ y $ad - bc \neq 0$, muestre que f es continua en ∞.

1.5. FUNCIONES ANALÍTICAS

Aun cuando la continuidad es un concepto importante, su importancia en el análisis complejo es ensombrecido por el concepto de derivada compleja. Existen varios enfoques de la teoría de diferenciación compleja. Empezaremos por definir la *derivada* como el límite del cociente de diferencias, exactamente como se hace en el cálculo de variables reales. Varias de las propiedades de las derivadas y, en particular, de las reglas para calcularlas, se siguen de las propiedades de límite, justo como se hace en el cálculo de funciones de variables reales. Sin embargo, existen algunos resultados sorprendentes y hermosos exclusivos de la teoría compleja.

Se emplean varias palabras diferentes para describir a las funciones que son diferenciables en el sentido complejo; por ejemplo, "regular", "holomorfa" y "analítica". Nosotros usaremos el término "analítica", la misma palabra que se usa en el cálculo para describir a las funciones cuya serie de Taylor converge al valor de la función. Un elegante resultado del análisis complejo justifica la elección de este lenguaje. En efecto, veremos en el capítulo 3 que, como una drástica distinción con el caso de una sola variable real, la suposición de que una función es diferenciable en el sentido de la variable compleja, garantiza la validez de la expansión de Taylor de dicha función.

Diferenciabilidad

Definición 1.5.1. *Sea* $f : A \to \mathbf{C}$, *donde* $A \subset \mathbf{C}$ *es un conjunto abierto. Entonces se dice que* f *es* ***diferenciable*** (***en el sentido complejo***) en $z_0 \in A$ *si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Este límite se denota por $f'(z_0)$, *o algunas veces por* $df/dz(z_0)$. Así $f'(z_0)$ *es un número complejo. Se dice que* f *es* analítica *en* A *si* f *es compleja-diferenciable en cada* $z_0 \in A$. *La palabra* ***"holomorfa"****, la cual es usada algunas veces, es sinónimo de la palabra* analítica. *La frase* **analítica en** z_0 *significa* analítica *en una vecindad de* z_0.

Nótese que

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

está indefinida en $z_0 = z$ y ésta es la razón por la que se usaron vecindades agujeradas en la definición de límite.

Se previene al estudiante que aun cuando la definición de la derivada $f'(z_0)$ es similar a la de la derivada usual de una función de una variable real y aun cuando varias de sus propiedades son semejantes, el caso complejo es mucho más rico. Nótese también que en la definición de $f'(z_0)$, dividimos por el número complejo $z - z_0$ y la naturaleza especial de la división de números complejos es una consideración clave. El límite cuando $z \to z_0$ se toma para una z arbitraria que se aproxima a z_0 y no a lo largo de alguna dirección particular.

La existencia de f' implica mucho acerca de f. Se probará en la sección 2.4. que si f' existe, entonces todas las derivadas de f existen (esto es, f'', la derivada [compleja] de f' existe y así sucesivamente). Esto está en marcado contraste con el caso de una función $g(x)$ de la variable real x, en el cual $g'(x)$ puede existir sin la existencia de $g''(x)$.

El análisis de las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann, en el teorema 1.5.8, mostrará cómo la derivada compleja de f se relaciona con las usuales derivadas parciales de f como una función de las variables reales (x, y), y proporcionará un criterio útil para determinar la existencia de $f'(z_0)$. Como en el cálculo elemental, la continuidad de f no implica la diferenciabilidad; por ejemplo, $f(z) = |z|$ es continua pero no es diferenciable (véase el ejercicio 10 al final de esta sección). Sin embargo, como en el cálculo de una variable, una función diferenciable debe ser continua:

Proposición 1.5.2. *Si* $f'(z_0)$ *existe, entonces* f *es continua en* z_0.

Demostración. Por la regla de suma para límites, sólo necesitamos mostrar que

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = 0$$

Pero

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} (z - z_0) \right]$$

lo cual, por la regla del producto para límites, es igual a $f'(z_0) \cdot 0 = 0$. ■

Las reglas usuales del cálculo —la regla del producto, la regla del cociente, la regla de la cadena y la regla de la función inversa— pueden emplearse cuando se diferencien funciones analíticas. Ahora expondremos estas reglas en detalle.

Proposición 1.5.3. *Suponga que* f *y* g *son analíticas en* A, *donde* A $\subset$ **C** *es un conjunto abierto. Entonces*

(i) af + bg *es* analítica *en* A *y* $(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z)$ *para cualesquiera números complejos* a *y* b.

(ii) fg *es analítica en* A *y* $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(iii) *Si* $g(z) \neq 0$ *para toda* $z \in A$, *entonces* f/g *es analítica en* A *y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}$$

(iv) *Cualquier polinomio* $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *es analítico en todo* **C** *con derivada* $a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1}$.

(v) *Cualquier función racional*

$$\frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

es analítica en el conjunto abierto consistente de toda z *excepto aquellos puntos* (*a lo más*, m) *donde el denominador es cero.* (*Véase ejercicio de repaso 24 para el capítulo* 1.)

Demostración. Las pruebas de (i), (ii) y (iii) son similares a las demostraciones de los resultados correspondientes encontrados en el cálculo. El procedimiento puede ilustrarse con la demostración de (ii). Al aplicar los teoremas de límites y el hecho de que $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ (proposición 1.5.2.), obtenemos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)g(z) - f(z)g(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)\, g(z_0)}{z - z_0} \right]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left[f(z) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] + \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z_0) \right]$$

$$= f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$$

Para probar (iv) debemos primero mostrar que $f' = 0$ si f es constante. Esto es inmediato de la definición de derivada porque $f(z) - f(z_0) = 0$. Es igualmente sencillo mostrar que $dz/dz = 1$. Entonces, usando (ii), podemos probar que

$$\frac{d}{dz} z^2 = 1 \cdot z + z \cdot 1 = 2z$$

y

$$\frac{d}{dz} z^3 = \frac{d}{dz}(z \cdot z^2) = 1 \cdot z^2 + z \cdot 2z = 3z^2$$

En general, vemos por inducción que $dz^n/dz = nz^{n-1}$. Entonces (iv) se sigue de esto y de (i) y (v) se sigue de (iv) y de (iii). ■

Por ejemplo.

$$\frac{d}{dz}(z^2 + 8z - 2) = 2z + 8$$

y

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right) = -\frac{1}{(z+1)^2}$$

El estudiante también recordará que una de las reglas más importantes para la diferenciación es la regla de la cadena o la regla de la "función de una función". Para ilustrar,

$$\frac{d}{dz}(z^3 + 1)^{10} = 10(z^3 + 1)^9 \cdot 3z^2$$

$$= 30\, z^2(z^3 + 1)^9$$

Este procedimiento para diferenciar debe ser familiar y se justifica con el siguiente resultado.

Regla de la cadena. 1.5.4. *Sean* $f: A \to \mathbf{C}$ y $g: B \to \mathbf{C}$ *analíticas* (A, B *son conjuntos abiertos*) *y asuma que* $f(A) \subset B$. *Entonces* $g \circ f(z) = g(f(z))$ *es analítica y*

$$\frac{d}{dz} g \circ f(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

La idea básica de la demostración de este teorema es que si $w = f(z)$ y $w_0 = f(z_0)$, entonces

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y si hacemos que $z \to z_0$, también tenemos que $w \to w_0$ y el lado derecho de la ecuación precedente resulta ser $g'(w_0)f'(z_0)$. El problema es que aun si $z \neq z_0$, podríamos tener $w = w_0$. Debido a esta posibilidad, damos una demostración más cuidadosa. (Aun cuando aquí la regla de la cadena puede deducirse de la regla de la cadena para la derivada usual de funciones de varias variables —véase la demostración de 1.5.8.—, una demostración independiente es instructiva.)

Demostración. Sea $w_0 = f(z_0)$ y defínase, para $w \in B$,

$$h(w) = \begin{cases} \dfrac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & w \neq w_0 \\ 0 & w = w_0 \end{cases}$$

Dado que $g'(w_0)$ existe, h es continua. Como la composición de funciones continuas es continua.

$$\lim_{z \to z_0} h(f(z)) = h(w_0) = 0$$

De la definición de h y haciendo $w = f(z)$, obtenemos que $g \circ f(z) - g(w_0) = [h(f(z)) + g'(w_0)]\,[f(z) - w_0]$. Nótese que esto se satisface aun si $f(z) = w_0$. Para $z \neq z_0$, obtenemos

$$\frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} = [h(f(z)) + g'(w_0)] \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Como $z \to z_0$, el lado derecho de la ecuación converge a $[0 + g'(w_0)] \cdot [f'(z_0)]$, así que el teorema queda demostrado. ■

Un argumento similar a éste, muestra que si $\gamma :]a, b[\to \mathbf{C}$ es diferenciable, podemos diferenciar la curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ y obtener $\sigma'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Aquí $\gamma'(t)$ es la derivada de γ como una función $]a, b[\to \mathbf{R}^2$, esto es, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, entonces $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t) + iy'(t)$.

Esta última versión de la regla de la cadena nos permite desarrollar una versión compleja del teorema de cálculo que establece que una función cuya derivada es idénticamente 0, debe ser constante. El resultado ilustra la importancia de las *regiones*, o conjuntos abiertos y conexos, en los cuales podemos, de acuerdo con la proposición 1.4.15, conectar cualesquiera dos puntos distintos mediante una trayectoria diferenciable.

Proposición 1.5.5. *Sea* A $\subset$ **C** *abierto y conexo y sea* f: A $\to$ **C** *analítica. Si* f'(z) = 0 *en* A, *entonces* f *es constante en* A.

Demostración. Sean $z_1, z_2, \in A$. Queremos mostrar que $f(z_1) = f(z_2)$. Sea $\gamma(t)$ una trayectoria que une z_1 con z_2. Por la regla de la cadena, $df(\gamma(t))/dt = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, ya que $f' = 0$. De este modo, si $f = u + iv$, tenemos que $du(\gamma(t))/dt = 0$ y $dv(\gamma(t))/dt = 0$. Del cálculo, sabemos que esto implica que $u(\gamma(t))$ y $v(\gamma(t))$ son funciones constantes de t. Si comparamos los valores en $t = a$ y $t = b$ nos da que $f(z_1) = f(z_2)$. ■

Claramente, se necesita la conexidad puesto que si A consiste de dos piezas disjuntas, podríamos hacer $f = 1$ en una de las piezas y $f = 0$ en la otra. Entonces $f'(z)$ sería igual a 0, pero f no sería constante en A.

Mapeos conformes

La existencia de la derivada compleja f' da lugar a severas, pero muy útiles, restricciones sobre f. La primera de estas restricciones será aquí discutida brevemente. Otra restricción se mencionará cuando se analicen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el teorema 1.5.8.

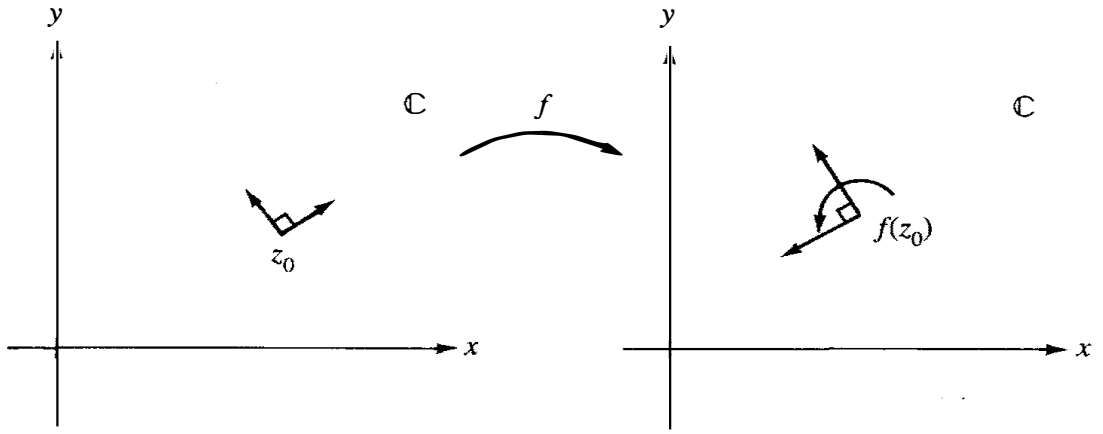


Figura 1.5.1. Un mapeo conforme en z_0.

Se mostrará que "infinitesimalmente" cerca de un punto z_0 en el cual $f'(z_0) \neq 0$, f es una rotación por $\arg f'(z_0)$ y una amplificación por $|f'(z_0)|$. El término "infinitesimalmente" se define más precisamente después, pero intuitivamente esto significa que localmente f es aproximadamente una rotación junto con una amplificación (véase figura 1.5.1). Si $f'(z_0) = 0$, la estructura de f es más complicada. (Este punto será estudiado más adelante, en el capitulo 6.)

Definición 1.5.6. *Un mapeo* $f : A \to \mathbf{C}$ *es llamado* ***conforme en*** z_0 *si existe una* $\theta \in [0, 2\pi[$ *y una* $r > 0$ *tal que para cualquier curva* $\gamma(t)$ *que es diferenciable en* $t = 0$, *para la cual* $\gamma(t) \in A$ *y* $\gamma(0) = z_0$, *y que satisface* $\gamma'(0) \neq 0$, *la curva* $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ *es diferenciable en* $t = 0$ *y, haciendo* $u = \sigma'(0)$ *y* $v = \gamma'(0)$, *tenemos que* $|u| = r|v|$ *y* $\arg u = \arg v + \theta \pmod{2\pi}$.

En este texto, un mapeo será llamado ***conforme*** *cuando es conforme en todo punto.*

Así, un mapeo conforme meramente rota y alarga vectores tangentes a curvas. Éste es el significado preciso de "infinitesimal" como se usó previamente. Debe notarse que un mapeo conforme *preserva ángulos* entre curvas que se intersectan. (Por definición, el ángulo entre dos curvas es el ángulo entre sus vectores tangentes; véase figura 1.5.2.)

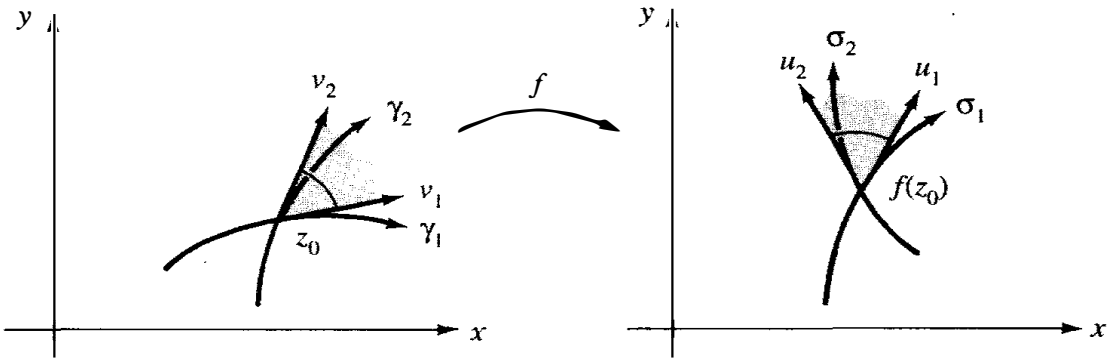


Figura 1.5.2. Preservación de ángulos por un mapeo conforme.

Teorema del mapeo conforme 1.5.7. *Si* $f : A \to \mathbf{C}$ *es* analítica *y si* $f'(z_0) \neq 0$, *entonces* f *es conforme en* z_0 *con* $\theta = \arg f'(z_0)$ *y* $r = |f'(z_0)|$, *verificando la definición 1.5.6.*

La demostración de este teorema es notablemente simple:

Demostración. Usando la notación precedente y la regla de la cadena, obtenemos $u = \sigma'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0) = f'(z_0) \cdot v$. Así, $\arg u = \arg f'(z_0) + \arg v \pmod{2\pi}$ y $|u| = |f'(z_0)| \cdot |v|$, como se pedía. ■

El punto en esta demostración es que el vector tangente v a cualquier curva se multiplica por un número complejo fijo, a saber, $f'(z_0)$ sin importar en qué dirección está apuntando v. Esto se debe a que, en la definición de $f'(z_0)$, $\lim_{z \to z_0}$ se "toma en todas las posibles direcciones" cuando $z \to z_0$.

Ecuaciones de Cauchy– Riemann

Recordemos que si $f : A \subset \mathbf{C} = \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ y si $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la *matriz jacobiana* de f se define como la matriz de las derivadas parciales dada por

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

en cada punto (x, y). Vamos a relacionar estas derivadas parciales con la derivada compleja. Desde el punto de vista de las variables reales, se dice que f es *diferenciable* con derivada la matriz $Df(x_0, y_0)$ en (x_0, y_0) si para toda $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|x_0, y_0| - (x, y)| < \delta$ implica

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0)[(x, y) - (x_0, y_0)]| \leq \varepsilon |(x, y) - (x_0, y_0)|$$

donde $Df(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)]$ significa la matriz $Df(x_0, y_0)$ aplicada al vector (columna)

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

y $|w|$ representa la longitud de un vector w.

Si f es diferenciable, entonces las parciales usuales $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ existen y $Df(x_0, y_0)$ está dada por la matriz jacobiana. La expresión $Df(x_0, y_0)\,[w]$ representa la derivada de f en la dirección w. Si las parciales existen y son continuas, entonces f es diferenciable. Generalmente, entonces, la diferenciabilidad es un

poco más fuerte que la existencia de las parciales individuales. (Las demostraciones de las afirmaciones precedentes no están incluidas aquí pero pueden encontrarse en cualquier texto de cálculo avanzado, tal como *Elementary Classical Analysis*, de J. Marsden, Nueva York, W.H. Freeman and Co., 1974 cap. 6. El principal resultado que relaciona las derivadas parciales y la analiticidad se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema de Cauchy-Riemann 1.5.8. *Sea* $f : A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *una función dada, con* A *un conjunto abierto. Entonces* $f'(z_0)$ *existe si y sólo si* f *es diferenciable en el sentido de las variables reales y en* $(x_0, y_0) = z_0$, u *y* v *satisfacen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(*llamadas las* ***ecuaciones de Cauchy-Riemann***).

Así si $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, y $\partial v/\partial y$ *existen, son continuas en* A *y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces* f *es analítica en* A.

Si $f'(z_0)$ existe, entonces

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Demostración. Vamos primero a demostrar que si $f'(z_0)$ existe, entonces u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

vamos a tomar el caso especial en el que $z = x + iy$. Entonces

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Conforme $x \to x_0$, el lado izquierdo de la ecuación converge al límite $f'(z_0)$. Entonces tanto la parte real como la imaginaria del lado derecho deben converger a un límite (véase el ejercicio 2 de la sección 1.4). De la definición de derivadas parciales, este límite es $(\partial u/\partial x)(x_0, y_0) + i(\partial v/\partial x)(x_0, y_0)$. Así $f'(z_0) = \partial u/\partial x + i\,\partial v/\partial x$ evaluadas en (x_0, y_0). Enseguida hágase $z = x_0 + iy$. De modo similar tenemos que

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i(y-y_0)}$$

$$= \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y-y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y-y_0}$$

Cuando $y \to y_0$, obtenemos

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

De este modo, puesto que $f'(z_0)$ existe y tiene el mismo valor sin importar cómo z se aproxima a z_0, obtenemos

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Al comparar las partes real e imaginaria de estas ecuaciones, deducimos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, así como las dos fórmulas para $f'(z_0)$.■

Otro argumento para esta dirección de la demostración y uno para la implicación contraria, puede basarse en la representación matricial desarrollada en el ejercicio 10 de la sección. 1.1:

Lema 1.5.9. *Una matriz*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

representa, bajo la multiplicación de matrices, la multiplicación por un número complejo si a = d *y* b = – c. *El número complejo en cuestión es* a + ic = d – ib.

Demostración. Primero, vamos a considerar la multiplicación por el número complejo $a + ic$. Ésta manda $x + iy$ a $(a + ic)(x + iy) = ax - cy + i(ay + cx)$, que es lo mismo que

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - cy \\ cx + ay \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, supongamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = z \cdot (x + iy)$$

para un número complejo $z = \alpha + i\beta$. Entonces obtenemos

$$ax + by = \alpha x - \beta y$$

y

$$cx + dy = \alpha y + \beta x$$

para toda x, y. Esto implica (haciendo $x = 1$, $y = 0$ y luego $x = 0$, $y = 1$) que $a = \alpha$, $b = -\beta$, $c = \beta$, y $d = \alpha$, por lo tanto la demostración está completa. ▼

Podemos ahora completar la demostración del teorema 1.5.8.

De la definición de f', la afirmación de que $f'(z_0)$ existe es equivalente a la siguiente afirmación: Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ implica

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

Primero vamos a suponer que $f'(z_0)$ existe. Por definición, $Df(x_0, y_0)$ es la única matriz con la propiedad que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que, haciendo $z = (x, y)$ y $z_0 = (x_0, y_0)$, $0 < |z - z_0| < \delta$ implica

$$|f(z) - f(z_0) - Df(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

Si comparamos esta ecuación con la precedente y uno recuerda que la multiplicación por un número complejo es una transformación lineal, concluimos que f es diferenciable en el sentido de las variables reales y que la matriz $Df(z_0)$ representa la multiplicación por el número complejo $f'(z_0)$. Así, al aplicar el lema a la matriz

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

con $a = \partial u/\partial x$, $b = \partial u/\partial y$, $c = \partial v/\partial x$, $d = \partial v/\partial y$, tenemos $a = d$, $b = -c$, las cuales son las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Recíprocamente, si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $Df(z_0)$ representa la multiplicación por un número complejo (por el lema) y entonces, como arriba, la definición de diferenciabilidad en el sentido de variables reales se reduce a la de la derivada compleja.

La fórmula para $f'(z_0)$ se sigue de la última afirmación del lema. ■

Podemos también expresar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en términos de coordenadas polares, pero debe hacerse con cuidado, puesto que el cambio de coordenadas polares definido por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arg(x + iy)$ es un cambio diferenciable sólo si se restringe θ al intervalo *abierto* $]0, 2\pi[$ o a cualquier otro intervalo abierto de longitud 2π y si se omite el origen ($r = 0$). Sin tal restricción, θ es discontinua porque salta 2π al cruzar el eje x. Si usamos $\partial x/\partial r = \cos\theta$, $\partial y/\partial r = \operatorname{sen}\theta$, vemos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann son equivalentes a decir que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

en una región contenida en otra región tal como aquella mostrada en la figura 1.5.3. Aquí estamos empleando un usual abuso de notación al escribir $u(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \text{ sen } \theta)$. (Para un enunciado más preciso, véase el ejercicio 12 al final de esta sección.)

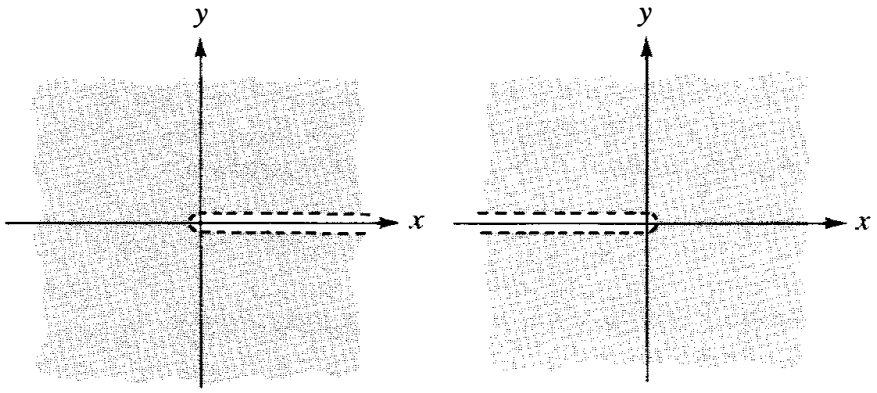


Figura 1.5.3. Dos regiones de validez de las coordenadas polares.

Funciones inversas

Un teorema básico del análisis real es el teorema de la función inversa: *Una función continuamente diferenciable es uno a uno y sobre en un conjunto abierto y tiene una inversa diferenciable en alguna vecindad de un punto donde el determinante jacobiano de la matriz derivada no es* 0. Daremos aquí una demostración de la contraparte compleja de este resultado, la cual supone que la derivada f' es continua y depende del correspondiente teorema para funciones de variables reales. Después de que hayamos probado el teorema de Cauchy en el capítulo 2, veremos que la continuidad de f' es automática y en el capítulo 6 probaremos el teorema de otra manera que no depende del teorema de variable real. La demostración dada aquí, de cualquier modo, ilustra la relación entre variables reales y complejas, y la relevancia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema de la función inversa 1.5.10 *Sea* $f : A \to \mathbf{C}$ *analítica (con* f' *continua) y suponga que* $f'(z_0) \neq 0$. *Entonces existe una vecindad* U *de* z_0 *y una vecindad* V *de* $f(z_0)$ *tal que* $f : U \to V$ *es una biyección (esto es, es uno a uno y sobre) y su función inversa* f^{-1} *es analítica con su derivada dada por*

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \textit{donde } w = f(z)$$

Se previene al estudiante que la aplicación del teorema de la función inversa permite a uno únicamente concluir la existencia de una inversa *local* para f. Por ejemplo, vamos a considerar $f(z) = z^2$ definida en $A = \mathbf{C}\backslash\{0\}$. Entonces $f'(z) = 2z \neq 0$

en cada punto de A. El teorema de la función inversa dice que f tiene una inversa analítica local, que es, en efecto, simplemente alguna rama de la función raíz cuadrada. Pero f no es uno a uno en todo A, ya que, por ejemplo, $f(1) = f(-1)$. Así f será uno a uno únicamente dentro de una vecindad suficientemente pequeña alrededor de cada punto.

Para demostrar este teorema, recordemos el enunciado para variables reales en dos dimensiones:

Teorema de la función inversa para funciones de variable real. *Si* $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *es continuamente diferenciable y* $Df(x_0, y_0)$ *tiene determinante diferente de cero, entonces existen vecindades* U *de* (x_0, y_0) *y* V *de* $f(x_0, y_0)$ *tales que* $f : U \to V$ *es una biyección,* $f^{-1}: V \to U$ *es diferenciable, y*

$$Df^{-1}(f(x, y)) = [Df(x, y)]^{-1}$$

(*ésta es la inversa de la matriz de las parciales*).

La demostración de este teorema puede encontrarse en textos de cálculo avanzado. Véase, por ejemplo, *Elementary Classical Analysis* de J. Marsden (Nueva York: W.H. Freeman and Co., 1974), capítulo 7. Aceptando este enunciado y asumiendo que en el teorema 1.5.10, f' es continua podemos completar la demostración.

Demostración del teorema 1.5.10. Para funciones analíticas tales como $f(z)$, hemos visto que la matriz de las derivadas parciales es

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{-\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

que tiene determinante

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

ya que $f'(z) = \partial u/\partial x + i\, \partial v/\partial x$. Todas estas funciones son evaluadas en el punto $(x_0, y_0) = z_0$. Ahora $f'(z_0) \neq 0$, por lo tanto, Det $Df(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0$. Por ende, se aplica el teorema de la función inversa para funciones de variable real. Por el teorema de Cauchy-Riemann sólo necesitamos verificar que los elementos de $[Df(x, y)]^{-1}$ satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann y dar (f^{-1}), como se estableció.

Como acabamos de ver

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

y la inversa de la matriz es

$$\frac{1}{\text{Det } Df}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{-\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{-\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si escribimos $f^{-1}(x, y) = t(x, y) + is(x, y)$, entonces, comparando

$$D(f^{-1}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial t}{\partial y} \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} & \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$$

con la matriz inversa de Df, obtenemos

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{\text{Det } Df}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\text{Det } Df}\frac{\partial u}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\text{Det } Df}\frac{-\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\text{Det } Df}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{evaluada en } f(x_0, y_0)$$

Similarmente,

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{\text{Det } Df}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{\text{Det } Df}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Así las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen para t y s ya que se satisfacen para u y v. Por lo tanto, f^{-1} es compleja-diferenciable. Del teorema de Cauchy-Riemann vemos que en el punto $f(z_0)$

$$(f^{-1})' = \frac{\partial t}{\partial x} + i\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\text{Det } Df}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{f'(z_0)} \quad \blacksquare$$

Una manera alternativa de demostrar que $(f^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z)$ se bosqueja en el ejercicio 7.

Funciones armónicas y armónicas conjugadas

Las partes real e imaginaria de una función analítica debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. La manipulación de estas ecuaciones nos lleva directamente a otra propiedad muy importante, la cual ahora separaremos. Una función dos

veces continuamente diferenciable $u : A \to \mathbf{R}$ definida en un conjunto abierto A es llamada *armónica* si

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

La expresión $\nabla^2 u$ se llama el *laplaciano* de u y es una de las operaciones más básicas en matemáticas y en física. Las funciones armónicas juegan un papel fundamental en los ejemplos físicos discutidos posteriormente en los capítulos 5 y 8. Por el momento vamos a estudiarlas desde el punto de vista matemático. Para que la ecuación (1) tenga sentido, la función u debe ser dos veces diferenciable. En el capítulo 3 se mostrará que una función analítica es *infinitamente* diferenciable. Así sus partes real e imaginaria son infinitamente diferenciables. Vamos a aceptar (o a asumir) estas propiedades aquí. En particular, las segundas derivadas parciales son continuas y así, un resultado usual del cálculo dice que las parciales cruzadas son iguales. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden entonces ser usadas para mostrar que estas funciones son armónicas.

Proposición 1.5.11 *Si* f *es analítica en un conjunto abierto* A *y* f = u + iv (*esto es, si* u = Re f *y* v = Im f), *entonces* u *y* v *son armónicas en* A.

Demostración. Usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$. Diferenciando la primera ecuación con respecto de x y la segunda ecuación con respecto de y obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} \tag{2}$$

Del cálculo sabemos que las segundas parciales son simétricas:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}$$

Si sumamos las ecuaciones en el conjunto de ecuaciones (2) nos da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} = 0$$

La ecuación para v se prueba en la misma forma. ■

Si u y v son funciones con valores reales definidas en un subconjunto A de $\mathbf{C}$ tal que la función con valores complejos $f = u + iv$ es analítica en A, decimos que u y v son *armónicas conjugadas* en A. Por ejemplo,

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v(x, y) = 2xy$$

son armónicas conjugadas una de la otra ya que ellas son las partes real e imaginaria

de $f(z) = z^2$. En el ejemplo resuelto 1.3.18 vimos que las curvas de nivel de u y v se intersectan en ángulos rectos. Esto no es accidental, la demostración de su validez general para funciones armónicas usa la misma idea que en 1.3.18 y también las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Proposición 1.5.12. *Sean* u *y* v *armónicas conjugadas en una región* A. *Suponga que*

$$u(x, y) = \textit{constante} = c_1$$

y

$$v(x, y) = \textit{constante} = c_2$$

definen curvas suaves. Entonces estas curvas se intersectan ortogonalmente (véase la figura 1.5.4.)

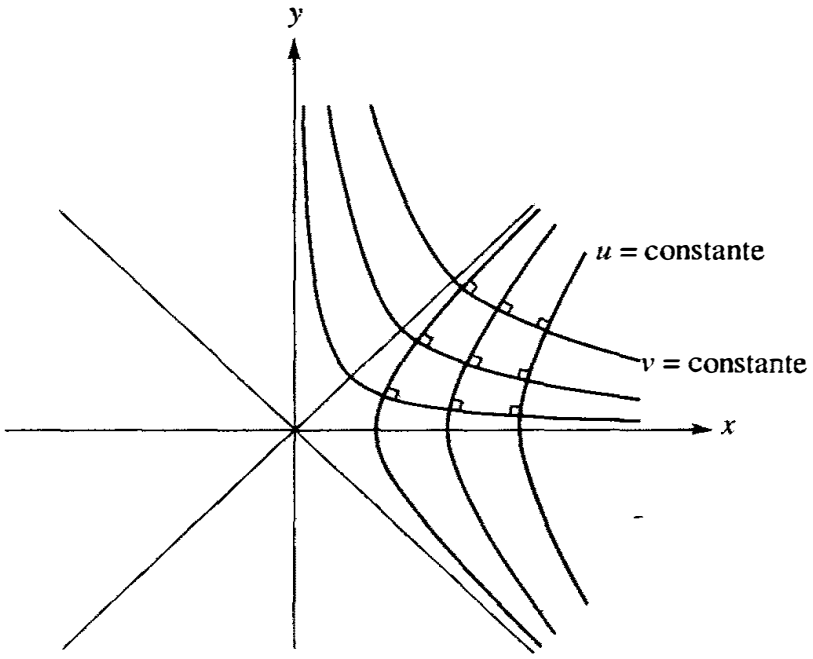


Figura 1.5.4. Armónicas conjugadas en el caso $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $f(z) = z^2$.

Aceptamos, del cálculo, el hecho que $u(x, y) = c_1$ define una curva suave si el gradiente grad $u(x, y) = (\partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = (\partial u/\partial x) + i(\partial u/\partial y)$ es diferente de cero para x y y que satisfacen $u(x, y) = c_1$. (El estudiante debe enterarse de este hecho aun cuando es un punto técnico que no juega un papel mayor en los ejemplos concretos.) También es cierto que el vector gradiente u es perpendicular a la curva (véase figura 1.5.5). Esto puede explicarse como sigue. Si $(x(t), y(t))$ es la curva, entonces $u(x(t), y(t)) = c_1$, de modo que

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), y(t))] = 0$$

y así, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot y'(t) = 0$$

Esto es,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$$

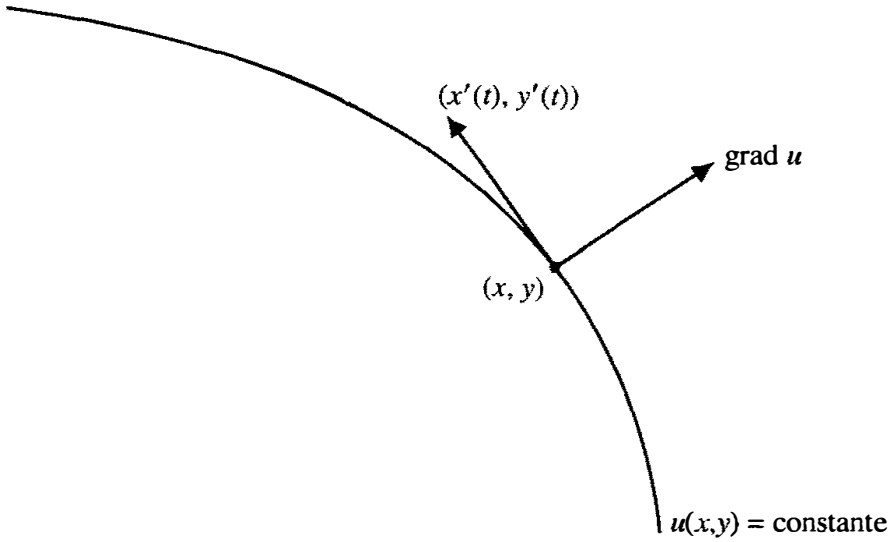


Figura 1.5.5. Los gradientes son ortogonales a los conjuntos de nivel.

Demostración de la proposición 1.5.12. Debido a las anteriores observaciones, es suficiente mostrar que grad u y grad v son perpendiculares. Su producto interior es

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

el cual es cero debido a las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

Esta propiedad de ortogonalidad de las armónicas conjugadas tiene una importante interpretación física que se empleará en el capítulo 5. Otra forma de ver por qué se debe satisfacer esta propiedad es considerar mapeos conformes y el teorema de la función inversa. Esto se ilustra en la figura 1.5.6. Si $f = u + iv$ es analítica y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es analítica en una vecindad V de $w_0 = f(z_0)$ y $(f^{-1})'(w_0) \neq 0$ debido al teorema de la función inversa. Si $w_0 = c_1 + ic_2$, entonces las curvas $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ son las imágenes de la líneas vertical y horizontal que pasan a través de w_0 bajo el mapeo f^{-1}. Éstas deben cruzarse en ángulos rectos ya que f^{-1} es conforme por el teorema 1.5.7.

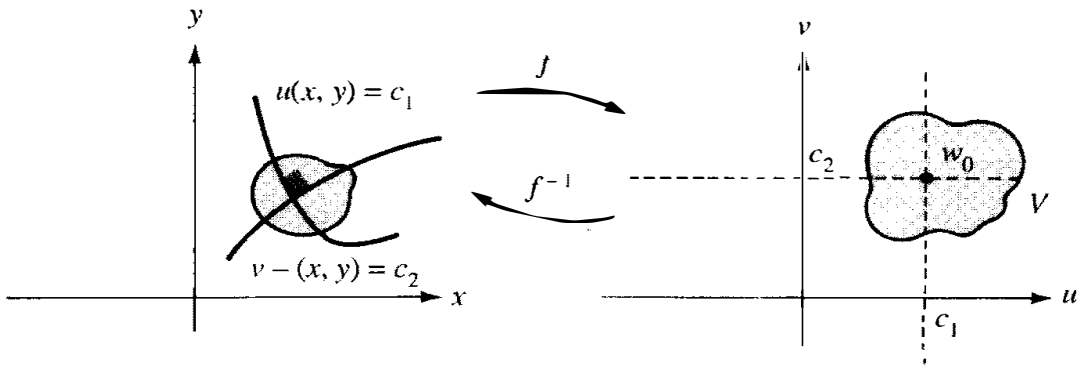


Figura 1.5.6. Puesto que f y f^{-1} son analíticas, son conformes y, por lo tanto, preservan ortogonalidad.

La proposición 1.5.11 dice que la parte real de una función analítica es armónica. Una pregunta natural es lo opuesto: ¿Toda función armónica es la parte real de una función analítica? Más precisamente: Dada una función armónica u en un conjunto A, ¿necesita haber una armónica conjugada v tal que $f = u + iv$ es analítica en A? La respuesta cabal es un poco tortuosa y depende del conjunto A. Sin embargo, la respuesta es más simple si nos confiamos nosotros mismos a vecindades pequeñas. En efecto, la propiedad de ser armónica es lo que se llama una *propiedad local.* La función u es armónica en un conjunto si las ecuaciones (1) son válidas en todo punto de ese conjunto y la validez de estas ecuaciones depende únicamente del comportamiento de u cerca de ese punto.

Proposición 1.5.13. *Si* u *es una función armónica dos veces diferenciable en un conjunto abierto* A y $z_0 \in$ A, *entonces existe una vecindad de* z_0 *en la cual* u *es la parte real de una función analítica.*

En otras palabras, existe una $r > 0$ y una función v definida en el disco abierto $D(z_0; r)$ tal que u y v son armónicas conjugadas en $D(z_0; r)$. En efecto, $D(z_0; r)$ puede ser tomado como el disco más grande centrado en z_0 y contenido en A. Una demostración directa de esto se bosqueja en el ejercicio 32. Una demostración distinta de un resultado ligeramente más fuerte se dará en el capítulo 2. Ya que las ecuaciones de Cauchy-Riemann deben satisfacerse, v está únicamente determinada excepto por la suma de una constante. Estas ecuaciones pueden usarse como un método para encontrar v cuando u es dada. (Véase el ejemplo resuelto 1.5.20.)

Ejemplos resueltos

1.5.14. *¿En dónde es analítica*

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{z^3 + 1} \; ?$$

Calcule la derivada.

Solución. Por la proposición 1.5.3. (iii) f es analítica en el conjunto $A = \{ z \in \mathbf{C} \mid z^3 + 1 \neq 0 \}$, esto es, f es analítica en todo el plano excepto en las raíces cúbicas de $-1 = e^{\pi i}$: a saber, los puntos $e^{\pi i/3}$, $e^{\pi i}$ y $e^{5\pi i/3}$ Por la fórmula para derivar un cociente, la derivada es

$$f'(z) = \frac{(z^3 + 1)(3z^2 + 2) - (z^3 + 2z + 1)(3z^2)}{(z^3 + 1)^2}$$

$$= \frac{(2 - 4z^3)}{(z^3 + 1)^2}$$

1.5.15. *Considere* $f(z) = z^3 + 1$. *Estudie el comportamiento infinitesimal de* f *en* $z_0 = i$.

Solución. Usaremos el teorema del mapeo conforme (1.5.7). En este caso $f'(z_0) = 3i^2 = -3$. Así f rota localmente un ángulo $\pi = \arg(-3)$ y multiplica longitudes por $3 = |f'(z_0)|$. Más precisamente, si c es cualquier curva que pasa a través de $z_0 = i$, la curva imagen tendrá, en $f(z_0)$, su vector tangente rotado por π y alargado por un factor 3.

1.5.16. *Demuestre que* $f(z) = \overline{z}$ *no es analítica.*

Solución. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x - iy$ donde $z = (x, y) = x + iy$. Así $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$. Pero $\partial u/\partial x = 1$ y $\partial v/\partial y = -1$, en consecuencia $\partial u/\partial x \neq \partial v/\partial y$ y, por lo tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen. Por ende, $f(z) = \overline{z}$ no puede ser analítica, por el teorema de Cauchy-Riemann (1.5.8).

1.5.17. *Sabemos, por la proposición* 1.5.3, *que* $f(z) = z^3 + 1$ *es analítica. Verifique las ecuaciones de Cauchy-Riemann para esta función.*

Solución Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ cuando $z = (x, y) = x + iy$, entonces en este caso $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ y $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Por lo tanto, $\partial u/\partial x = 3x^2 - 3y^2$, $\partial u/\partial y = -6xy$, $\partial v/\partial x = 6xy$ y $\partial v/\partial y = 3x^2 - 3y^2$, de lo cual vemos que $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$.

1.5.18. *Sea* A *un subconjunto abierto de* $\mathbf{C}$ y $A^* = \{z \mid \overline{z} \in A\}$. *Suponga que* f *es analítica en* A *y defina una función* g *en* A^* *como* $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. *Demuestre que* g *es analítica en* A^*.

Solución. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$. Checamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann para g como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\text{Re } g) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, -y) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x, -y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x, -y)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}[-v(x, -y)] = \frac{\partial}{\partial y}(\text{Im } g)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}(\text{Re } g) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, -y) = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x,-y)} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,-y)}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}[-v(x, -y)] = -\frac{\partial}{\partial x}(\text{Im } g)$$

Puesto que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen y g es diferenciable en el sentido de las variables reales (¿por qué?), g es analítica en A^* por el teorema de Cauchy-Riemann. (Uno puede resolver directamente este ejercicio apelando directamente a la definición de diferenciabilidad.)

1.5.19. *Suponga que* f *es una función analítica en una región (un conjunto abierto conexo)* A *y que* |f(z)| *es constante en A. Muestre que* f(z) *es constante en A.*

Solución. Usaremos las ecuaciones de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z) = 0$ en todo A. Sea $f = u + iv$. Entonces $|f|^2 = u^2 + v^2 = c$ es constante. Si $c = 0$, entonces $|f(z)| = 0$ y, por tanto, $f(z) = 0$ para toda z en A. Si $c \neq 0$, tomamos las derivadas de $u^2 + v^2 = c$ con respecto a x y y para obtener

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann esto se convierte en

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{y} \qquad v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Como un sistema de ecuaciones para las dos incógnitas $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$, la matriz de coeficientes tiene determinante $u^2 + v^2 = c$, que es diferente de 0. Así la única solución es $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$ en todos los puntos de A. Por lo tanto, $f'(z) = \partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x) = 0$ en todo A. Puesto que A es conexo, f es constante (por la proposición 1.5.5).

1.5.20. *Encuentre las armónicas conjugadas de las siguientes funciones armónicas en* **C**:

a) $u(x, y) = x^2 - y^2$ *b)* $u(x, y) = \text{sen } x \cosh y$

Observación: El estudiante podría reconocer $x^2 - y^2$ y sen x cosh y como las partes reales de z^2 y sen z, $z = x + iy$. A partir de esta observación se sigue que las conjugadas, excepto por la suma de constantes, son $2xy$ y senh y cos x. (Vamos a ver en la siguiente sección que sen z es analítica.)

Es instructivo, sin embargo, resolver el problema directamente usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, debido a que el estudiante no siempre podría reconocer una función analítica apropiada $f(z)$ por simple inspección.

Solución

a) Si v es una armónica conjugada de u, entonces $\partial v/\partial x = 2y$ y $\partial v/\partial y = 2x$. Por lo tanto, $v = 2yx + g_1(y)$ y $v = 2xy + g_2(x)$. Así $g_1(y) = g_2(x) =$ constante y, por tanto, $v(x, y) = 2yx +$ constante.

b) $\partial v/\partial x = -\text{sen } x \text{ senh } y$ y $\partial v/\partial y = \cos x \cosh y$. La primera ecuación implica que $v = \cos x \text{ senh } y + g_1(y)$ y la segunda ecuación implica que $v = \cos x \text{ senh } y + g^2(x)$. En consecuencia $g_1(y) = g_2(x) =$ constante. Por lo tanto, $v(x, y) = \cos x \text{ senh } y +$ constante.

1.5.21. *Muestre que* u (x, y) = log $\sqrt{x^2 + y^2}$ *es armónica en* $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. *Discuta las posibles armónicas conjugadas.*

Solución. Un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

la ecuación de Laplace, ecuación (1), se satisface y, por lo tanto, la función es armónica.

Si $v(x, y)$ es una conjugada armónica, entonces

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Como resultado de integrar la primera ecuación, $v = -\tan^{-1}(x/y) + g_1(y)$, y de la segunda, $v = \tan^{-1}(y/x) + g_2(x)$. Pero $\tan^{-1}(y/x) + \tan^{-1}(x/y) = \pi/2$ (¿por qué?) y, por ende, $v = \tan^{-1}(y/x) +$ constante.

Nótese que si $z = x + iy$, entonces $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $u(x, y)$ es la parte real de $\log z = \log |z| + i \arg z$. Si $z_0 \neq 0$, podemos escoger el intervalo para el argumento de forma tal que la correspondiente rama del logaritmo esté definida y sea continua en una vecindad de z_0. Nuestra función $u(x, y) = \log |z|$ es la parte real de ésta. La función $v(x, y) = \tan^{-1}(x/y) = \arg z$ es una armónica conjugada para u en una vecindad de z_0 y las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, y, por tanto, $\log z$ es analítica. (Véase figura 1.5.7.)

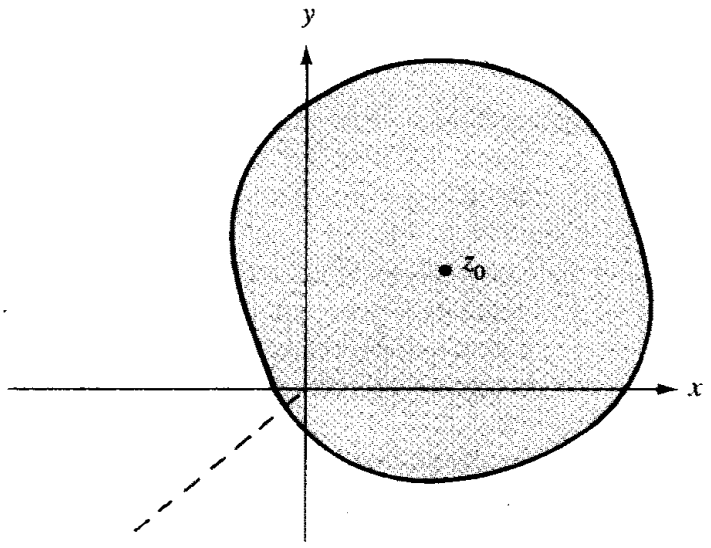


Figura 1.5.7. Una rama del logaritmo es analítica en una vecindad de z_0.

Sin embargo, aun cuando u es armónica en todo $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, no hay forma de escoger una armónica conjugada que trabaje en todo este conjunto al mismo tiempo, ya que se debe hacer una elección de $\tan^{-1}(y/x)$. Tal conjugada debería ser una elección de una rama del argumento, y no hay forma de hacer esto sin una discontinuidad de salto en algún lado. (Vamos a estudiar $\log z$ más sistemáticamente en las siguientes secciones.)

Ejercicios

1. Determine los conjuntos en los cuales son analíticas las siguientes funciones y calcule sus derivadas:

a) $(z+1)^3$ *b)* $z + \dfrac{1}{z}$

c) $\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^{10}$ *d)* $\dfrac{1}{(z^3-1)(z^2+2)}$

2. Determine los conjuntos en los cuales las siguientes funciones son analíticas y calcule sus derivadas:

a) $3z^2 + 7z + 5$ *b)* $(2z+3)^4$

c) $\dfrac{3z-1}{3-z}$

3. ¿En qué conjuntos son analíticas las siguientes funciones? Calcule la derivada para cada una de ellas.

a) z^n, n es un entero (positivo o negativo)

b) $\dfrac{1}{(z+1/z)^2}$

c) $z/(z^n-2)$, n es un entero positivo.

4. Para γ: $]a, b[\to \mathbf{C}$ diferenciable y $f: A \to \mathbf{C}$ analítica, con $\gamma(\,]a, b[\,) \subset A$ pruebe que $\sigma = f \circ \gamma$ es diferenciable con $\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ imitando la demostración de la regla de la cadena (1.5.4).

5. Estudie el comportamiento infinitesimal de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(z) = z + 3$, $z_0 = 3 + 4i$ *b)* $f(z) = z^6 + 3z$, $z_0 = 0$

c) $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z-1}$, $z_0 = 0$

6. Estudie el comportamiento infinitesimal de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(z) = 2z + 5,\ z_0 = 5 + 6i$ *b*) $f(z) = z^4 + 4z,\ z_0 = i$
c) $f(z) = 1/(z - 1),\ z_0 = i$

7. Demuestre que $df^{-1}/dw = 1/f'(z)$, donde $w = f(z)$, diferenciando $f^{-1}(f(z)) = z$ y usando la regla de la cadena. Asuma que f^{-1} está definida y es analítica.

8. Use el teorema de la función inversa para mostrar que si $f: A \to \mathbf{C}$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ para toda z en A, entonces f mapea conjuntos abiertos de A en conjuntos abiertos.

9. Verifique las ecuaciones de Cauchy–Riemann para la función $f(z) = z^2 + 3z + 2$.

10. Demuestre que $f(z) = |z|$ no es analítica.

11. Demuestre, por cambio de variables, que las ecuaciones de Cauchy–Riemann, en términos de coordenadas polares, son

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

12. Haga cuidadosamente los cálculos en el ejercicio 11 por medio del siguiente procedimiento. Sea f definida en el conjunto abierto $A \subset \mathbf{C}$ (esto es, $f: A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$) y suponga que $f(z) = u(z) + iv(z)$. Sea $T:]0, 2\pi[\times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^2$ donde $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$, dada por $T(\theta, r) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$. Así T es uno a uno y sobre el conjunto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. Defínase $\tilde{u}(\theta, r) = u(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ y $\tilde{v} = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$. Demuestre que

a) T es continuamente diferenciable y tiene una inversa continuamente diferenciable.
b) f es analítica en $A \setminus \{x + iy \mid y = 0, x \geq 0\}$ si y sólo si $(\tilde{u}, \tilde{v}): T^{-1}(A) \to \mathbf{R}^2$ es diferenciable y

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}$$

en $T^{-1}(A)$

13. Defina el símbolo $\partial f/\partial \bar{z}$ como

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{i\,\partial y}\right)$$

Demuestre que las ecuaciones de Cauchy–Riemann son equivalentes a $\partial f/\partial \bar{z} = 0$.

NOTA. Debido a este resultado, algunas veces se dice que las funciones analíticas no son funciones de z sino solamente de $\bar{z}$. Esta afirmación puede hacerse más precisa como sigue. Dada $f(x, y)$, escríbase $x = (1/2)(z + \bar{z})$ y $y = (1/2i)(z - \bar{z})$. Entonces f se convierte en una función de z y $\bar{z}$ y la regla de la cadena nos da

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

14. Defina el símbolo $\partial f/\partial z$ como

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

a) Demuestre que si f es analítica, entonces $f' = \partial f/\partial z$.
b) Si $f(z) = z$, demuestre que $\partial f/\partial z = 1$ y $\partial f/\partial \bar{z} = 0$.
c) Si $f(z) = \bar{z}$, demuestre que $\partial f/\partial z = 0$ y $\partial f/\partial \bar{z} = 1$.
d) Demuestre que el símbolo $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial \bar{z}$ cumple las reglas de suma, producto y multiplicación escalar para las derivadas.
e) Demuestre que la expresión $\Sigma_{n=0}^{N} \Sigma_{m=0}^{M} a_{nm} z^n \bar{z}^m$ es una función analítica de z si y sólo si $a_{nm} = 0$ siempre que $m \neq 0$.

15. Suponga que f es una función analítica en el disco $D = \{z \text{ tal que } |z| > 1\}$ y que $\text{Re } f(z) = 3$ para toda z en D. Demuestre que f es constante en D.

16. *a*) Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en un conjunto conexo A. Si $au(x, y) + bv(x, y) = c$ en A, donde a, b, c son constantes reales no todas 0, demuestre que f' es constante en A.
b) ¿El resultado obtenido en *a*) es aun válido si a, b, c, son constantes complejas?

17. Suponga que f es analítica en $A = \{z \mid \text{Re } z > 1\}$ y que $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ en A. Demuestre que existe una constante real c y una constante compleja d tal que $f(z) = -icz + d$ en A.

18. Sea $f(z) = z^5/|z|^4$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 0$.

a) Muestre que $f(z)/z$ no tiene un límite cuando $z \to 0$
b) Si $u = \text{Re } f$ y $v = \text{Im } f$, muestre que $u(x, 0) = x$, $v(0, y) = y$, $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$.
c) Concluya que las parciales de u y v existen, y que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, pero que $f'(0)$ no existe. ¿Contradice esta conclusión el teorema de Cauchy–Riemann?
d) Repita el ejercicio *c*), haciendo $f = 1$ en los ejes x y y, y 0 en cualquier otro lado.
e) Repita el ejercicio *c*) haciendo $f(z) = \sqrt{|xy|}$.

19. Sea $f(z) = (z + 1)/(z - 1)$.

a) ¿Dónde es f analítica?
b) ¿Es f conforme en $z = 0$?
c) ¿Cuáles son las imágenes de los ejes x y y bajo f?
d) ¿En qué ángulo se intersectan estas imágenes?

20. Sea f una función analítica en un conjunto abierto conexo A y suponga que $f^{(n+1)}(z)$ (la derivada $n + 1$) existe y es cero en A. Muestre que f es un polinomio de grado n.

21. ¿En qué conjunto es

$$u(x, y) = \text{Re } \frac{z}{z^3 - 1} \quad \text{armónica?}$$

22. Verifique directamente que las partes real e imaginaria de $f(z) = z^4$ son armónicas.

23. ¿En qué conjuntos son armónicas cada una de las siguientes funciones?

a) $u(x, y) = \text{Im}\,(z^2 + 3z + 1)$ *b)* $u(x, y) = \dfrac{x - 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$

24. ¿En qué conjuntos son armónicas cada una de las siguientes funciones?

a) $u(x, y) = \text{Im}\,(z + 1/z)$ *b)* $u(x, y) = \dfrac{y}{(x-1)^2 + y^2}$

25. Sean $f: A \to \mathbf{C}$ y $w: B \to \mathbf{R}$ armónicas con $f(A) \subset B$. Muestre que $w \circ f: A \to \mathbf{R}$ es armónica.

26. Si u es armónica, demuestre que, en términos de coordenadas polares,

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

(*Sugerencia*: use las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar, ejercicio 11.)

27. *a)* Muestre que $u(x, y) = e^x \cos y$ es armónica en $\mathbf{C}$.
b) Encuentre una armónica conjugada $v(x, y)$ para u en $\mathbf{C}$ tal que $v(0, 0) = 0$.
c) Muestre que $f(z) = e^z$ es analítica en $\mathbf{C}$.

28. Muestre que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica en $\mathbf{C}$ y encuentre una armónica conjugada v tal que $v(0, 0) = 2$.

29. Si $u(z)$ es armónica y $v(z)$ es armónica, entonces

a) ¿Es $u(v(z))$ armónica.
b) ¿Es $u(z) \cdot v(z)$ armónica?
c) ¿Es $u(z) + v(z)$ armónica?

30. Considere la función $f(z) = 1/z$. Dibuje los contornos de $u = \text{Re}\,f$ = constante y $v = \text{Im}\,f$ = constante. ¿Cómo se intersectan? ¿Es siempre cierto que grad v es paralelo a la curva v = constante?

31. Suponga que u es una función de valores reales dos veces continuamente diferenciable en un disco $D(z_0; r)$ centrado en $z_0 = x_0 + iy_0$. Para $(x_1, y_1) \in D(z_0; r)$, muestre que la ecuación

$$v(x_1, y_1) = c + \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y)\, dy - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0)\, dx$$

define una armónica conjugada para u en $D(z_0, r)$ con $v(x_0, y_0) = c$.

1.6. DIFERENCIACIÓN DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

En esta sección se discutirán las propiedades de diferenciabilidad de las funciones elementales discutidas en la sección 1.3.

Función exponencial y logaritmo

Proposición 1.6.1 *La función* f: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \to e^z$, *en analítica en* $\mathbf{C}$ *y*

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

Demostración. Por definición, $f(z) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$ y así las partes real e imaginaria son $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. Éstas son funciones C^∞ (diferenciables un número infinito de veces) y, por ende, f es diferenciable en el sentido de las variables reales. Para demostrar que f es analítica debemos verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Pero

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

Así $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ y por el teorema de Cauchy-Riemann, f es analítica. Además, ya que

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z$$

la proposición queda probada.■

Una función que está definida y es analítica en todo el plano $\mathbf{C}$ es llamado *entera*. Así, $f(z) = e^z$ es una función entera.

Usando las reglas de diferenciación (proposición 1.5.3) como se emplean en cálculo elemental, podemos diferenciar e^z en combinación con varias funciones. Por ejemplo, $e^{z^2} + 1$ es entera porque $z \mapsto z^2$ y $w \mapsto e^w$ son analíticas y así por la regla de la cadena, $z \mapsto z^2$ es analítica. Por la regla de la cadena y la regla de la suma, $d(e^{z^2} + 1)/dz = 2ze^{z^2}$.

Recordemos que log z: $\mathbf{C}\backslash\{0\} \to \mathbf{C}$ es una inversa de e^z cuando se restringe e^z a una banda de periodicidad $\{x + iy \mid y_0 \leq y < y + 2\pi\}$. Sin embargo, la diferenciabilidad de log z debe restringirse a un conjunto más pequeño que $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. La razón es simple: $\log z = \log |z| + i \arg z$, para, digamos, $0 \leq \arg z < 2\pi$. Pero la función arg es discontinua, salta 2π al cruzar el eje real. Si removemos el eje real entonces estamos excluyendo los reales positivos sobre los que queremos que log z esté definido. En consecuencia, es conveniente usar la rama $-\pi < \arg z < \pi$. Entonces un conjunto apropiado sobre el cual log z es analítica está dado como sigue.

Proposición 1.6.2. *Sea* A *el conjunto abierto que es igual a* $\mathbf{C}$ *menos el eje real negativo incluyendo al cero (esto es,* $\mathbf{C}\backslash\{x + iy \mid x \leq 0 \text{ y } y = 0\}$*). Defínase una rama de* log *en* A *como*

$$\log z = \log|z| + i \arg z \qquad -\pi < \arg z < \pi$$

la cual es llamada la ***rama principal del logaritmo.*** *Entonces* log z *es analítica en* A *con*

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$$

Afirmaciones análogas son válidas para otras ramas.

Primera demostración (usando el teorema de la función inversa). De la sección 1.3, sabemos que log z es la única inversa de la función $f(z) = e^z$ restringida al conjunto $\{z | z = x + iy, -\pi < y < \pi\}$. Dado que $de^z/dz = e^z \neq 0$, el teorema de la función inversa implica que, localmente, e^z tiene una inversa analítica. Puesto que la inversa es única, esta debe ser log z. La derivada de $f^{-1}(w)$ es $1/f'(z)$. En este caso $f'(z) = f(z) = w$, y así $df^{-1}/dw = 1/w$ en cada punto $w \in A$ y así el teorema está probado. ■

Segunda demostración (usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en su forma polar. En forma polar $\log z = \log r + i\theta$, y así $u(r, \theta) = \log r$, $v(r, \theta) = \theta$, las cuales son funciones C^∞ de r, θ. También, las ecuaciones de Cauchy-Riemann, expresadas en coordenadas polares, son una herramienta válida en la región A, como se explicó en la sección 1.5 y los ejercicios 11 y 12 al final de esa sección. Pero

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

y

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial v}{\partial r}$$

y por ende las ecuaciones de Cauchy-Riemann son válidas. Tenemos también

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{\partial}{\partial x} \log r + i \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + i \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Es obvio que en A, $\partial r/\partial x = x/r$ y $\partial\theta/\partial x = -y/r^2$ si se usa, por ejemplo, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$, y así

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{x}{r^2} - \frac{iy}{r^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} \blacksquare$$

El dominio en el cual la rama principal de log z es analítica, se da en la figura 1.6.1. Aquí está un ejemplo de otra rama: $\log z = \log|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$, es

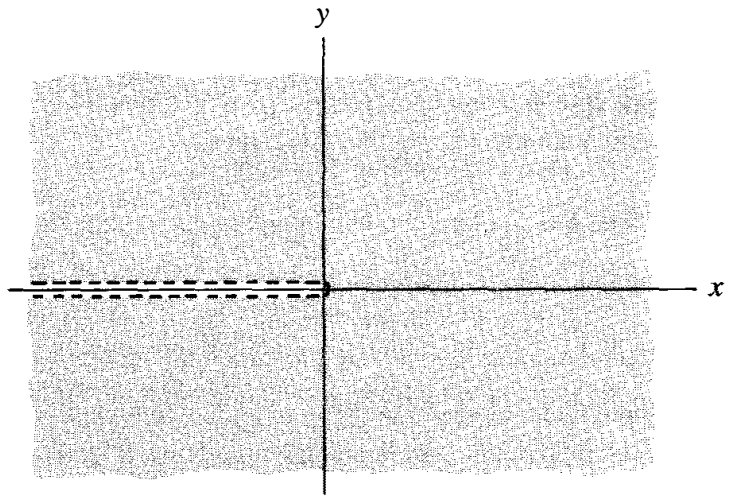


Figura 1.6.1. Dominio del log z.

analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x + iy \mid x \geq 0, y = 0\}$. Usaremos la rama principal a menos que se establezca otra cosa.

Cuando usamos log z en composiciones, debemos ser cuidadosos de permanecer en el dominio de log. Por ejemplo, consideremos $f(z) = \log z^2$ usando la rama principal de log. Esta función es analítica en $A = \{z \mid z \neq 0 \text{ y } \arg z \neq \pm\pi/2\}$ debido al siguiente razonamiento. La proposición 1.5.3. muestra que z^2 es analítica en todo $\mathbf{C}$. La imagen de A bajo el mapeo $z \mapsto z^2$ es precisamente $\mathbf{C}\backslash\{x = iy \mid x \leq 0, y = 0\}$ (¿por qué?), el cual es precisamente el conjunto en el que la rama principal de log está definida y es analítica. Por la regla de la cadena $z \to \log z^2$ es analítica en A (véase la figura 1.6.2).

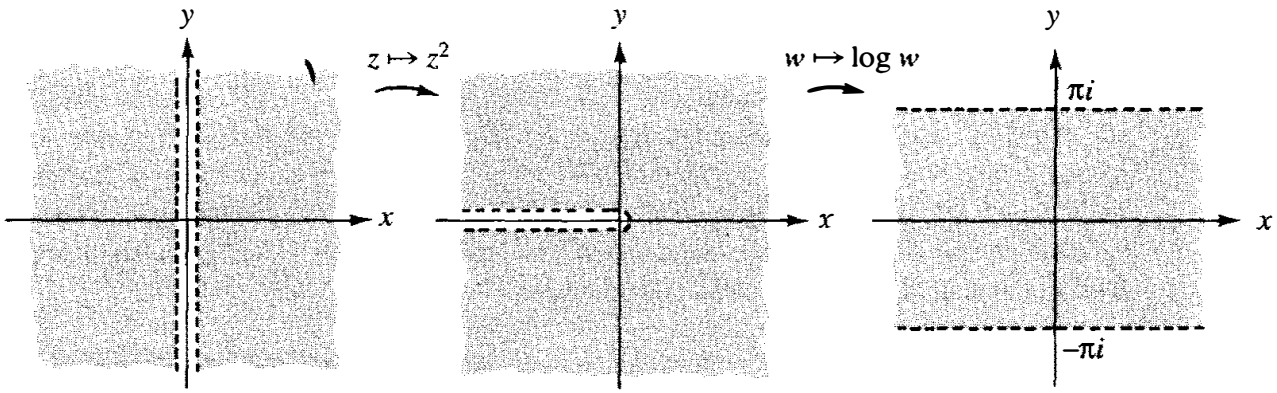


Figura 1.6.2. Dominio de analiticidad del log z^2.

La función $f(z) = \log z^2$ también ilustra que cierta cantidad de cuidado debe ejercerse al manipular logaritmos. Considere las dos funciones $\log z^2$ y $2 \log z$. Si consideramos todos los posibles valores del logaritmo, las dos colecciones son iguales. Sin embargo, si escogemos una rama particular, por ejemplo, la rama principal y la usamos para ambas, entonces las dos *no* son siempre iguales. Por ejemplo, si $z = 1 + i$, entonces $\arg z = 3\pi/4$ y $\log z^2 = \log 2 - \pi i/2$, mientras que $2 \log z = \log 2 + 3\pi i/2$. La función $\log z^2$ es analítica en el plano con el eje imaginario removido, mientras que $2 \log z$ es analítica en el plano con el eje real negativo removido.

Las funciones trigonométricas

Ahora que hemos establecido propiedades de e^z, la diferenciación de las funciones seno y coseno se sigue rápidamente.

Proposición 1.6.3. sen z *y* cos z *son funciones enteras con sus derivadas dadas por*

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z$$

Demostración. sen $z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, al usar la regla de la suma, la regla de la cadena y el hecho de que la función exponencial es entera, podemos concluir que sen z es entera y que $d(\operatorname{sen} z)/dz = \{ie^{iz} - (-ie^{-iz})\}/2i = (e^{iz} + e^{-iz})/2 = \cos z$. Similarmente,

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{d}{dz}\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$= -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\operatorname{sen} z \quad \blacksquare$$

Podemos discutir también $\operatorname{sen}^{-1} z$ y $\cos^{-1} z$ en más o menos la misma forma que discutimos $\log z$ (que es $\exp^{-1} z$ con dominios y rangos apropiados). Estas funciones se analizan en el ejercicio 6 al final de esta sección.

La función potencia

Sean a y b números complejos. Recordemos que $a^b = e^{b \log a}$, que es, en general, multivaluada de acuerdo a las diferentes ramas para el log que escojamos. Queremos ahora considerar las funciones $z \mapsto z^b$ y $z \mapsto a^z$. Aun cuando estas funciones parecen ser similares, sus propiedades de analiticidad son completamente diferentes. El caso en que b es un entero fue cubierto en la proposición 1.5.3. La situación para b en general es ligeramente más complicada.

Proposición 1.6.4

(i) *Para cualquier elección de una rama para el logaritmo, la función* $z \mapsto a^z$ es entera y tiene derivada $z \mapsto (\log a)a^z$.

(ii) *Fíjese una rama para la función* log *—por ejemplo, la rama principal— entonces la función* $z \mapsto z^b$ *es analítica en el dominio de la rama escogida y la derivada es* $z \mapsto bz^{b-1}$.

Demostración

(i) $a^z = e^{z \log a}$. Por la regla de la cadena esta función es analítica en **C** con derivada $(\log a)\, e^{z \log a} = (\log a)a^z$ ($\log a$ es meramente una constante).

(ii) $z^b = e^{b \log z}$. Esta función es analítica en el dominio de log z, ya que $w \mapsto e^{bw}$ es entera. También, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dz} z^b = \frac{b}{z} e^{b \log z} = \frac{b}{z} z^b$$

(Que esto es igual a bz^{b-1} se sigue del ejercicio 20 al final de la sección 1.3.) ■

Por supuesto, en (ii), si b es un entero ≥ 0 sabemos que z^b es entera (con derivada bz^{b-1}). Pero en general, z^b es analítica sólo en el dominio de log z.

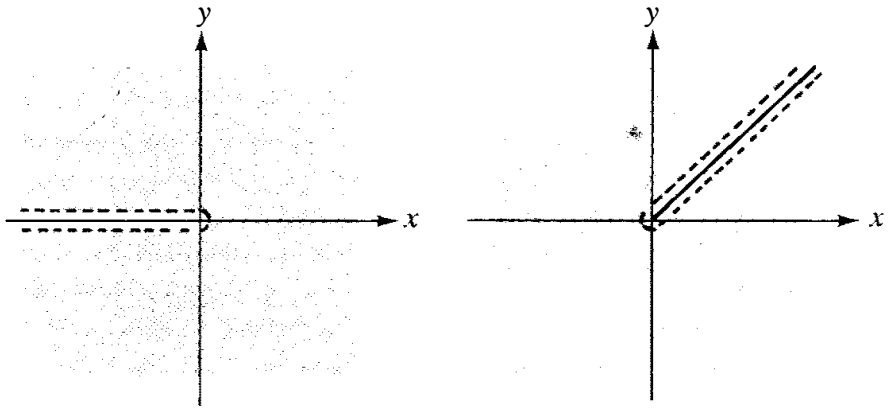


Figura 1.6.3. Regiones de analiticidad para $z \mapsto z^a$.

Vamos a enfatizar lo que se estableció en (ii). Si escogemos la rama principal del log z, que tiene dominio $\mathbf{C}\backslash\{x + iy \mid y = 0 \text{ y } x \leq 0\}$ y rango $\mathbf{R} \times]-\pi, \pi[$ (¿por qué?), entonces $z \mapsto z^a$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x + iy \mid y = 0, x \leq 0\}$ (véase la figura 1.6.3). Podríamos también escoger la rama del log que tiene dominio $\mathbf{C}\backslash\{x + ix \mid x \geq 0\}$ y rango $\mathbf{R} \times]-7\pi/4, \pi/4[$, entonces $z \mapsto z^a$ sería analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x + ix \mid x \geq 0\}$.

La función raíz n-ésima

Una de las raíces n-ésimas de z está dada por $z^{1/n}$, para una elección de una rama de log z. Las otras raíces están dadas por las otras elecciones de las ramas, como en la sección 1.3. La rama principal es la que es más usualmente empleada. Así, por la proposición 1.6.4 (ii), obtenemos, como un caso especial.

Proposición 1.6.5. *La función* $z \mapsto z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ *es analítica en el dominio de log* z *(por ejemplo, la rama principal) y tiene derivada*

$$z \mapsto \frac{1}{n} z^{(1/n)-1}$$

Como con el log z, debemos ejercer cuidado con las funciones $z \mapsto z^b$, $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ cuando las componemos con otras funciones, para estar seguros que permanecemos en el dominio de analiticidad. El procedimiento para la función raíz cuadrada se ilustra en el ejercicio resuelto 1.6.8.

Ejemplos resueltos

1.6.6. *Diferencie las siguientes funciones, dando la región apropiada en la cual las funciones son analíticas:*

a) e^{e^z}
b) $\operatorname{sen}(e^z)$
c) $e^z/(z^2+3)$
d) $\sqrt{e^z+1}$
e) $\cos \bar{z}$
f) $1/(e^z-1)$
g) $\log(e^z+1)$

Soluciones

a) $z \mapsto e^{e^z} \cdot e^z$ es entera, por la regla de la cadena $z \mapsto e^{e^z}$ es entera. Asimismo, por la regla de la cadena la derivada en z es $e^z e^{e^z}$.

b) $z \mapsto \operatorname{sen} e^z$. Ambas, $z \mapsto e^z$ y $w \mapsto \operatorname{sen} w$ son enteras. También, por la regla de la cadena, $z \mapsto \operatorname{sen} e^z$ es entera y la derivada en z es $(\cos e^z)e^z$.

c) $z \mapsto e^z/(z^2+3)$. La función $z \mapsto e^z$ es entera y la función $z \mapsto 1/(z^2+3)$ es analítica en $\mathbf{C}\setminus\{\pm\sqrt{3}i\}$. En consecuencia $z \mapsto e^z/(z^2+3)$ es analítica en $\mathbf{C}\setminus\{\pm\sqrt{3}i\}$ y tiene derivada en $z \neq \pm\sqrt{3}i$ dada por

$$\frac{e^z}{z^2+3} - \frac{e^z \cdot 2z}{(z^2+3)^2} = \frac{e^z(z^2-2z+3)}{(z^2+3)^2}$$

d) $z \mapsto \sqrt{e^z+1}$. Escoja la rama de la función $w \mapsto \sqrt{w}$ que es analítica en $\mathbf{C}\setminus\{x+iy \mid y=0, x \leq 0\}$. Entonces debemos escoger la región A tal que si $z \in A$ entonces e^z+1 no es al mismo tiempo real y ≤ 0. Nótese que e^z es real si $y = \operatorname{Im} z = n\pi$ para algún entero n (¿por qué?). Cuando n es par, e^z es positiva; cuando n es impar, e^z es negativa. Aquí $|e^z| = e^x$, donde $x = \operatorname{Re} z$ y $e^x \geq 1$ si $x \geq 0$. Por lo tanto, si definimos $A = \mathbf{C}\setminus\{x+iy \mid x \geq 0, y = (2n+1)\pi, n$ variando a través de los enteros positivos y negativos y el cero$\}$ (como en la figura 1.6.4), entonces e^z+1 es real $y \leq 0$ si $z \notin A$. Puesto que e^z+1 es entera, ésta es, ciertamente, analítica en A. Por la regla de la cadena, $\sqrt{e^z+1}$ es analítica en A con derivada en z dada por $(e^z+1)^{-1/2}(e^z)/2$.

e) $z \mapsto \cos \bar{z}$. Ya que $z = x+iy$, por la proposición 1.3.4, $\cos \bar{z} = \cos(x-iy) = \cos x \cos(-iy) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-iy) = \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ así $u(x, y) = \cos x \cosh y$ y $v(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$. Por lo tanto, $\partial u/\partial x = -\operatorname{sen} x \cosh y$, $\partial v/\partial y = \operatorname{sen} x \cosh y$. Si $\cos \bar{z}$ fuera analítica, $\partial u/\partial x$ sería igual a $\partial v/\partial y$, lo cual ocurriría si $\operatorname{sen} x = 0$ (esto es, si $x = 0$, o si $x = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Así no existe un conjunto abierto A (no vacío) en el cual $z \mapsto \cos z$ es analítica.

f) $z \mapsto 1/(e^z-1)$. Por la proposición 1.5.3 (iii) y el hecho que $z \mapsto e^z - 1$ es entera, concluimos que $z \mapsto 1/(e^z-1)$ es analítica en el conjunto en el que $e^z - 1 \neq 0$; a saber, el conjunto $A = \mathbf{C}\setminus\{z = 2\pi n i \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. La derivada en z es $-e^z/(e^z-1)^2$.

g) $z \mapsto \log(e^z+1)$. Como el log (en la rama principal) está definida y es analítica en la misma región que la raíz cuadrada, a saber, $A = \mathbf{C}\setminus\{x+iy \mid y=0, x \leq 0\}$, podemos usar

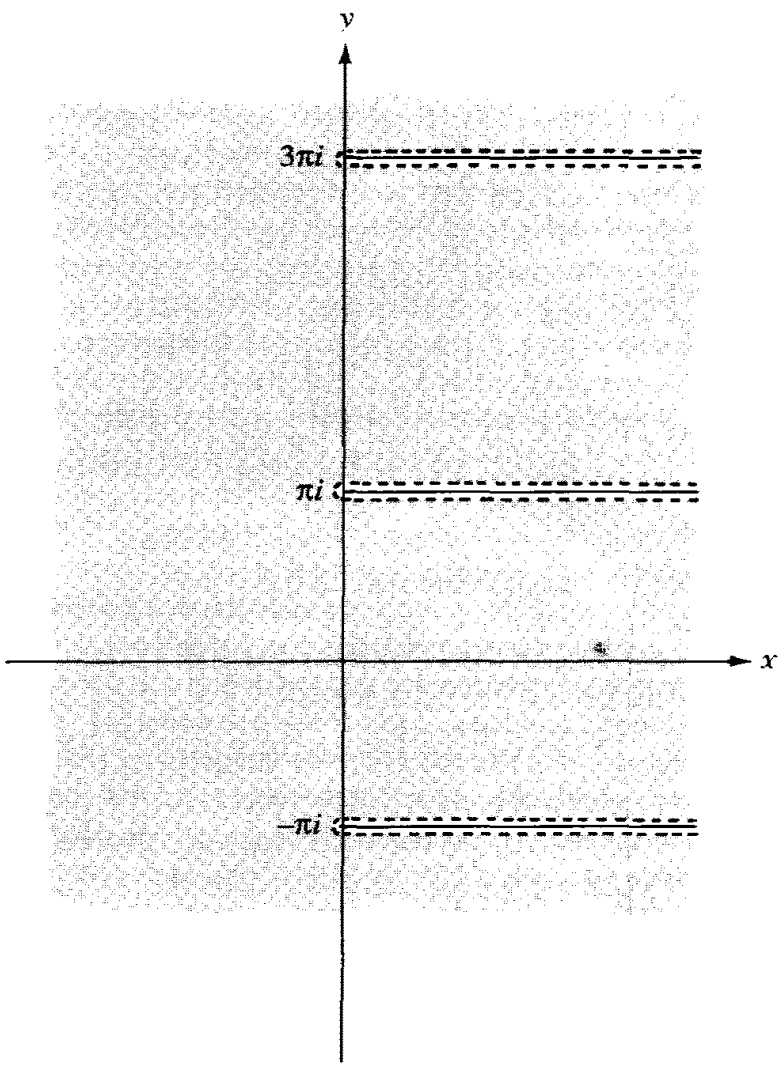


Figura 1.6.4. Región de analiticidad de $z \to \sqrt{e^z + 1}$.

los resultados de *d*). Por la regla de la cadena y por los resultados de *d*), $z \mapsto \log (e^z + 1)$ es analítica en la región descrita en la figura 1.6.4.

1.6.7. *Verifique directamente que la función* e^z *preserva ángulos entre líneas paralelas a los ejes coordenados.*

Solución. La línea determinada por $y = y_0$ es mapeada en el rayo $\{x + ix \tan y_0 \mid x > 0\}$, y la línea determinada por $x = x_0$ es mapeada en el círculo $\{z \text{ tal que } |z| = e^{x_0}\}$, véase la figura. 1.3.7. El ángulo entre cualquiera de tales rayos y el vector tangente al círculo en el punto de contacto del rayo y el círculo es $\pi/2$. Así los ángulos se preservan. Esto es consistente con el teorema del mapeo conforme (1.5.7).

1.6.8. *Muestre que puede definirse una rama de la función* $w \mapsto \sqrt{w}$ *de tal forma que* $z \mapsto \sqrt{z^2 - 1}$ *es analítica en la región sombreada en la figura* 1.6.5. *y use las notaciones de esa figura para muestrar que* $\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$, *donde* $0 < \theta_1 < 2\pi$, $-\pi < \theta_2 < \pi$.

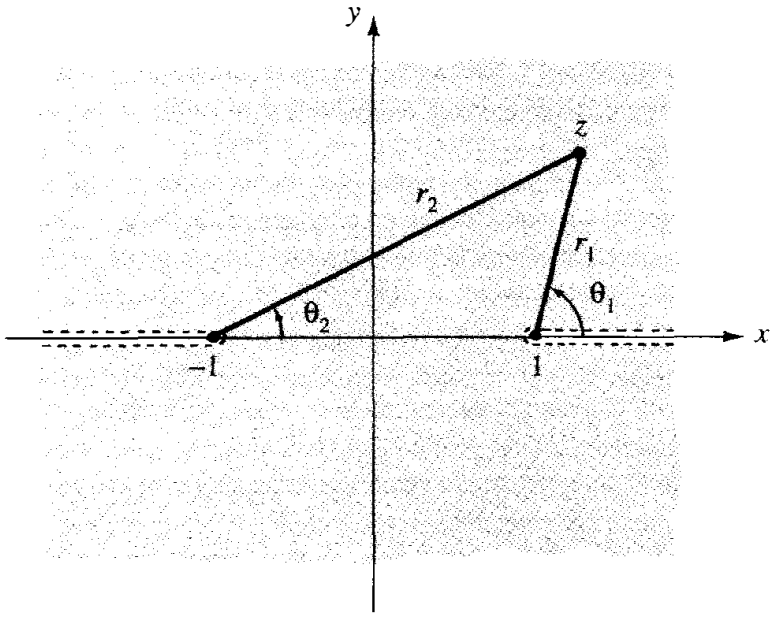


Figura 1.6.5. Dominio de analiticidad de $\sqrt{z^2-1}$.

Solución. Si $\sqrt{z-1}$ es una raíz cuadrada de $z-1$ y $\sqrt{z+1}$ es una raíz cuadrada de $z+1$, entonces $\sqrt{z-1}\cdot\sqrt{z+1}$ es una raíz cuadrada de z^2-1 (¿por qué?). Para $z\mapsto\sqrt{z-1}$ podemos escoger $\sqrt{\ }$ definida y analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0 \text{ y } x\geq 0\}$; así $z\mapsto\sqrt{z-1}$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0, x\geq 1\}$. Para $z\mapsto\sqrt{z+1}$ podemos escoger $\sqrt{\ }$ definida y analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0 \text{ y } x\leq 0\}$; por lo tanto, $z\mapsto\sqrt{z+1}$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0, x\leq -1\}$. Por ende; $z\mapsto\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0, |x|\geq 1\}$ con las ramas apropiadas de $\sqrt{\ }$, como se indicó. Con estas ramas tenemos $\sqrt{z-1}=\sqrt{r_1}e^{i\theta_1/2}$ y $\sqrt{z+1}=\sqrt{r_2}\,e^{i\theta_2/2)}$, por lo tanto $\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}=\sqrt{r_1 r_2}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$. Como $z\mapsto\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0, |x|\geq 1\}$, debe corresponder a alguna rama de la función raíz cuadrada $\sqrt{\ }$ en la función $z\mapsto\sqrt{z^2-1}$. Para ver cuál de ellas, nótese que $z\in\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0, |x|\geq 1\}$ si $z^2-1\in\mathbf{C}/\{x+iy \mid y=0, x\geq 0\}$ (¿por qué?) y así, si tomamos la $\sqrt{\ }$ definida y analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0, x\geq 0\}$, entonces $z\mapsto\sqrt{z^2-1}$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{x+iy \mid y=0, |x|\geq 1\}$.

NOTA. Se ha usado aquí el símbolo $\sqrt{\ }$ para expresar diferentes ramas de la función raíz cuadrada, la rama particular es clara a partir del contexto. El estudiante debe habituarse a pensar en $\sqrt{\ }$ junto con la elección de una rama.

Ejercicios

1. Diferencie y dé la región apropiada de analiticidad para cada una de las siguientes:

a) z^2+z

b) $1/z$

c) $\operatorname{sen} z/\cos z$

d) $\exp\left(\dfrac{z^3+1}{z-1}\right)$

2. Diferencie y dé la región apropiada de analiticidad para cada una de las siguientes:

a) 3^z *b)* $\log(z+1)$
c) $z^{(1+i)}$ *d)* $\sqrt{z}$
e) $\sqrt[3]{z}$

3. Determine si existen los siguientes límites complejos y encuentre sus valores, si existen.

a) $\lim_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z}$ *b)* $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}|z|}{z}$

4. Debemos si existen los siguientes límites complejos y encuentre sus valores, si existen:

a) $\lim_{z\to 1} \dfrac{\log z}{z-1}$ *b)* $\lim_{z\to 1} \dfrac{\bar{z}-1}{z-1}$

5. ¿Es verdad que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$ para toda $z \in \mathbf{C}$?

6. Resuelva sen $z = w$, muestre cómo escoger un dominio y de esta manera cómo escoger una rama particular de $\operatorname{sen}^{-1} z$ de modo que sea analítica en el dominio. De la derivada de esta rama del $\operatorname{sen}^{-1} z$; véase el ejercicio 35 al final de la sección 1.3.

7. Sea $f(z) = 1/(1-z)$, ¿es continua en el interior del círculo unitario?

8. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ funciones con valores reales definidas en un conjunto abierto $A \subset \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ y suponga que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A. Demuestre que $u_1(x, y) = [u(x, y)]^2 - [v(x, y)]^2$ y $v_1(x, y) = 2u(x, y)v(x, y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy–Riemann en A y que las funciones $u_2(x, y) = e^{u(x, y)} \cos v(x, y)$ y $v_2(x, y) = e^{u(x, y)}$ sen $v(x, y)$ también satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en A. ¿Puede usted hacer esto sin realizar ningún cálculo?

9. Encuentre la región de analiticidad y la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $z/(z^2 - 1)$ *b)* $e^{z + (1/z)}$

10. Encuentre la región de analiticidad y la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $\sqrt{z^3 - 1}$ *b)* $\operatorname{sen}\sqrt{z}$

11. Encuentre el mínimo de $|e^{z^2}|$ para aquellas z con $|z| \leq 1$.

12. Demuestre la proposición 1.6.5 usando el método de la primera demostración de la proposición 1.6.2.

13. ¿Dónde es analítica $z \mapsto 2^{z^2}$? ¿Y $z \mapsto z^{2z}$?

14. Defina una rama de $\sqrt{1 + \sqrt{z}}$ y muestre que es analítica.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Calcule e^i; $\log(1 + i)$; sen i; 3^i; $e^{2\log(-1)}$

2. ¿Para qué valores de z se satisface $\log z^2 = 2 \log z$ si se usa la rama principal en ambos lados de la ecuación?

3. Encuentre las raíces octavas de i.
4. Encuentre todos los números z tales que $z^2 = 1 + i$.
5. Resuelva para z, $\cos z = \sqrt{3}$.
6. Resuelva para z, $\operatorname{sen} z = \sqrt{3}$.
7. Describa geométricamente el conjunto de puntos $z \in \mathbf{C}$ que satisfacen

   a) $|z + i| = |z - i|$ *b*) $|z - 1| = 3|z - 2|$

8. Describa geométricamente el conjunto de puntos $z \in \mathbf{C}$ que satisfacen

   a) $|z - 1| = |z + 1|$ *b*) $|z - 1| = 2|z|$

9. Diferencie las siguientes expresiones en las regiones apropiadas:

   a) $z^3 + 8$ *b*) $\dfrac{1}{z^3 + 1}$

   c) $\exp(z^4 - 1)$ *d*) $\operatorname{sen}(\log z^2)$

10. ¿En qué conjunto es analítica $\sqrt{z^2 - 2}$? Calcule la derivada.
11. Describa los conjuntos en que son analíticas las siguientes funciones y calcule sus derivadas:

    a) $e^{1/z}$ *b*) $\dfrac{1}{(1 - \operatorname{sen} z)^2}$

    c) $\dfrac{e^{az}}{a^2 + z^2}$ para a real

12. Repita el ejercicio de repaso 11 para las siguientes funciones:

    a) $\exp \dfrac{1}{1 - az}$ para $a \in \mathbf{C}$ *b*) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$

13. ¿Puede definirse una rama uni-valuada (analítica) del log z, para los siguientes conjuntos?

    a) $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$ *b*) $\{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$
    c) $\{z \mid \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$

14. Muestre que la función $z \mapsto z + 1/z$ transforma el círculo $\{z$ tal que $|z| = c\}$ en la elipse descrita por $\{w = u + iv \mid u = (c + 1/c)\cos\theta,\ v = (c - 1/c)\operatorname{sen}\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. ¿Podemos permitir $c = 1$?
15. Sea f analítica en A. Defínase $g : A \to C$ como $g(z) = \overline{f(z)}$. ¿Cuándo es analítica g?
16. Encuentre las partes real e imaginaria de $f(z) = z^3$ y verifique directamente que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
17. Sea $f(x + iy) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$. ¿En qué puntos existe $f'(z_0)$?
18. Sea $f: A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica en un conjunto abierto A. Sea $\bar{A} = \{\bar{z} \mid z \in A\}$

    a) Describa geométricamente a $\bar{A}$.
    b) Defina $g : \bar{A} \to \mathbf{C}$ como $g(z) = [\overline{f(\bar{z})}]^2$. Demuestre que g es analítica.

19. Suponga que $f: A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es analítica en un conjunto abierto conexo A y que $f(z)$ es real para toda $z \in A$. Demuestre que f es constante.

20. Demuestre las ecuaciones de Cauchy-Riemann como sigue. Sea $f: A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ diferenciable en $z_0 = x_0 = + iy_0$. Sea $g_1(t) = t + iy_0$ y $g_2(t) = x_0 + it$. Aplique la regla de la cadena a $f \circ g_1$ y $f \circ g_2$ para demostrar el resultado.

21. Sea $f(z)$ analítica en el disco $|z - 1| < 1$. Suponga que $f'(z) = 1/z$, $f(1) = 0$. Demuestre que $f(z) = \log z$.

22. Use el teorema de la función inversa para demostrar el siguiente resultado. Sea $f: A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica (donde A es abierto y conexo) y suponga que $f(A) \subset \{z \text{ tal que } |z| = 3\}$. Entonces f es constante.

23. Demuestre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = nz_0^{n-1}$$

para cualquier $z_0 \in \mathbf{C}$.

24. *a*) Si un polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ tiene una raíz c, entonces muestre que podemos escribir $p(z) = (z - c)h(z)$, donde $h(z)$ es un polinomio de grado $n - 1$. (Use la división de polinomios para mostrar que $z - c$ divide a $p(z)$.)

b) Use la parte *a*) para mostrar que p no puede tener más de n raíces.

c) ¿Cuándo es c una raíz de ambas, $p(z)$ y $p'(z)$?

25. ¿En qué conjunto es analítica la función $z \to z^2$? Calcule su derivada.

26. Sea g analítica en el conjunto abierto A. Sea $B = \{z \in A \mid g(z) \neq 0\}$. Muestre que B es abierto y que $1/g$ es analítica en B.

27. Encuentre y represente gráficamente todas las soluciones de $z^3 = -8i$.

28. Sea $f: A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica en el conjunto abierto A y sea $f'(z_0) \neq 0$ para toda $z_0 \in A$. Muestre que $\{\text{Re } f(z) \mid z \in A\} \subset \mathbf{R}$ es abierto.

29. Demuestre que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Comente el resultado.

30. Demuestre que las siguientes funciones son continuas en $z = 0$:

a) $f(z) = \begin{cases} (\text{Re } z^2)^2/|z|^2 & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ *b*) $f(z) = |z|$

31. ¿En qué puntos z son diferenciables las siguientes funciones?

a) $f(z) = |z|^2$ *b*) $f(z) = y - ix$

32. Use el teorema de De Moivre para encontrar la suma de $\text{sen } x + \text{sen } 2x + \cdots + \text{sen } nx$.

33. Para la función $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$,

a) Muestre que u es armónica (véase la proposición 1.5.11).

b) Determine una armónica conjugada $v(x, y)$ tal que $u + iv$ es analítica.

34. Considere la función $w(z) = 1/z$. Dibuje las curvas de nivel u constante. Discuta.

35. Determine los cuatro diferentes valores de z que son mapeados en la unidad por la función $w(z) = z^4$.

36. Suponga que f es analítica y satisface la condición $|f(z)^2 - 1| < 1$ en una región Ω. Muestre que o $\operatorname{Re} f(z) > 0$ o que $\operatorname{Re} f(z) < 0$ en todo Ω.

37. Suponga que $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es continua y que $f(z) = f(2z)$ para toda $z \in \mathbf{C}$. Muestre que f es constante en $\mathbf{C}$.

38. Suponga que $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es entera y que $f(2z) = 2f(z)$ para toda $z \in \mathbf{C}$. Muestre que existe una constante c tal que $f(z) = cz$ para toda z. (Podría necesitar usar el ejercicio 37.)

2

Teorema de Cauchy

Una ventaja conveniente del análisis complejo es que está basado en unos cuantos, aunque poderosos, teoremas sencillos, de los cuales se siguen la mayoría de los resultados del tema. Entre estos teoremas, uno de los principales es el teorema de Cauchy, el cual nos permite probar, por ejemplo, que si f es analítica, entonces todas las derivadas de f existen. El teorema de Cauchy es la clave del desarrollo del resto de la materia y sus aplicaciones.

2.1. INTEGRALES DE CONTORNO

Definiciones y propiedades básicas

Para ser capaces de estudiar el teorema de Cauchy necesitamos primero definir las integrales de contorno y estudiar sus propiedades básicas.

Sea $h : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ una función y hágase $h(t) = u(t) + iv(t)$. Supóngase, por simplicidad, que u y v son continuas. Defina

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt \in \mathbf{C}$$

donde las integrales de u y v tienen el significado usual del cálculo de una variable. Queremos extender esta definición a integrales de funciones a lo largo de curvas en $\mathbf{C}$. Una *curva* o *contorno* continuo en $\mathbf{C}$ es, por definición, una función continua $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. La curva es llamada C^1 *por tramos*, si podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tal que $\gamma'(t)$ existe en cada subintervalo abierto $]a_i, a_{i+1}[$ y es continua en $[a_i, a_{i+1}]$; la continuidad en $[a_i, a_{i+1}]$ significa que los límites $\lim_{t \to a_i+} \gamma'(t)$ y $\lim_{t \to a_{i+1}-} \gamma'(t)$ existen (véase, por ejemplo, la figura 2.1.1). A menos que se especifique lo contrario, se asumirá que las curvas son continuas y C^1 por tramos.

Definición 2.1.1. *Suponga que* f *es continua y está definida en un conjunto abierto* $A \subset \mathbf{C}$ *y que* γ: [a, b] $\to$ **C** *es una curva suave por tramos que satisface* $\gamma([a,b]) \subset A$. *La expresión*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

es llamada la integral de f *a lo largo de* γ.

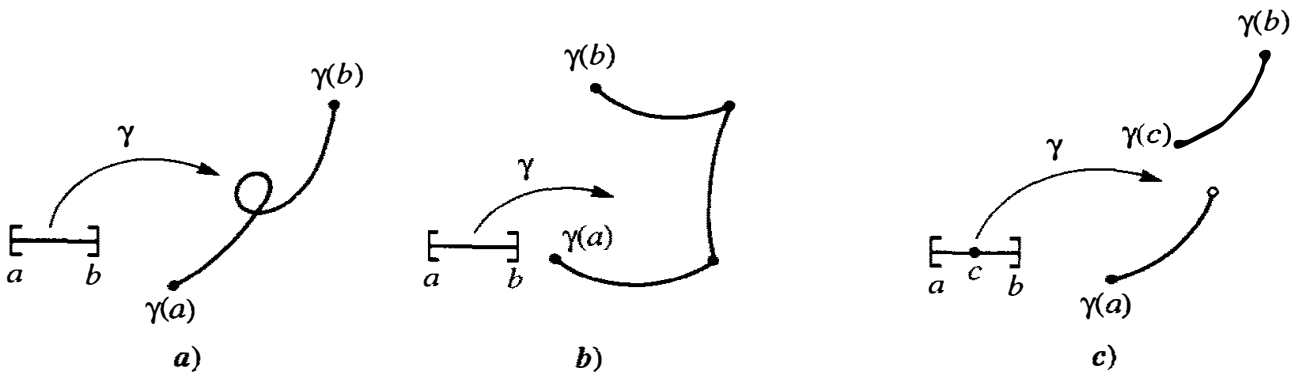


Figura 2.1.1. Curvas en **C**. (*a*) curva suave; (*b*) curva C^1 por tramos; (*c*) curva discontinua.

La definición es análoga a la siguiente definición de integral de línea del cálculo. Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones de x y y con valores reales, y sea γ una curva. Defina

$$\int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} \right] dt$$

donde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Las dos definiciones están relacionadas como sigue.

Proposición 2.1.2. *Si* f(z) = u(x, y) + iv(x, y), *entonces*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma [u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy] + i \int_\gamma [u(x, y)\,dy + v(x, y)\,dx]$$

Demostración

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)] \\ &= [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] \\ &\quad + i[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] \end{aligned}$$

Al integrar ambos lados sobre $[a_i, a_{i+1}]$ con respecto de t y al usar la definición 2.1.1 obtenemos el resultado deseado. ■

Este resultado puede recordarse fácilmente al escribir formalmente

$$f(z)\,dz = (u + iv)(dx + i\,dy) = u\,dx - v\,dy + i(v\,dx + u\,dy)$$

Para una curva γ: $[a, b] \to \mathbf{C}$, definimos la *curva opuesta*, $-\gamma$: $[a, b] \to \mathbf{C}$, como $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$. Ésta es sencillamente γ recorrida en el sentido opuesto (véase la figura 2.1.2).

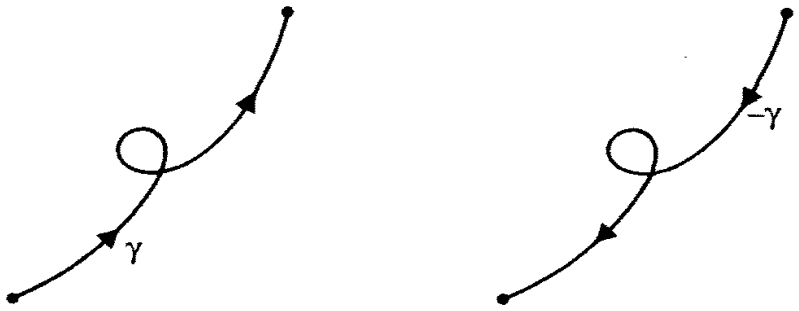


Figura 2.1.2. Curva opuesta.

También queremos definir la *unión* o *suma* $\gamma_1 + \gamma_2$ de dos curvas γ_1 y γ_2. Intuitivamente queremos unirlas por sus extremos para formar una sola curva (véase la figura 2.1.3). En forma precisa, supongamos que γ_1: $[a, b] \to \mathbf{C}$ y que γ_2: $[b, c] \to \mathbf{C}$, con $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Definamos $\gamma_1 + \gamma_2$: $[a, c] \to \mathbf{C}$ como

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c] \end{cases}$$

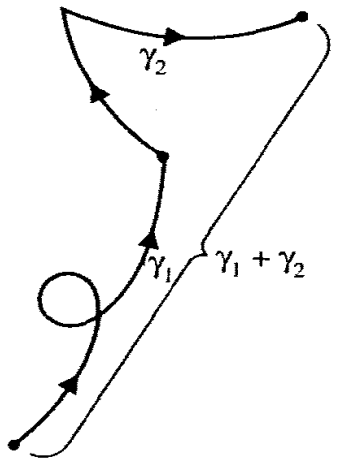


Figura 2.1.3. Unión de dos curvas.

Claramente, si γ_1 y γ_2 son suaves por tramos, entonces también lo es $\gamma_1 + \gamma_2$. Si los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$ para γ_1 y γ_2 no son de esta forma especial (el primer intervalo termina donde empieza el segundo), entonces la fórmula es un poco más complicada, pero esta forma particular será suficiente en este texto. La suma general $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ se define similarmente.

La proposición 2.1.3 da algunas propiedades de la integral que se siguen de las definiciones dadas es esta sección. Se le pide al estudiante que las demuestre en el ejercicio 6 al final de esta sección.

Proposición 2.1.3. *Para funciones (continuas)* f, g, *constantes complejas* c_1, c_2 *y curvas* γ, γ_1, γ_2, C^1*por tramos, tenemos*

(i) $$\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$$

(ii) $$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$$

(iii) $$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Por supuesto, pueden hacerse enunciados más generales (los cuales se siguen de los anteriores), a saber:

(i) $$\int_\gamma \sum_{i=1}^{n} c_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \int_\gamma f_i \right)$$

(iii) $$\int_{\gamma_1 + \cdots + \gamma_n} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$$

Para calcular ejemplos específicos es, algunas veces, conveniente usar la fórmula

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i \int_\gamma (u\,dy + v\,dx)$$

Sin embargo, puede ser que se nos da no como un mapeo, sino que se nos dice, por ejemplo, "la línea recta que une 0 con $i + 1$" o "el círculo unitario recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj". En tales casos, necesitamos elegir explícitamente un mapeo $\gamma(t)$ que describa esta curva dada en forma geométrica. Obviamente, la misma curva geométrica puede ser descrita de maneras diferentes, y así surge la pregunta de si la integral $\int_\gamma f$ es independiente de tal descripción.

Para responder a esta pregunta, necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.1.4. *Una curva (suave por tramos)* $\tilde{\gamma}$: $[\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbf{C}$ *se llama una reparametrización de* γ *si existe una función* $\mathbf{C}^1\alpha$: $[a, b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ *con* $\alpha'(t) > 0$, $\alpha(a) = \tilde{a}$ *y* $\alpha(b) = \tilde{b}$, *tal que* $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\alpha(t))$.

Las condiciones $\alpha'(t) > 0$ (por lo que α es creciente), $\alpha(a) = \tilde{a}$ y $\alpha(b) = \tilde{b}$ implican que $\tilde{\gamma}$ recorre la curva en el mismo sentido que lo hace γ. Éste es el significado preciso de la afirmación que γ y $\tilde{\gamma}$ representan la misma curva geomé-

trica (orientada) (véase la figura 2.1.4). También, los puntos en $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ en los que $\tilde{\gamma}'$ no existe corresponden, bajo α a los puntos de $[a, b]$ en los que γ' no existe. (Esto se debe a que α tiene una inversa C^1 estrictamente creciente.)

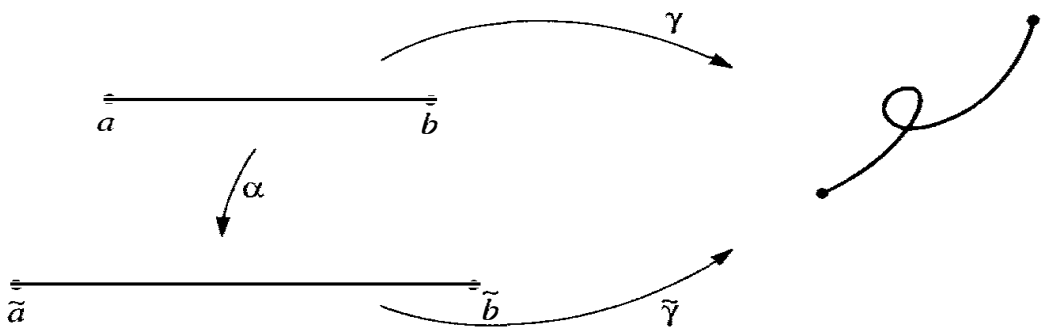


Figura 2.1.4. Reparametrización.

Proposición 2.1.5. *Si $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ, entonces*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f$$

para cualquier f *continua definida en un conjunto abierto que contiene a la imagen de γ = imagen de $\tilde{\gamma}$.*

Demostración. Si separamos $[a, b]$ en subintervalos, podemos asumir que γ es C^1. Por definición

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Por la regla de la cadena, $\gamma'(t) = d\gamma(t)/dt = d\tilde{\gamma}(\alpha(t))/dt = \tilde{\gamma}'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$. Sea $s = \alpha(t)$ una nueva variable, de tal manera que $s = \tilde{a}$ cuando $t = a$, y $s = \tilde{b}$ cuando $t = b$. Entonces

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(\alpha(t)))\tilde{\gamma}'(\alpha(t)) \frac{d\alpha}{dt}\, dt$$

$$= \int_a^b f(\tilde{\gamma}(s))\tilde{\gamma}'(s)\, ds$$

El cambio de variables en la integral compleja (en este caso t por s), se justifica al aplicar la regla usual para variables reales a las partes real e imaginaria. ■

Esta proposición "justifica" el uso de cualquier curva γ que describa a una curva geométrica orientada dada, para evaluar la integral.[1] Esta afirmación se puede ilustrar con un ejemplo. Vamos a evaluar $\int_\gamma x\,dz$, donde γ es la línea recta de $z = 0$ a $z = 1 + i$ (véase la figura 2.1.5). Elegimos la curva γ: $[0, 1] \to \mathbf{C}$, definida por $\gamma(t) = t + it$. Por supuesto, cuando escribimos x en $\int_\gamma x\,dz$, nos referimos a la función que da la parte real de un número complejo (esto es, $f(z) = x = \text{Re } z$). Por ende

$$\int_\gamma x\,dz = \int_0^1 x \circ \gamma(t)\gamma'(t)\,dt$$

Así

$$\int_\gamma x\,dz = \int_0^1 t(1 + i)\,dt = \frac{1 + i}{2}$$

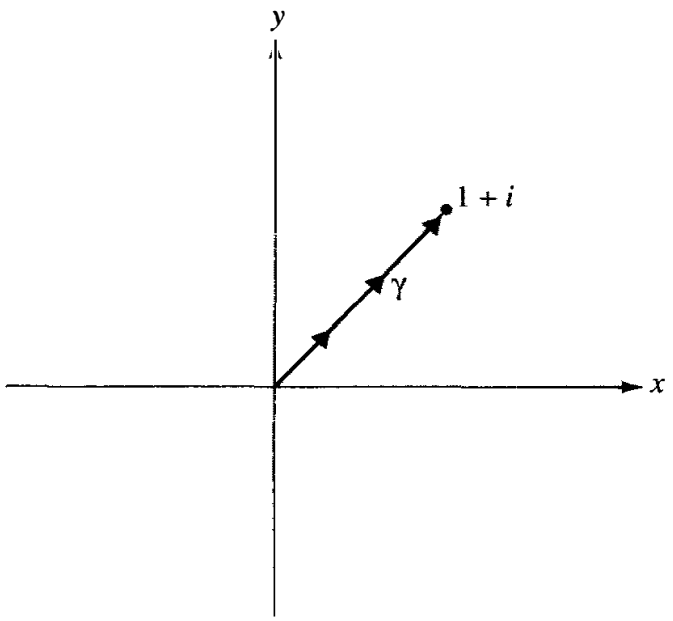


Figura 2.1.5. Curva de 0 a $1 + i$.

Con frecuencia, la orientación es descrita diciendo que "γ va de z_1 a z_2". Sin embargo, si γ es una curva cerrada sobre la cual $z_1 = z_2$, necesitamos describirla de un modo diferente. Cuando se resuelven ejemplos, donde las curvas se pueden siempre visualizar fácilmente, el estudiante deberá asumir que una curva cerrada se recorre en contra del sentido de las manecillas del reloj, a menos que se indique lo contrario.

Del cálculo, la *longitud de arco* de una curva γ: $[a, b] \to \mathbf{C}$ se define como

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

[1] Hablando estrictamente, esta afirmación no es correcta, ya que dos transformaciones con la misma imagen no necesariamente son reparametrizaciones una de la otra. Sin embargo, ellas son reparametrizaciones si ignoramos los puntos donde $\gamma'(t) = 0$. La proposición puede generalizarse para que cubra esta situación, pero las complicaciones que resultan de la generalización para cubrir este caso, pueden omitirse para simplificar la exposición.

La longitud de arco también es independiente de la parametrización, la demostración es similar a la de la proposición 2.1.5. El estudiante está familiarizado con el hecho de que la longitud de arco del círculo unitario es 2π, el perímetro del cuadrado unitario es 4, etcétera.

El siguiente resultado proporciona una importante forma de estimar integrales.

Proposición 2.1.6. *Sea* f *continua en un conjunto abierto* A *y sea* γ *una curva* C^1 *por tramos en* A. *Si existe una constante* $M \geq 0$ *tal que* $|f(z)| \leq M$ *para todo punto* z *en* γ *(esto es, para toda* z *de la forma* $\gamma(t)$ *para alguna* t), *entonces*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq M l(\gamma)$$

Más generalmente, tenemos

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq \int_\gamma |f|\,|dz|$$

donde la última integral se define como

$$\int_\gamma |f|\,|dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|dt$$

Demostración. Para una función $g(t)$ con valores complejos en $[a, b]$, tenemos que

$$\mathrm{Re} \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, g(t)\,dt$$

ya que $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$ si $g(t) = u(t) + iv(t)$. Usemos este hecho para demostrar que

$$\left| \int_a^b g(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$$

(Sabríamos, del cálculo, cómo demostrar esto si g fuera de valores reales, pero aquí es de valores complejos). Para nuestra demostración, hacemos $\int_a^b g(t)\,dt = re^{i\theta}$ para r y θ fijos, donde $r \geq 0$; de esta manera $r = e^{-i\theta}\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b e^{-i\theta}\,g(t)\,dt$. Por lo tanto

$$r = \mathrm{Re}\, r = \mathrm{Re} \int_a^b e^{-i\theta}\,g(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta}\,g(t))\,dt$$

Pero, por la proposición 1.2.3. (iii), $\mathrm{Re}\, e^{-i\theta}\,g(t) \leq |e^{-i\theta}\,g(t)| = |g(t)|$, pues $|e^{-i\theta}| = 1$. Así $\int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta}\,g(t))dt \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$ y, en consecuencia

$$\left| \int_a^b g(t)\,dt \right| = r \leq \int_a^b |g(t)|\,dt \tag{1}$$

Por ende

$$\left| \int_\gamma f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \tag{2}$$

de la desigualdad (1) y del hecho que $|zz'| = |z|\,|z'|$. La expresión (2) es una integral real ordinaria, y puesto que $|f(\gamma(t))| \leq M$, la expresión (2) está acotada por $M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = Ml(\gamma)$. ■

Esta proposición proporciona una herramienta básica que usaremos en demostraciones posteriores para estimar el tamaño de las integrales. El estudiante puede intentar demostrar este resultado directamente, en términos de la expresión

$$\int_\gamma f = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma (u\,dy + v\,dx)$$

para convencerse que el resultado no es del todo trivial. En el suplemento de esta sección se da otro enfoque.

Teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno

El teorema fundamental del cálculo es un hecho básico en el cálculo de funciones de variable real, el cual dice, esencialmente, que la integral de la derivada de una función es justamente la diferencia entre los valores de la función en los extremos del intervalo de integración y que la integral indefinida de una función es una antiderivada de la función. Estas dos afirmaciones tienen análogas importantes en integrales de trayectorias complejas.

Teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno 2.1.7. *Suponga que* γ: $[0, 1] \to \mathbf{C}$ *es una curva suave por tramos y que* $\mathbf{F}$ *es una función definida y analítica en un conjunto abierto* G *que contiene a* γ. *Entonces*

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

En particular, si $\gamma(0) = \gamma(1)$, *entonces*

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = 0$$

Demostración. La regla de la cadena y la definición de la integral de trayectoria, serán usadas para reducir el problema al teorema fundamental del cálculo de funciones reales de variable real. Sean g, u y v definidas como

$$F(\gamma(t)) = g(t) = u(t) + iv(t)$$

Entonces

$$F'(\gamma(t))\gamma'(t) = g'(t) = u'(t) + iv'(t)$$

y así

$$\begin{aligned}\int_\gamma F'(z)\,dz &= \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 g'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 u'(t)\,dt + i\int_0^1 v'(t)\,dt = [u(1)-u(0)] + i[v(1)-v(0)] \\ &= [u(1)+iv(1)] - [u(0)+iv(0)] = g(1) - g(0) \\ &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Usar este resultado puede ahorrar muchos esfuerzos al resolver ejemplos. Por ejemplo, considere $\int_\gamma z^3\,dz$ donde γ es la porción de la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ que une $z = 1$ con $z = i/2$. Para evaluar la integral simplemente notamos que $z^3 = \frac{1}{4}(dz^4/dz)$ y así

$$\int_\gamma z^3 dz = \frac{z^4}{4}\Big|_1^{i/2} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{i}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{4}\right)(1)^4 = -\frac{15}{64}$$

¡Note que ni siquiera necesitamos parametrizar la curva! Al aplicar el teorema fundamental habríamos obtenido la misma respuesta para cualquier curva que una estos dos puntos. En la siguiente subsección investigaremos, en un contexto general, la independencia del valor de una integral con respecto de la trayectoria particular usada.

El teorema fundamental tiene muchas aplicaciones y ramificaciones, una de las cuales es la siguiente demostración de una propiedad de los conjuntos abiertos conexos, que apareció por primera vez como la proposición 1.5.5. El análogo del siguiente principio en el dominio complejo, es muy útil en el cálculo. Una función cuya derivada es idénticamente 0 es constante.

Corolario 2.1.8. *Si* f *es una función definida y analítica en un conjunto abierto conexo* G $\subset$ **C**, *y si* f'(z) = 0 *para cada punto* z *en* G, *entonces* f *es constante en* G.

Demostración. Fije un punto z_0 en **G** y suponga que z es cualquier otro punto en **G**. Por la proposición 1.4.15, existe una trayectoria suave γ, de z_0 a z en G. Por el último teorema, $f(z) - f(z_0) = \int_\gamma f'(\xi)\,d\xi = 0$. En consecuencia, $f(z) = f(z_0)$. El valor de f en cualquier punto de G es asi el mismo que su valor en z_0. Esto es, f es constante en G. ■

Independencia de las integrales con respecto de la trayectoria

La idea de que una integral indefinida es una antiderivada no se traslada directamente al dominio complejo. ¿Qué debemos entender por la integral entre dos puntos? Existen varias trayectorias posibles. La conexión surge en el análisis de uno de los problemas centrales que estudiaremos en este capítulo: ¿Bajo qué condiciones el valor de una integral es independiente de la trayectoria particular que se escoja entre los dos puntos? Considere los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo. Sea $z_0 = 1$ y $z_1 = -1$ y sea $f(z) = 3z^2$. Entonces $F(z) = z^3$ es una antiderivada de f en todo el plano complejo. Por lo tanto, por el teorema fundamental, no importa la trayectoria γ de z_0 a z_1 que tomemos, tendremos que $\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) = 1^3 - (-1)^3 = 2$. El valor de la integral no depende de la trayectoria particular seleccionada, sino tan sólo de la función y de los dos extremos. ▼

Ejemplo. Nuevamente, sean $z_0 = 1$ y $z_1 = -1$, pero ahora tómese $f(z) = 1/z$. Sea γ_1 la mitad superior del círculo unitario de 1 a -1. Entonces γ_1 está parametrizada por $\gamma(t) = e^{it}$ para $0 \le t \le \pi$. Por lo tanto

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^\pi f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^\pi e^{-it}\,ie^{it}\,dt = \pi i$$

Ahora sea γ_2 la mitad inferior del círculo unitario de 1 a -1. Entonces γ_2 está parametrizada por $\gamma_2(t) = e^{-it}$ para $0 \le t \le \pi$, y

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^\pi f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt = \int_0^\pi e^{it}(-ie^{-it})\,dt = -\pi i$$

Los valores de la integral entre z_0 y z_1 ahora difieren para dos trayectorias distintas. ▼

La dependencia de la trayectoria en el segundo ejemplo, está relacionada al problema de las antiderivadas. "La" antiderivada de $f(z)$ tiene que ser $\log z$. Como vimos en el capítulo 1, es perfectamente posible definir una rama de la función logaritmo que sea analítica a lo largo de cada una de las dos curvas, pero *no* es posible definir consistentemente una sola rama del logaritmo en un conjunto abierto, que contenga simultáneamente ambas curvas. Este modo de ver la dificultad se precisa en el siguiente teorema.

Teorema de la independencia con respecto de la trayectoria 2.1.9. *Suponga que* f *es una función continua en un conjunto abierto conexo* G. *Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*:

(i) *Las integrales son independientes de la trayectoria*: *Si* z_0 *y* z_1 *son dos puntos distintos cualesquiera en* G *y* γ_0 *y* γ_1 *son trayectorias en* G *de* z_0 *a* z_1, *entonces* $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$.

(ii) *Las integrales a lo largo de curvas cerradas son iguales a* 0: *Si* Γ *es una curva cerrada (aro) contenido en* G, *entonces* $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

(iii) *Existe una antiderivada (global) de* f *en* G: *Existe una función* F *definida y analítica en todo* G *tal que* $F'(z) = f(z)$ *para toda* z *en* G.

Demostración

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) La equivalencia de (i) y (ii) se obtiene en la dirección (ii) $\Rightarrow$ (i), al unir las curvas γ_0 y $-\gamma_1$ para formar la curva cerrada Γ y en la dirección (i) $\Rightarrow$ (ii), al tomar dos puntos z_0 y z_1 a lo largo de una curva cerrada, y pensar que ésta está hecha de dos curvas, una de un punto al otro y la otra de regreso de éste al primero. La construcción se ilustra en la figura 2.1.6, y el cálculo es como sigue:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Así, la integral a lo largo de un aro cerrado Γ es 0, si y sólo si las integrales a lo largo de las trayectorias γ_0 y γ_1 son iguales.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Esta implicación se sigue del teorema fundamental. El valor de las integrales $F(z_1) - F(z_0)$ independientemente de la trayectoria que se considere.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Intentaremos usar un extremo z de la integral para definir el valor de la antiderivada en z. Sea z_0 cualquier punto fijo en G y sea z cualquier otro punto en G. Puesto que G es abierto y conexo, es conexo por trayectorias, y de la proposición 1.4.15, existe al menos una trayectoria suave en G de z_0 a z. Sea γ cualquiera de estas trayectorias y hágase $F(z) = \int_\gamma f(\xi)\,d\xi$. Esto define una función F en G sin ambigüedad alguna, pues (i) dice que el valor de $F(z)$ depende de z

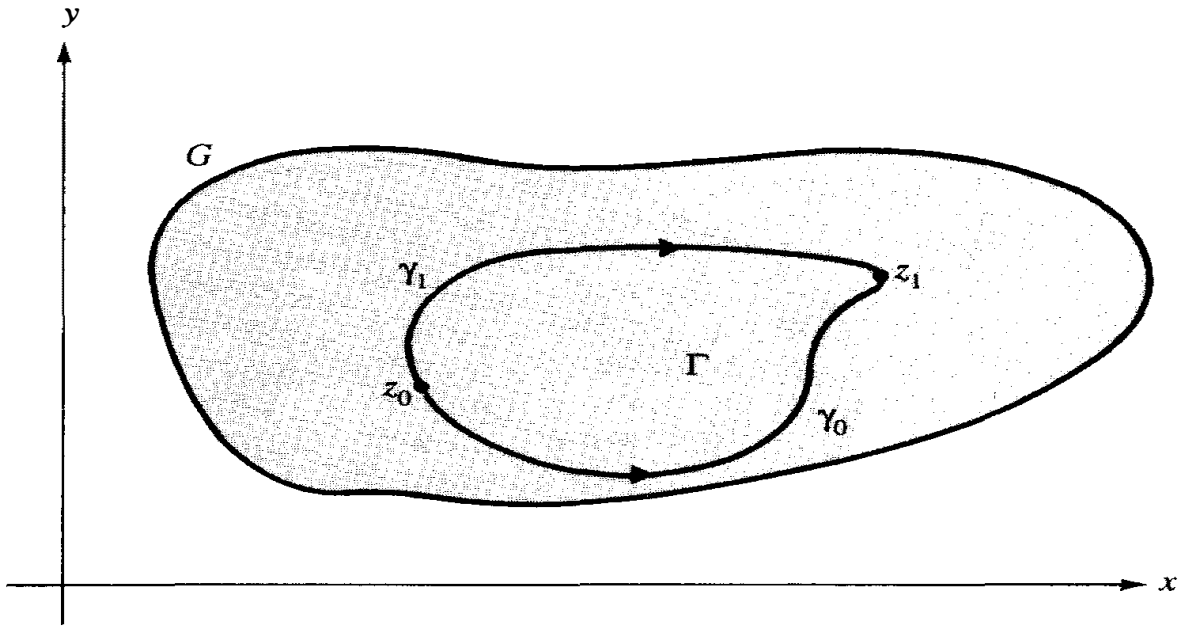


Figura 2.1.6. $\gamma_0 - \gamma_1 = \Gamma$.

y *no* de la trayectoria particular elegida, en tanto ésta se encuentre en G. (Por supuesto, también depende de z_0, pero éste se ha fijado a lo largo de toda la discusión.) Decimos que F está *bien definida.* Nos queda la tarea de verificar que F es diferenciable y que $F' = f$. Este cálculo se ilustra en la figura 2.1.7.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que G es abierto y f es continua en z, existe un número $\delta > 0$ tal que el disco $D(z; \delta) \subset G$ y $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ siempre que $|\xi - z| < \delta$. Suponga $|w - z| < \delta$. Conecte z a w con un segmento de línea recta ρ. Entonces todo ρ descansa en $D(z; \delta)$ y

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma+\rho} f(\xi)\, d\xi - \int_{\gamma} f(\xi)\, d\xi = \int_{\rho} f(\xi)\, d\xi$$

Así

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z) \right| = \frac{|F(w) - F(z) - (w - z)f(z)|}{|w - z|}$$

$$= \frac{\left| \int_{\rho} f(\xi)\, d\xi - f(z) \int_{\rho} 1\, d\xi \right|}{|w - z|}$$

$$= \frac{\left| \int_{\rho} [f(\xi) - f(z)]\, d\xi \right|}{|w - z|}$$

$$\leq \frac{\varepsilon \text{ longitud } (\rho)}{|w - z|} = \frac{\varepsilon\, |w - z|}{|w - z|} = \varepsilon$$

Por lo tanto, el límite del cociente de diferencias es $f(z)$ y, en consecuencia, F es diferenciable y $F' = f$, como se quería. ■

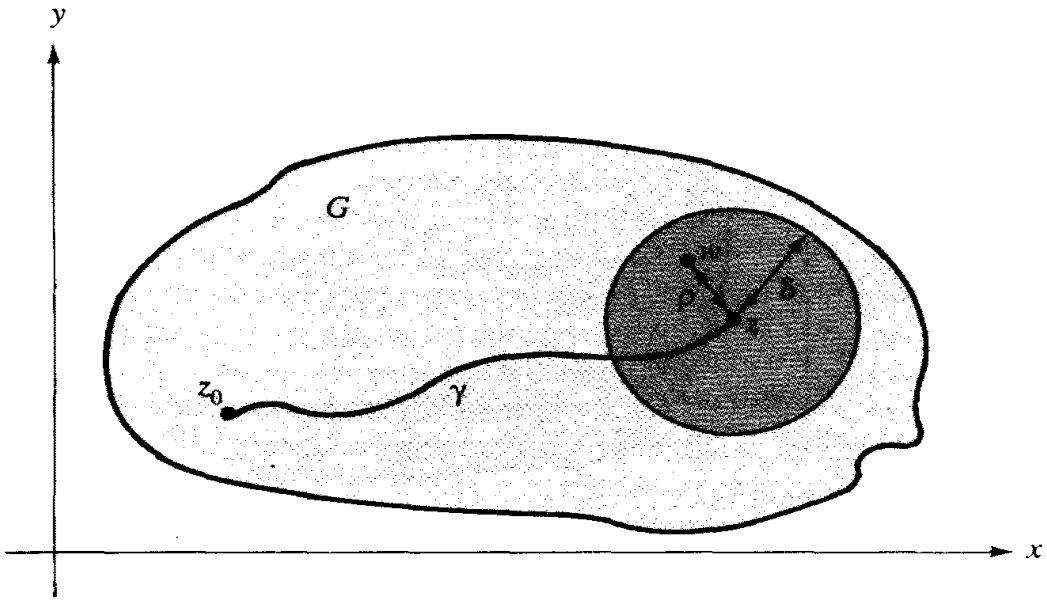


Figura 2.1.7. Definiendo una antiderivada como una integral.

El lector que esté familiarizado con campos de fuerza conservativos en cálculo, podrá reconocer la construcción en la última demostración. La integral de un campo de fuerzas a lo largo de una trayectoria, define el trabajo realizado por la fuerza (o al moverse en contra de ella) a lo largo de la trayectoria. El campo se llama *conservativo* si el trabajo neto realizado a lo largo de una trayectoria es siempre 0 o, equivalentemente, si el trabajo realizado entre dos puntos es independiente de la trayectoria que se toma entre dichos puntos. Si éste es el caso, entonces tal integral define una cantidad llamada la *energía potencial*, cuyo gradiente es el campo de fuerza original.

Ejemplos resueltos

2.1.10. *Evalúe las siguientes integrales:*

a) $\int_\gamma x\, dz$ (γ *es el contorno del cuadrado unitario*).
b) $\int_\gamma e^z\, dz$ (γ *es la parte del círculo unitario que une* 1 *a* i *en la dirección contraria al de las manecillas del reloj*).

Solución

a) Defínase γ: $[0, 4] \to \mathbf{C}$ como sigue: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, donde los cuatro lados del cuadrado unitario son:

$$\gamma_1(t) = t + 0i;\ 0 \le t \le 1 \qquad \gamma_3(t) = (3 - t) + i;\ 2 \le t \le 3$$
$$\gamma_2(t) = 1 + (t - 1)i;\ 1 \le t \le 2 \qquad \gamma_4(t) = 0 + (4 - t)i;\ 3 \le t \le 4$$

Calculamos como sigue:

$$\int_{\gamma_1} x\, dz = \int_0^1 [\mathrm{Re}\,(\gamma_1(t))]\gamma_1'(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\gamma_2} x\, dz = \int_1^2 [\mathrm{Re}\,(\gamma_2(t))]\gamma_2'(t)\, dt = \int_1^2 i\, dt = i$$

$$\int_{\gamma_3} x\, dz = \int_2^3 [\mathrm{Re}\,(\gamma_3(t))]\gamma_3'(t)\, dt = \int_2^3 -(3 - t)\, dt = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\gamma_4} x\, dz = \int_3^4 [\mathrm{Re}\,(\gamma_4(t))]\gamma_4'(t)\, dt = \int_3^4 0 dt = 0$$

Por tanto

$$\int_\gamma x\, dz = \int_{\gamma_1} x\, dz + \int_{\gamma_2} x\, dz + \int_{\gamma_3} x\, dz + \int_{\gamma_4} x\, dz = \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} + 0 = i$$

b) e^z es la derivada de la función e^z y e^z es analítica en todo **C**. Así, cualquiera que sea la parametrización que usemos para la parte del círculo unitario que une 1 a i en sentido contrario al de las manecillas del reloj, tendremos $\int_\gamma e^z\, dz = e^i - e^1$, por el

teorema fundamental. También podemos usar la definición original para evaluar la integral directamente. Defínase $\gamma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi/2$. Así

$$\int_\gamma e^z\,dz = \int_0^{\pi/2} e^{\cos t + i \operatorname{sen} t}(-\operatorname{sen} t + i\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} [-e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)\cdot \operatorname{sen} t - e^{\cos t}\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\cdot \cos t]\,dt$$

$$+ i\int_0^{\pi/2} [-e^{\cos t}\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\cdot \operatorname{sen} t + e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)\cdot \cos t]\,dt$$

$$= e^{\cos t}\cos(\operatorname{sen} t)\Big|_0^{\pi/2} + ie^{\cos t}\operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= e^{\cos t + i \operatorname{sen} t}\Big|_0^{\pi/2} = e^i - e^1$$

Claramente, el primer método es más fácil y debe usarse siempre que sea posible.

2.1.11. *Sea* γ *la mitad superior del círculo unitario descrito en el sentido contrario al de las manecillas de reloj. Muestre que*

$$\left|\int_\gamma \frac{ez}{z}\,dz\right| \le \pi e$$

Solución. Usaremos la proposición 2.1.6. La longitud de arco de γ es

$$l(\gamma) = \int_0^\pi |\gamma'(t)|\,dt = \pi$$

ya que podemos tomar $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$, y $\gamma'(t) = ie^{it}$ así $|\gamma'|(t)| = 1$. Por supuesto, esto es lo que esperábamos. El valor absoluto de e^z/z, con $z = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, se estima de acuerdo con

$$\left|\frac{e^z}{z}\right| = \frac{e^{\cos t}}{1} \le e$$

ya que $\cos t \le 1$. Así, $e = M$ es una cota para $|e^z/z|$ a lo largo de γ y, por lo tanto,

$$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz\right| \le Ml(\gamma) = e\pi$$

2.1.12. *Sea* γ *el círculo de radio* r, *alrededor de* $a \in \mathbf{C}$. *Evalúe* $\int_\gamma (z-a)^n\,dz$ *para todo entero* $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Solución. Primero, sea $n \ge 0$. Entonces

$$(z-a)^n = \frac{d}{dz}\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

que es la derivada de una función analítica y, por tanto, por el teorema fundamental 2.1.7,

$$\int_\gamma (z-a)^n \cdot dz = 0$$

Segundo, sea $n \leq -2$. Entonces, otra vez,

$$(z-a)^n = \frac{d}{dz}\frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

que es analítica en $A = \mathbf{C}\backslash\{a\}$. (Nótese que esta fórmula falla si $n = -1$.) Ya que γ está en A, nuevamente el teorema fundamental muestra que $\int_\gamma (z-a)^n\, dz = 0$.
Finalmente, sea $n = -1$. Lo más fácil es proceder directamente. Parametrizamos γ como $\gamma(\theta) = re^{i\theta} + a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (véase la figura 2.1.8). Por la regla de la cadena, $\gamma'(\theta) = rie^{i\theta}$, y así

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta}+a)-a}\, ire^{i\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} i\, d\theta = 2\pi i$$

En resumen

$$\int_\gamma (z-a)^n\, dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Ésta es una fórmula útil y tendremos ocasión de usarla más tarde.

2.1.13. *Demuestre que no existe una función analítica* f *definida en* $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ *tal que* $f'(z) = 1/z$.

Solución. Si tal f existiera, entonces, usando el teorema fundamental concluiríamos que $\int_\gamma (1/z)\, dz = 0$, donde γ es el círculo unitario. Pero por el ejemplo resuelto 2.1.12, $\int_\gamma (1/z)\, dz = 2\pi i$, por tanto, tal f no puede existir.

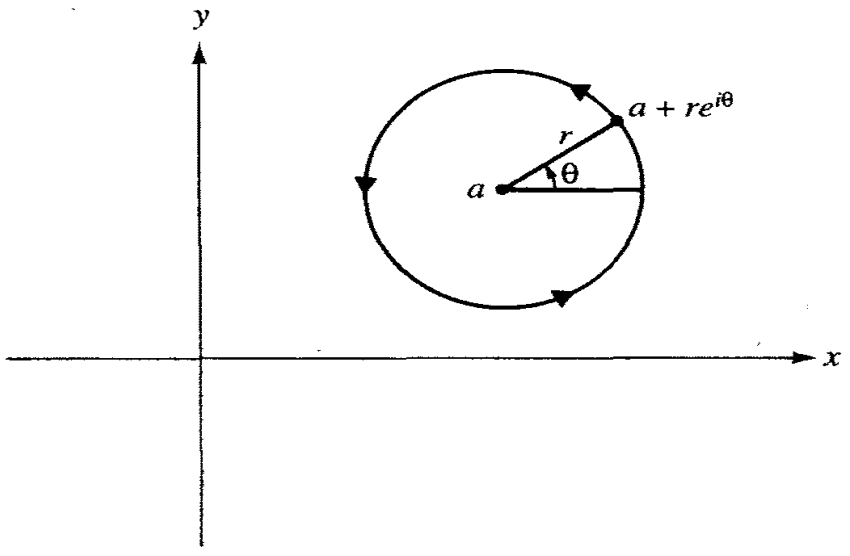


Figura 2.1.8. Parametrización del círculo de radio r con centro en a.

Observación. Aun cuando $d(\log z)/dz = 1/z$, esto no contradice este ejemplo, puesto que $\log z$ no es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$; es analítica únicamente en $\mathbf{C}$ menos el eje x negativo incluyendo al cero.

SUPLEMENTO DE LA SECCIÓN 2.1: SUMAS DE RIEMANN

La teoría de integrales de contorno complejas, puede basarse directamente en una definición en términos de aproximaciones por sumas de Riemann, como en el cálculo. Si γ es una curva de a a b en el plano complejo y f es una función definida a lo largo de γ, podemos elegir puntos intermedios $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} = b$ en γ y formar la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

(véase la figura 2.1.9). Como en el cálculo, si estas sumas se aproximan a un límite conforme al máximo de $|z_k - z_{k-1}|$ tiende a 0, tomamos ese límite como el valor de la integral $\int_\gamma f(z)\, dz$.

Las propiedades de la integral dadas en la proposición 2.1.3 se siguen en este enfoque, en mucho, de la misma manera que se siguen las propiedades correspondientes en el cálculo de variable real. Para ver que esto lleva al mismo resultado que la definición 2.1.1, cuando γ es una curva C^1, suponga que $z(t) = u(t) + iv(t)$ es una parametrización continuamente diferenciable de γ con $z(t_k) = z_k$. El teorema del valor medio garantiza que hay números t_k' y t_k'', entre t_{k-1} y t_k, tales que $z_k - z_{k-1} = [u'(t_k') + iv'(t_k'')]\,(t_k - t_{k-1})$. Así, las sumas de Riemann $\Sigma f(z_k)\,(z_k - z_{k-1})$ corresponden a las sumas de Riemann de $\int f(\gamma(t))\,(\gamma'(t))\, dt$, después de separar las partes real e imaginaria.

Este enfoque de la integral, puede ser usado para curvas más generales y es, algunas veces, útil para escribir aproximaciones a la integral. Por ejemplo, la proposición 2.1.6 puede establecerse usando la desigualdad del triángulo: para cualquier aproximación por una suma de Riemann tenemos que

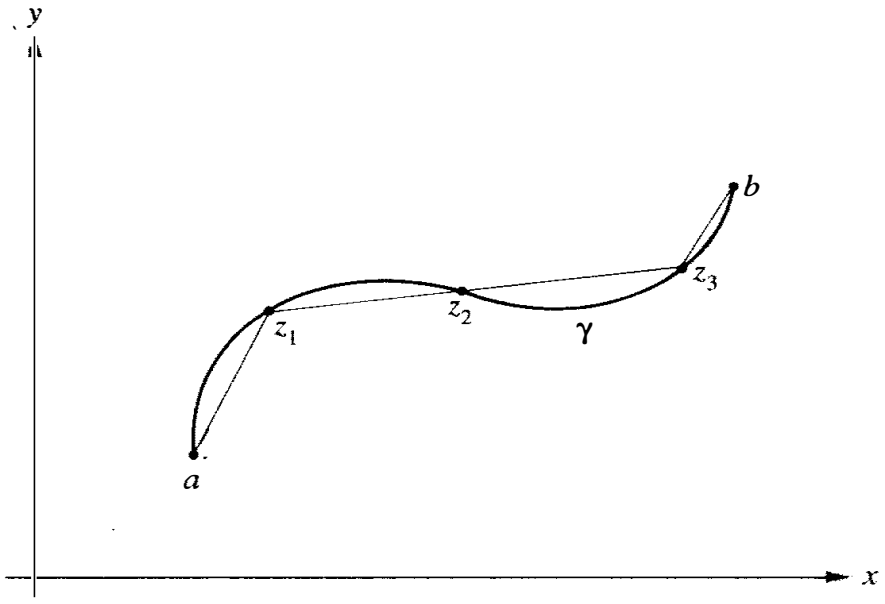


Figura 2.1.9. Una aproximación poligonal a γ.

$$\left|\sum f(z_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leq \sum |f(z_k)|\,|z_k - z_{k-1}|$$
$$\leq M \sum |z_k - z_{k-1}|$$
$$\leq Ml(\gamma)$$

El último paso usa el hecho que $|z_k - z_{k-1}|$ es la longitud del segmento de línea de z_k a z_{k-1}, el cual no es mayor que la distancia entre ellos a través de γ. Como la estimación es válida para cada aproximación, debe ser válida para la integral, que es su límite.

Ejercicios

1. Evalúe lo siguiente:

a) $\int_\gamma y\,dz$, donde γ es la unión de los segmentos de línea que unen a 0 con i y luego con $i + 2$.
b) $\int_\gamma \operatorname{sen} 2z\,dz$, donde γ es el segmento de línea que une a $i + 1$ con $-i$.
c) $\int_\gamma ze^{z^2}\,dz$, donde γ es el círculo unitario.

2. Evalúe lo siguiente:

a) $\int_\gamma x\,dz$, donde γ es la unión de los segmentos de línea que unen a 0 con i y luego con $i + 2$.
b) $\int_\gamma (z^2 + 2z + 3)\,dz$, donde γ es el segmento de línea recta que une a 1 con $2 + i$.

c) $\int_\gamma \frac{1}{z+1}\,dz$, donde γ es el círculo de radio 2 centrado en 1, recorrido una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

3. Evalúe $\int_\gamma (1/z)\,dz$, donde γ es el círculo de radio 1 centrado en 2, recorrido una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

4. Evalúe $\int_\gamma \frac{1}{z^2 - 2z}\,dz$, donde γ es la curva del ejercicio 3.

5. ¿Es $\operatorname{Re}\{\int_\gamma f\,dz\} = \int_\gamma \operatorname{Re} f\,dz$?
6. Demuestre la proposición 2.1.3.
7. Evalúe lo siguiente:

a) $\int_\gamma \bar{z}\,dz$, donde γ es el círculo unitario recorrido una vez en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj.
b) $\int_\gamma (x^2 - y^2)\,dz$, donde γ es la línea recta desde 0 a i.

8. Evalúe $\int_\gamma \bar{z}^2\,dz$ a lo largo de dos trayectorias que unen (0, 0) con (1, 1) como sigue:

a) γ es la línea recta que une (0, 0) con (1, 1).
b) γ es la línea quebrada que une (0, 0) con (1, 0) y luego une (1, 0) con (1, 1).

En vista de su respuesta a 8 *a)* y *b)* y el teorema fundamental, ¿podría ser $\bar{z}^2$ la derivada de alguna función analítica $F(z)$?

9. Estime el valor absoluto de

$$\int_\gamma \frac{dz}{2+z^2}$$

donde γ es la mitad superior del círculo unitario.

10. Sea C el arco del círculo $|z| = 2$ que está en el primer cuadrante. Muestre que

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

11. Evalúe lo siguiente:

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}; \int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|}; \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}; \int_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right|$

b) $\int_\gamma z^2\, dz$ donde γ es la curva dada por $\gamma(t) = e^{it}\,\text{sen}^3\, t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

12. Sea γ la curva cerrada que está enteramente en $\mathbf{C}\backslash\{z \mid \text{Re}\, z \leq 0\}$. Muestre que $\int_\gamma (1/z)\, dz = 0$.

13. Evalúe $\int_\gamma z\, \text{sen}\, z^2\, dz$ donde γ es el círculo unitario.

14. Dé algunas condiciones sobre una curva cerrada γ que garanticen que $\int_\gamma (1/z)\, dz = 0$.

15. Sea γ el círculo unitario. Demuestre que

$$\left| \int_\gamma \frac{\text{sen}\, z}{z^2}\, dz \right| \leq 2\pi e$$

16. Demuestre que la longitud de arco $l(\gamma)$ de una curva no cambia si se reparametriza.

2.2. EL TEOREMA DE CAUCHY: VERSIÓN INTUITIVA

En matemáticas es importante tener un conocimiento intuitivo y ser capaces de expresar es intuición en forma precisa. En esta sección se discutirá de manera un tanto informal el teorema de Cauchy; las demostraciones serán simples, y las definiciones, algo casuales (aunque enteramente adecuadas para la mayoría de las aplicaciones). En la sección 2.3 se dan definiciones más precisas, teoremas más finos y demostraciones más completas. Esa sección puede omitirse, pero tal omisión es recomendable sólo si existe el deseo de pasar rápidamente a secciones posteriores sobre aplicaciones del teorema.

Una forma del teorema de Cauchy establece que *si γ es una curva cerrada simple* (la palabra "simple" quiere decir que γ se intersecta con ella misma sólo en sus extremos)[2] *y si f es analítica* en y dentro de γ, *entonces*

$$\int_\gamma f = 0$$

(véase la figura 2.2.1).

[2] En situaciones apropiadas, γ realmente no tiene que ser simple. Este caso, más general, se discute en la sección 2.3.

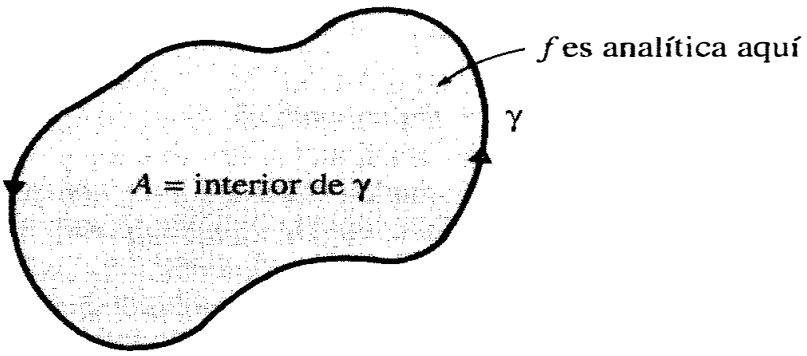


Figura 2.2.1. Teorema de Cauchy: $\int_\gamma f = 0$.

Si la función f no es analítica en todo el interior de γ, entonces la integral puede o no ser 0. Por ejemplo, sea γ el círculo unitario y $f(z) = 1/z$. Entonces, f es analítica en todo punto excepto en $z = 0$ y la integral no es cero. En efecto

$$\int_\gamma f = 2\pi i$$

por el ejercicio resuelto 2.1.12. Por otro lado, si $f(z) = 1/z^2$, entonces f es también analítica en todo punto excepto en $z = 0$, pero ahora la integral es 0. El valor 0 *no* resulta del teorema de Cauchy – f no es analítica en todo el interior de γ – sino del hecho de que f tiene una antiderivada en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, a saber, f es la antiderivada de $-1/z$. El teorema de independencia con respecto de la trayectoria (2.1.9) muestra que la conclusión del teorema de Cauchy está íntimamente ligada a la existencia de una antiderivada de f. Esto se hace explícito en la proposición 2.2.5.

Nuestra demostración del teorema de Cauchy en esta sección utiliza un teorema del cálculo avanzado llamado *el teorema de Green.* (La demostración que se da en la sección 2.3 no se basa en este teorema). *El teorema de Green establece que dadas las funciones* P(x, y) *y* Q(x, y),

$$\int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_A \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right] dx\,dy \tag{1}$$

Recuerde que si γ: $[a, b] \to \mathbf{C}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, entonces definimos

$$\int_\gamma P(x, y)\,dx = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\,dt$$

y

$$\int_\gamma Q(x, y)\, dy = \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\, dt$$

En la ecuación (1), A representa el "interior" de γ, γ se recorre en una dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj, y P y Q son lo suficientemente suaves —es suficiente que sean de clase $\mathbf{C}^1$—. (Véase un texto de cálculo tal como J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus III*, Nueva York; Springer-Verlag, 1985, pp. 908-911, o J. Marsden y Tromba, *Vector Calculus*, 2a. ed., Nueva York, W.H. Freeman and Company, 1981, pp. 404-413, para una demostración de la ecuación (1).)

En este punto el lector podría preguntar, "¿Qué es, precisamente, el interior de γ?" Intuitivamente, el significado de "interior" debe ser claro. La expresión precisa de este concepto se basa en el teorema de la curva de Jordan ("Cualquier curva cerrada simple tiene un 'interior' y un 'exterior' "), el cual será enunciado en el suplemento de la próxima sección.

Versión preliminar del teorema de Cauchy

Teorema 2.2.1. *Suponga que* f *es analítica, con la derivada* f' *continua sobre y en el interior de una curva cerrada simple* γ. *Entonces*

$$\int_\gamma \mathrm{f} = 0 \tag{2}$$

Demostración. Al poner $f = u + iv$, tenemos

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + i\, dy)$$

$$= \int_\gamma (u\, dx - v\, dy) + i \int_\gamma (u\, dy + v\, dx)$$

Al aplicar el teorema de Green, ecuación (1), a cada integral, obtenemos

$$\int_\gamma f = \iint_A \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx\, dy + i \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx\, dy$$

Ambos términos son 0 debido a las ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

En la sección 2.3 se da una demostración de una versión más precisa del teorema de Cauchy, debida a Édouard Goursat, en la cual no se asume que f' es continua.

La continuidad de f' se sigue automáticamente, pero esto no es obvio. Esto también elimina la suposición de que la curva es simple. En muchos casos, la suposición de simplicidad puede evitarse viendo la trayectoria como si estuviera formada de dos o más tramos simples. En la figura 2.2.2, la "figura en forma de ocho" es tratada como dos aros simples.

Como un ejemplo del uso de la ecuación (2), sea γ el cuadrado unitario y sea $f(z) = \text{sen } (e^{z^2})$. Entonces, f es analítica sobre y en el interior de γ (en efecto, f es entera) y así $\int_\gamma f = 0$.

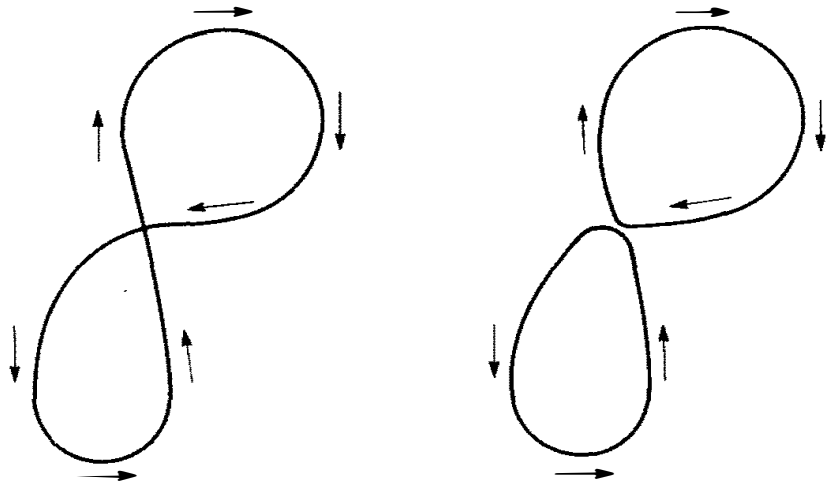


Figura 2.2.2. Tratamiento de una curva no simple como si estuviera formada por varios aros simples.

Teorema de deformación

Es importante poder ser capaces de estudiar funciones que no son analíticas en todo el interior de γ y cuya integral, en consecuencia, podría no ser 0. Por ejemplo, $f(z) = 1/z$ no es analítica en $z = 0$, y $\int_\gamma f = 2\pi i$, donde γ es el círculo unitario. (El punto $z = 0$ se llama una *singularidad* de f). Para estudiar tales funciones es importante poder remplazar $\int_\gamma f$ por $\int_{\tilde{\gamma}} f$, donde $\tilde{\gamma}$ es una curva simple (digamos, un círculo). Entonces, con frecuencia, $\int_{\tilde{\gamma}} f$ puede ser evaluada. El procedimiento que nos permite pasar de γ a $\tilde{\gamma}$ se basa en el teorema de Cauchy y es el siguiente.

Versión preliminar del teorema de Cauchy 2.2.2. *Sea* f *analítica en una región* A, *y sea* γ *una curva cerrada simple en* A. *Supóngase que* γ *puede deformarse continuamente en otra curva cerrada simple* $\tilde{\gamma}$ *sin salirse de la región* A. (*Decimos que* $\tilde{\gamma}$ *es* ***homotópica*** *a* γ *en* A). *Entonces*

$$\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f \tag{3}$$

NOTA. La definición precisa de "homotópica" se da en la sección 2.3, y la suposición de que las curvas son simples será eliminada.

El teorema de deformación se ilustra en la figura 2.2.3. Nótese que f no necesita ser analítica en el interior de γ, por lo que el teorema de Cauchy *no* implica que las integrales en la ecuación (3) son 0. En el enunciado del teorema de deformación, implícitamente se considera que tanto γ como $\tilde{\gamma}$ son recorridas en una dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj.

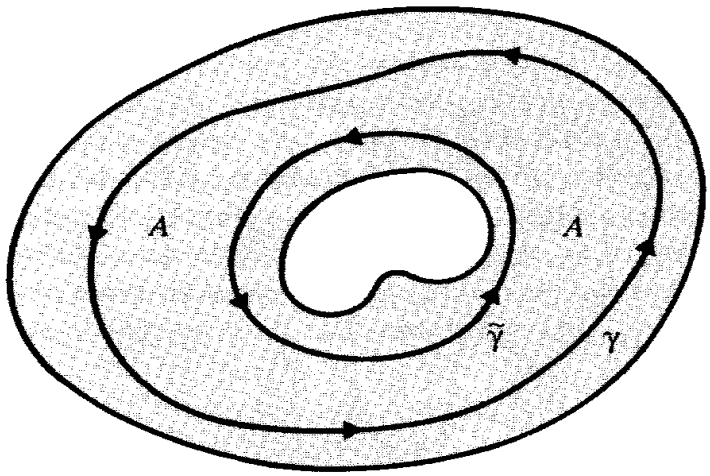


Figura 2.2.3. Teorema de deformación.

Demostración. Considérese la figura 2.2.4, en la cual está dibujada una curva γ_0 que une a γ con $\tilde{\gamma}$; asumiremos que tal curva puede ser trazada (esto se puede en todos los ejemplos prácticos). Obtenemos una nueva curva formada por γ, luego γ_0, luego $-\tilde{\gamma}$, y luego $-\gamma_0$, , en ese orden.

El interior de esta curva es la región sombreada en la figura 2.2.4. En esta región, f es analítica, por lo que el teorema de Cauchy (ecuación (2)) nos da

$$\int_{\gamma+\gamma_0-\tilde{\gamma}-\gamma_0} f = 0$$

Estrictamente hablando, esta nueva curva no es una curva cerrada simple, pero esta objeción puede eliminarse al trazar dos copias paralelas de γ_0 y tomar el límite conforme las dos copias se juntan. De

$$\int_{\gamma+\gamma_0-\tilde{\gamma}-\gamma_0} f = 0$$

obtenemos

$$\int_{\gamma} f + \int_{\gamma_0} f - \int_{\tilde{\gamma}} f - \int_{\gamma_0} f = 0$$

esto es

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f$$

como se pedía. ■

La idea básica de esta demostración es también la base de la demostración más técnica de la versión precisa del teorema de deformación considerado en la sección 2.3, pero en esta demostración más técnica, la sencillez de las ideas clave se pierde algunas veces.

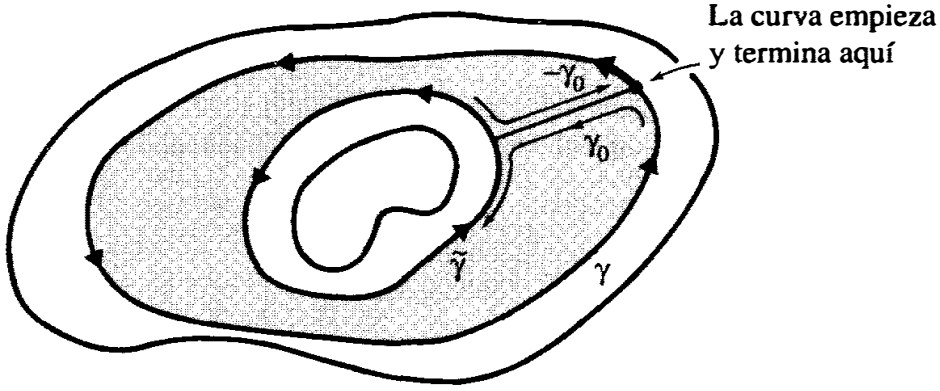


Figura 2.2.4. Curva usada para demostrar el teorema de deformación.

Regiones simplemente conexas

Una región $A \subset \mathbf{C}$ se llama simplemente conexa, si A es conexo y cualquier va γ en A puede ser deformada en A en alguna curva constante $\tilde{\gamma}(t) = z_0 \in A$; también podemos decir que γ es *homotópica a un punto* o *es contrictible a un punto*. Intuitivamente, una región es simplemente conexa cuando no tiene hoyos; esto se debe a que una curva que rodea a un hoyo, no puede reducirse a un punto en A sin salirse de A (véase la figura 2.2.5). En consecuencia, el dominio en el cual una función analítica tiene una singularidad, como $f(z) = 1/z$, *no* es simplemente conexo. Tales regiones son importantes porque deseamos estudiar singularidades en detalle en el capítulo 4.

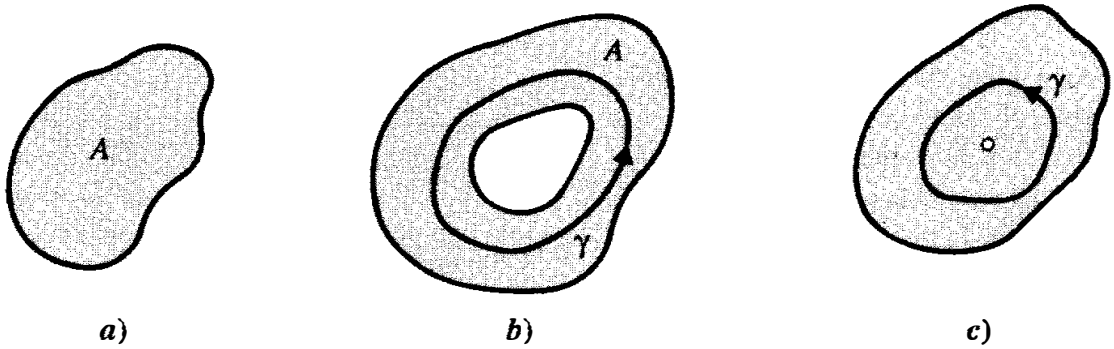


Figura 2.2.5. Región simplemente conexa (*a*) y regiones que no son simplemente conexas (*b* y *c*).

Al aplicar el teorema de la curva de Jordan (véase el suplemento de la sección 2.3) podemos demostrar que una región es simplemente conexa si, para cada curva cerrada γ en A, el interior de γ también está en A. Esta conclusión es, intuitivamente, bastante obvia y el estudiante deberá tratar de convencerse de que así es. Podemos también aplicar el teorema para probar que el interior de una curva cerrada simple es simplemente conexo.

Podemos reescribir el teorema de Cauchy en términos de regiones simplemente conexas como sigue.

Corolario 2.2.3. *Sea* f *analítica en una región simplemente conexa* A *y sea* γ *una curva cerrada simple* (C^1 *por tramos*) *en* A. *Entonces*

$$\int_{\gamma} f = 0$$

Independencia con respecto de la trayectoria y antiderivadas

En el teorema de la independencia con respecto de la trayectoria (2.1.9), vimos cómo relacionar la anulación de integrales a lo largo de curvas cerradas con la independencia de las integrales entre dos puntos con respecto de la trayectoria y la existencia de antiderivadas en regiones. Podemos sacar partido de estas ideas en el presente contexto.

Proposición 2.2.4. *Suponga que* f *es analítica en una región simplemente conexa* A. *Entonces, para cualesquiera dos curvas* γ_1 y γ_2 *que unen dos puntos* z_0 *y* z_1 *en* A (*como en la figura 2.2.6*), *tenemos* $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

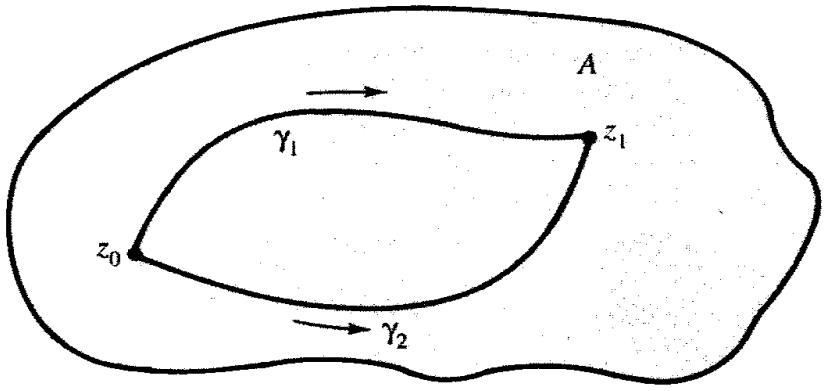


Figura 2.2.6. Independencia de la trayectoria.

Demostración. Considere la curva cerrada $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. (En esta demostración suponemos, debido a que anteriormente hemos asumido la simplicidad, que γ es una curva cerrada *simple*. Como se señaló, mostraremos en la siguiente sección que esto no es necesario.) Por el teorema de Cauchy,

$$0 = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_2} f - \int_{\gamma_1} f$$

y así

$$\int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f$$

como se quería. ■

Exactamente como en el teorema 2.1.9, también obtenemos la existencia de una antiderivada para f en la región.

Teorema de la antiderivada 2.2.5. *Sea* f *definida y analítica en una región simplemente conexa* A. *Entonces existe una función analítica* F *definida en* A *excepto por la adición de una constante, tal que* F′(z) = f(z) *para toda* z *en* A. *Decimos que* F *es la* ***antiderivada*** *de* f *en* A.

Demostración. La existencia de la antiderivada se sigue del teorema de la independencia con respecto de la trayectoria. (Estrictamente hablando, debemos primero deshacernos de la suposición de curvas simples.) La aseveración sobre la unicidad quiere decir que si F es cualquier otra de tales funciones, entonces $F_0(z) = F(z) + C$, para alguna constante C. Esto se sigue debido a que la región es conexa y $(F_0 - F)'(z) = F_0'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0$ para toda z en A. Así, $F_0 - F$ es constante en A por el corolario 2.1.8. ■

Si A no es simplemente conexa, el resultado no se satisface. Por ejemplo, si $A = \mathbf{C}\backslash\{0\}$ y $f(z) = 1/z$, no existe F definida en todo A con $F' = f$. (Véase el ejemplo resuelto 2.1.3.) En algún sentido F debiera ser el logaritmo, pero no podemos definir éste de una manera consistente en todo A. Sin embargo, en cualquier región simplemente conexa que no contenga al 0, podemos encontrar tal F. Ésta es la base de la siguiente discusión.

Proposición 2.2.6. *Sea* A *una región simplemente conexa tal que* $0 \notin$ A. *Entonces existe una función analítica* F(z), *única bajo la adición de múltiplos de* 2πi, *tal que* $e^{F(z)} = z$.

El logaritmo otra vez

Demostración. Por el teorema de la antiderivada, existe una función analítica F con $F'(z) = 1/z$ en A. Fijemos un punto $z_0 \in A$. Entonces z_0 está en el dominio de alguna rama de la función log definida en la sección 1.6. Si ajustamos F al sumarle una constante de tal manera que $F(z_0) = \log z_0$, entonces en z_0, $e^{F(z_0)} = z_0$. Queremos ahora mostrar que $e^{F(z)} = z$ es cierto para toda A. Para hacer esto, hacemos $g(z) = e^{F(z)}/z$. Entonces, puesto que $0 \notin A$, g es analítica en A, y ya que $F'(z) = 1/z$,

$$g'(z) = \frac{z \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{F(z)} - 1 \cdot e^{F(z)}}{z^2} = 0$$

Así g es constante en A. Pero $g = 1$ en z_0, por lo tanto, g es 1 en todo A. En consecuencia, $e^{F(z)} = z$ en todo A.

Para la unicidad; sean F y G funciones analíticas en A y sean $e^{F(z)} = z$ y $e^{G(z)} = z$. Entonces $e^{F(z) - G(z)} = 1$, y así, en un punto fijo z_0, $F(z_0) - G(z_0) = 2\pi ni$ para algún entero n. Pero $F'(z) = 1/z = G'(z)$, por lo tanto, tenemos $d(F - G)/dz = 0$, de lo cual concluimos que $F - G = 2\pi ni$ en todo A. ■

Escribimos $F(z) = \log z$ y llamamos a tal elección de F una *rama* de log en A. Claramente, este procedimiento generaliza el procedimiento descrito en la sección 1.6 y obtenemos el log usual como se definió en esa sección, si A es $\mathbf{C}$ menos el 0 y el eje real negativo. Nótese que este conjunto A es simplemente conexo. Sin embargo, el conjunto A en esta proposición, puede ser más complicado, como se describe en la figura 2.2.7.

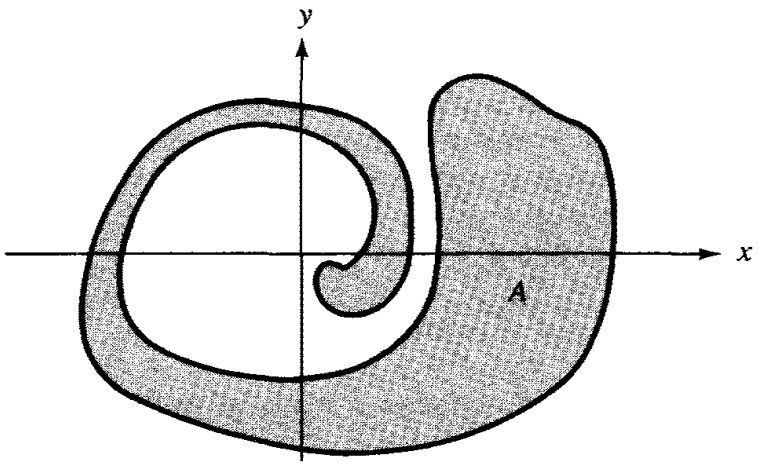


Figura 2.2.7. Un posible dominio para la función log.

Ejemplos resueltos

2.2.7. *Evalúe las siguientes integrales:*

a) $\int_\gamma e^z\,dz$, *donde* γ *es el perímetro del cuadrado unitario.*

b) $\int_\gamma 1/z^2\,dz$, *donde* γ *es el círculo unitario.*

c) $\int_\gamma 1/z\,dz$, *donde* γ *es el círculo* $3 + e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

d) $\int_\gamma z^2\,dz$, *donde* γ *es el segmento que une* $1 + i$ *con* 2.

Solución

a) e^z es entera: así, por el teorema de Cauchy, $\int_\gamma e^z\,dz = 0$, ya que γ es una curva cerrada simple. Alternativamente, e^z es la derivada de e^z, y puesto que γ es cerrada, podemos aplicar el teorema de la independencia con respecto de la trayectoria (2.1.9).

b) $1/z^2$ está definida y es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ y es la derivada de $-1/z$, que está definida y es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Por el teorema (2.1.9) y el hecho que el círculo unitario está en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, tenemos $\int_\gamma 1/z^2\,dz = 0$. Alternativamente, podemos usar el ejemplo resuelto 2.1.12, para nuestra solución.

c) El círculo $\gamma = 3 + e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, no pasa por el 0 ni lo incluye en su interior. En consecuencia, $1/z$ es analítica sobre γ y en el interior de γ, así por el teorema de Cauchy, $\int_\gamma 1/z\,dz = 0$. Una solución alternativa, pero menos directa, es la siguiente.

La región $\{x + iy \mid x > 0\}$ es simplemente conexa y $1/z$ es analítica allí. Por lo tanto, por la proposición 2.2.6, $1/z$ es la derivada de alguna función analítica $F(z)$ (una de las ramas del log z) y así, ya que γ es cerrada, tenemos, por el teorema de la independencia con respecto de la trayectoria, que $\int_\gamma 1/z\, dz = 0$.

d) z^2 es entera y es la derivada de $z^3/3$, que es también entera. Por el teorema 2.1.9,

$$\int_\gamma z^2\, dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_{1+i}^{2} = \frac{(2)^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{10}{3} - \frac{2i}{3}$$

Observación. En *a*) y en *c*) el primer método usa el teorema de Cauchy; el método alternativo se basa en el hecho más elemental de que si $f(z)$ es la derivada de otra función analítica, entonces la integral de f alrededor de un contorno cerrado, es 0 (véase el teorema de independencia con respecto de la trayectoria). Por otro lado, tenemos el teorema de la antiderivada, que establece que cualquier función analítica definida en una región simplemente conexa es la derivada de otra función analítica. Se le recuerda al estudiante que requerimos del teorema de Cauchy para poder demostrar el teorema de la antiderivada.

2.2.8. *Evalúe* $\int_\gamma (z + 1/z)^2$ *donde* γ *es la trayectoria de la línea recta de* 1 *a* i.

Primera solución. Una aproximación directa es parametrizar la trayectoria como $z = \gamma(t) = (1 - t) + it$ para $0 \le t \le 1$, meter esto dentro de la integral y calcularla. No llevaremos a cabo esto.

Segunda solución. Otra aproximación es notar que el integrando es analítico en cualquier lugar entre γ y el arco γ_0 del círculo unitario que va de 1 a i; véase la figura 2.2.8. Así, las integrales son las mismas debido a la proposición 2.2.4. La segunda trayectoria se parametriza como $z = \gamma_0(t) = e^{it}$ para $0 \le t \le \pi/2$. Allí las integrales resultan, con $f(z) = (z + 1/z)^2$,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f = \int_{\gamma_0} f &= \int_0^{\pi/2} (e^{it} + e^{-it})^2 i e^{it}\, dt = 4i \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t)(\cos t + i \operatorname{sen} t)\, dt \\
&= -4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt + 4i \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2 t)(\cos t)\, dt \\
&= \left[\frac{4}{3} \cos^3 t + 4i(\operatorname{sen} t - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t) \right] \Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{-4 + 8i}{3}
\end{aligned}$$

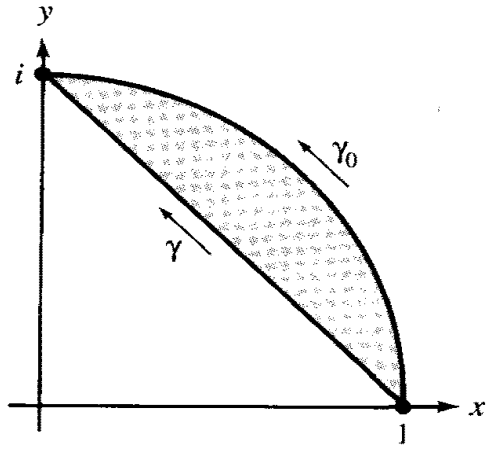


Figura 2.2.8. Dos trayectorias de 1 a *i*.

Tercera solución. El integrando tiene una antiderivada: $(z + 1/z)^2 = z^2 + 2 + 1/z^2 = (d/dz)(z^3/3 + 2z - z^{-1})$, que es válida en cualquier lugar a lo largo de la trayectoria, por tanto

$$\int_1^i \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 dz = \left(\frac{z^3}{3} + 2z - \frac{1}{z}\right)\Bigg|_1^i$$
$$= \frac{-4 + 8i}{3}$$

2.2.9. *Use el teorema de deformación para argumentar informalmente que si γ es una curva cerrada simple (no necesariamente un círculo) que contiene al 0, entonces*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

Solución. El interior de γ contiene al 0. Por lo tanto, podemos encontrar $r > 0$ tal que el círculo $\tilde{\gamma}$ de radio r y centrado en 0, está enteramente en el interior de γ. Nuestra intuición debe decirnos que podemos deformar γ en $\tilde{\gamma}$ sin pasar a través del 0 (esto es, permaneciendo en la región de analiticidad de $1/z$, $\mathbf{C}\backslash\{0\}$; véase la figura 2.2.9). Por lo tanto, el teorema de deformación y los cálculos en el ejemplo resuelto 2.1.12 muestran que

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

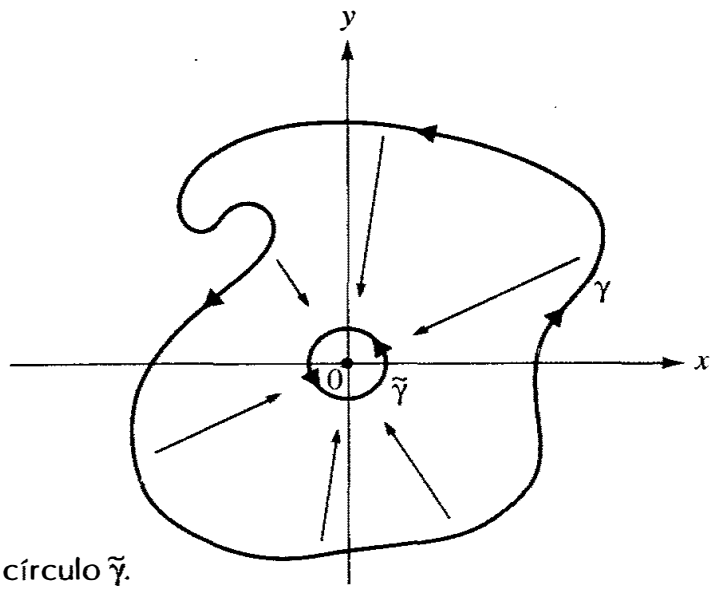


Figura 2.2.9. Deformación de γ en el círculo $\tilde{\gamma}$.

2.2.10. *Bosqueje una demostración de esta extensión del teorema de deformación. Suponga que $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son curvas cerradas simples y que γ es una curva cerrada simple con f analítica en la región entre γ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (véase la figura 2.2.10). Entonces*

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f$$

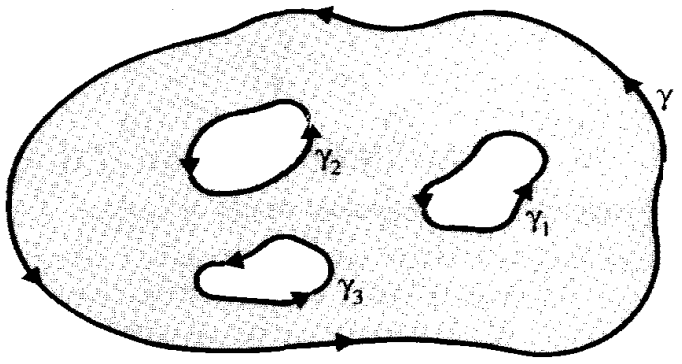


Figura 2.2.10. Teorema de deformación generalizado.

Solución. Dibuje curvas $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots, \tilde{\gamma}_n$ que unen γ con $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, respectivamente, como se muestra en la figura 2.2.11(*a*). Denótese por ρ a la curva dibujada en la figura 2.2.11(*b*). El interior de ρ es una región de analiticidad de f, y así $\int_\rho f = 0$, pero ρ consiste de $\gamma, -\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_n$, y cada $\tilde{\gamma}_i$ recorrida dos veces en direcciones opuestas y, por tanto, las contribuciones de cada una de estas últimas porciones se cancelan. Así

$$0 = \int_\gamma f + \int_{-\gamma_1} f + \cdots + \int_{-\gamma_n} f = \int_\gamma f - \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$$

como se pedía.

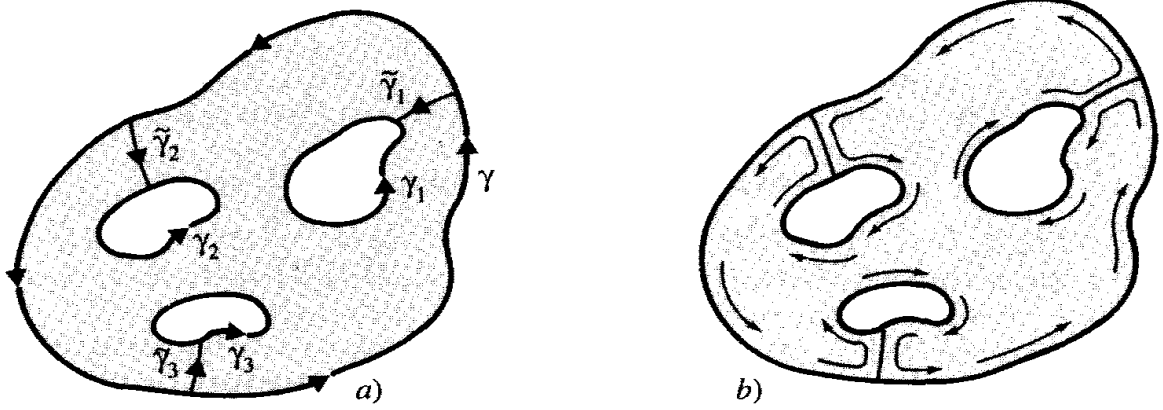


Figura 2.2.11. Trayectoria usada para demostrar el teorema de deformación generalizado.

2.2.11. *Sea* f(z) *analítica en una región simplemente conexa* A, *excepto que posiblemente no es analítica en* $z_0 \in$ A. *Suponga, sin embargo, que el valor absoluto de* f *está acotado cerca de* z_0. *Muestre que, para cualquier curva cerrada simple* γ *que contiene a* z_0, $\int_\gamma f = 0$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ y sea γ_ε el círculo de radio ε y con centro en z_0. Por el teorema de deformación, $\int_\gamma f = \int_{\gamma_\varepsilon} f$. Sea $|f(z)| \le M$ cerca de z_0. Así

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz \right| \le 2\pi\varepsilon M$$

Por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq 2\pi\varepsilon M$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, concluimos que $\int_\gamma f = 0$.

Ejercicios

1. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_\gamma (z^3 + 3)\, dz$, donde γ es la mitad superior del círculo unitario.

b) $\int_\gamma (z^3 + 3)\, dz$, donde γ es el círculo unitario.

c) $\int_\gamma e^{1/z}\, dz$, donde γ es un círculo de radio 3 centrado en $5i + 1$.

d) $\int_\gamma \cos [3 + 1/(z - 3)]\, dz$, donde γ es el cuadrado unitario con esquinas en 0, 1, $1 + i$ e i.

2. Sea γ una curva cerrada simple que contiene al 0. Argumente informalmente que

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz = 0$$

3. Sea f entera. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, e^{ki\theta}\, d\theta$$

para k un entero, $k \geq 1$.

4. Discuta la validez de la fórmula $\log z = \log r + i\theta$ para el log en la región A que se muestra en la figura 2.2.7.

5. ¿Para qué curvas cerradas simples γ se satisface lo siguiente:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0$$

6. Evalúe $\int_\gamma (z - (1/z))\, dz$, donde γ es la trayectoria de la línea recta de 1 a i.

7. El teorema de Cauchy se satisface separadamente para las partes real e imaginaria de f?. Si así es, demuéstrelo, si no lo es, dé un contraejemplo.

8. Sea γ_1 el círculo de radio 1 y sea γ_2 el círculo de radio 2 y centrados en el origen (recorridos en sentido contrario al de las agujas del reloj). Muestre que

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3(z^2 + 10)} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3(z^2 + 10)}$$

9. Evalúe $\int_\gamma \sqrt{z}\, dz$, donde γ es la mitad superior del círculo unitario primero directamente, luego, usando el teorema fundamental (2.1.7).

10. Evalúe $\int_\gamma \sqrt{z^2 - 1}\, dz$, donde γ es un círculo de radio $\frac{1}{2}$ centrado en 0.

11. Evalúe

$$\int_\gamma \frac{2z^2 - 15z + 30}{z^3 - 10z^2 + 32z - 32}\, dz$$

donde γ es el círculo $|z| = 3$. (*Sugerencia*: Use fracciones parciales; una raíz del denominador es $z = 2$.)

2.3. EL TEOREMA DE CAUCHY: VERSIÓN PRECISA

En la sección 2.2 se desarrolló cierta familiaridad con los teoremas del tipo de Cauchy, siendo el tema básico el de que si una función es analítica en todo el interior de un contorno cerrado, entonces su integral sobre el contorno debe ser 0. El objetivo principal de esta sección es dar la demostración precisa de una de las formas del teorema conocida como *versión homotópica del teorema de Cauchy*. Se toma este enfoque porque hace precisa la noción intuitiva, presentada en la última sección, sobre la deformación continua de una curva. El objetivo principal será dar la formulación precisa y la demostración, de los teoremas de deformación que dicen, someramente, que si una curva se deforma continuamente dentro de una región donde una función es analítica, entonces la integral a lo largo de la curva no cambia. En el curso de la demostración de los resultados no se usará el teorema de Green. En su lugar se usará un enfoque diferente. El lector notará también que en esta sección no se hace referencia a las "curvas cerradas simples" (excepto al final de la sección, donde se establece la conexión entre el teorema de Cauchy y el teorema de la curva de Jordan) sino tan sólo a "curvas cerradas". Ésta es otra ventaja técnica del enfoque que se usa aquí.

Versión local del Teorema de Cauchy

Empecemos por analizar el importante caso especial en el cual la curva está contenida en un disco en el que la función es analítica. El método es el clásico y elegante procedimiento de bisección, introducido por Édouard Goursat en 1883 (véase *Acta Mathematica,* Vol. 14, 1884, y *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 1, 1900, pp. 14-16).

En la mayor parte de esta sección, por "curva" se entiende "curva C_1 por tramos". Sin embargo, en cierto punto del desarrollo, resultará importante que esto se pueda desechar y que podamos considerar curvas continuas si estamos interesados tan sólo en integrar funciones analíticas en un conjunto abierto que contenga a la curva. El proceso para llevar esto a cabo es un tanto indirecto y es tratado en el suplemento A de esta sección.

Teorema para un disco de Cauchy-Goursat 2.3.1. *Suponga que* $f: D \to \mathbf{C}$ *es analítica en un disco* $D = D(z_0; \rho) \subset \mathbf{C}$, *entonces*

(i) f *tiene una antiderivada en* D, *esto es, existe una función* $F: D \to \mathbf{C}$ *que es analítica en* D *y que satisface que* $F'(z) = f(z)$ *para toda* z *en* D.
y
(ii) Si Γ *es cualquier curva cerrada en* D, *entonces* $\int_\Gamma f = 0$.

De la discusión en la sección 2.1 sobre la independencia de la integral con respecto de la trayectoria (véase el teorema 2.1.9), sabemos que (i) y (ii) son equivalentes, en el sentido de que una vez que una de ellas se establece primero, la otra será una consecuencia inmediata. Nuestro problema es cómo obtener alguna de

ellas. En la demostración del teorema de la independencia con respecto de la trayectoria (2.1.9), se mostró que (ii) se sigue fácilmente de (i) y la construcción de una antiderivada para obtener (i) fue proporcionada por la independencia con respecto de la trayectoria de las integrales. El plan es ahora curiosamente indirecto.

Primero: Demostrar (ii) directamente para el muy especial caso en que γ es la frontera de un rectángulo.

Segundo: Mostrar que esta versión limitada de la independencia con respecto de la trayectoria es suficiente para llevar a cabo la construcción de una antiderivada, similar a aquella de la demostración del teorema de la independencia con respecto de la trayectoria.

Tercero: Con (i) así establecida, la parte (ii), en su total generalidad, se sigue del mismo modo que en el teorema de independencia con respecto de la trayectoria.

El primer paso está incluido en el siguiente:

Teorema de Cauchy-Goursat para un rectángulo 2.3.2. *Suponga que* R *es una trayectoria rectangular con lados paralelos a los ejes y que* f *es una función definida y analítica en un conjunto abierto* G *que contiene a* R *y a su interior. Entonces* $\int_R f = 0$

Una demostración de esto puede basarse prácticamente en el teorema de Green, como se delineó en la sección 2.2. Si se interpreta la integral, en términos del cálculo de variable real, como un par de integrales de línea de una función con valores vectoriales en torno a la curva R, el teorema de Green convertirá esto en integrales dobles de ciertas cantidades en el interior de R. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f dicen que dicha cantidad debe ser 0, por lo que la integral debe ser 0. La dificultad con esto es que para aplicar el teorema de Green no sólo debemos saber que f es diferenciable sino que también la derivada es continua. Nosotros preferimos no tener que asumir eso. Esto resulta ser verdadero, pero usaremos el teorema de Cauchy para demostrarlo, por lo que lo mejor será no usar dicha suposición en la demostración del teorema de Cauchy o nos veremos atrapados en un círculo lógico muy estrecho. En 1883, Édouard Goursat notó un modo inteligente de establecer el teorema directamente sin recurrir al teorema de Green. Éste es esencialmente el método que presentamos aquí. Éste tiene la ventaja lógica que acabamos de mencionar, además de que *no* requiere que el lector éste familiarizado con el teorema de Green.[3]

Demostración. Sea P el perímetro de R y Δ la longitud de su diagonal. Divida el rectángulo R en cuatro rectángulos congruentes más pequeños $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, $R^{(4)}$. Si cada uno de ellos es orientado en la dirección contraria al sentido de las agujas del reloj, entonces la cancelación de los lados comunes nos da

[3] También se han dado otras demostraciones; por ejemplo, Pringsheim (*Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 2, 1902) usa triángulos en lugar de rectángulos, lo cual tiene algunas ventajas. La demostración original de Cauchy es más parecida a la que se dio en la sección anterior (él tenía implícitamente el contenido del teorema de Green en su demostración; de hecho, Green no formuló el teorema de Green como tal, hasta cerca de 1830, mientras que el teorema de Cauchy está dado en *Mémoire sur les intégrales définies prises éntre des limites imaginaires*, que apareció en 1825). Una demostración de Dixon se da en S. Lang, *Complex Variables*, Nueva York, Spring-Verlag, 2a. ed., 1985, y una demostración basada en homologías se da en L. Ahlfors, *Complex Analysis*, Nueva York, McGraw-Hill, 2a. ed., 1966.

$$\int_R f = \int_{R^{(1)}} f + \int_{R^{(2)}} f + \int_{R^{(3)}} f + \int_{R^{(4)}} f$$

Puesto que

$$\left|\int_R f\right| \leq \left|\int_{R^{(1)}} f\right| + \left|\int_{R^{(2)}} f\right| + \left|\int_{R^{(3)}} f\right| + \left|\int_{R^{(4)}} f\right|$$

para al menos alguno de los rectángulos, debemos tener que $\left|\int_{R^{(k)}} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_R f\right|$. Llámesea este subrectángulo R_1. Note que el perímetro y la diagonal de R_1 son la mitad de los de R (figura 2.1.3). Repita ahora este proceso de bisección para obtener una sucesión $R_1, R_2, R_3, \ldots$ de rectángulos cada vez más y más pequeños tales que

(i) $$\left|\int_{R_n} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{R_{n-1}} f\right| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_R f\right|$$

(ii) Perímetro $(R_n) = \frac{1}{2^n}$ perímetro $(R) = \frac{P}{2^n}$

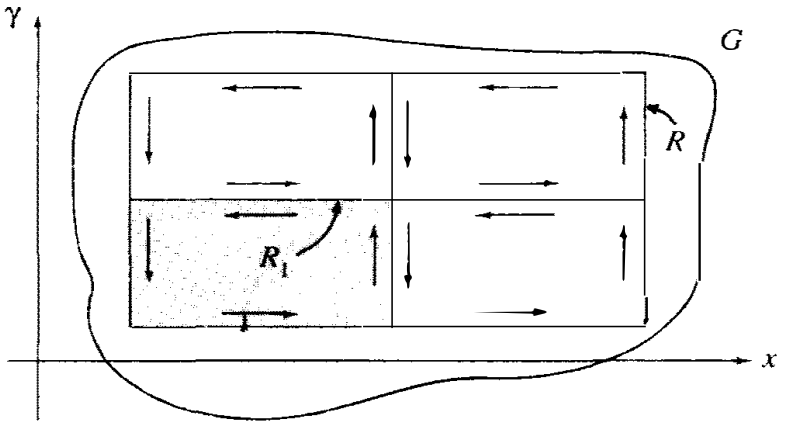


Figura 2.3.1. Procedimiento de bisección.

(iii) Diagonal $(R_n) = \frac{1}{2^n}$ diagonal $(R) = \frac{\Delta}{2^n}$

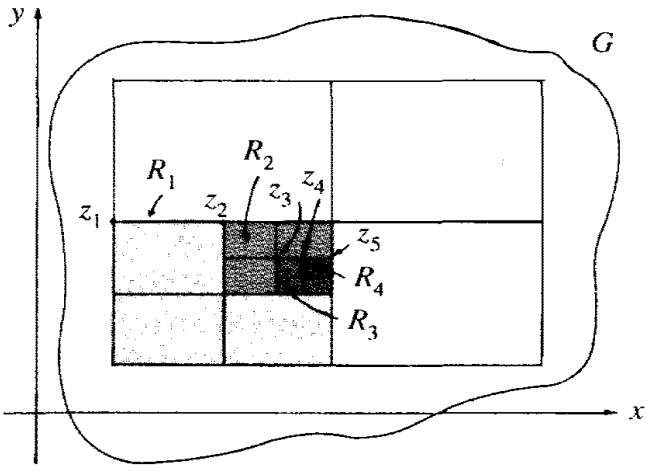


Figura 2.3.2. Repetición del proceso de bisección de Goursat para la demostración del teorema de Cauchy para un rectángulo.

Dado que estos rectángulos están anidados uno en el otro y se tiene que las diagonales tienden a 0, deben reducirse a un solo punto w_0. Para ser precisos, sea z_n la esquina superior izquierda de R_n. Si $m > n$, entonces $|z_n - z_m| \leq$ diagonal $(R_n) = \Delta/2^n$, por lo que $\{z_n\}$ forma una sucesión de Cauchy que debe converger a algún punto w_0. Si z es cualquier punto dentro del rectángulo R_n, entonces puesto que toda z_k, para $k \geq n$, está dentro de R_n, la distancia de z a w_0 no puede ser mayor que la longitud de la diagonal de R_n. Esto es, $|z - w_0| \leq \Delta/2^n$ para z en R_n.

De (i) vemos que $|\int_R f| \leq 4^n |\int_{R_n} f|$. Para obtener una estimación suficientemente buena del lado derecho de esta desigualdad, usaremos la diferenciabilidad de f en el punto w_0.

Para $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(z) - f(w_0)}{z - w_0} - f'(w_0) \right| < \varepsilon$$

siempre que $|z - w_0| < \delta$. Si escogemos n suficientemente grande de modo que $\Delta/2^n$ sea menor que δ, entonces

$$|f(z) - f(w_0) - (z - w_0) f'(w_0)| < \varepsilon |z - w_0| \leq \varepsilon \, \Delta/2^n$$

para todo punto z dentro del rectángulo R_n. Más aún, por el teorema de independencia con respecto de la trayectoria (2.1.9),

$$\int_{R_n} 1 dz = 0 \quad \text{y} \quad \int_{R_n} (z - w_0)\, dz = 0$$

Ya que z es una antiderivada de 1, $(z - w_0)^2/2$ es una antiderivada de $(z - w_0)$, y la trayectoria R_n es cerrada. Así,

$$\begin{aligned}
\left| \int_R f \right| &\leq 4^n \left| \int_{R_n} f \right| \\
&= 4^n \left| \int_{R_n} f(z)\, dz - f(w_0) \int_{R_n} 1 dz - f'(w_0) \int_{R_n} (z - w_0)\, dz \right| \\
&\leq 4^n \left| \int_{R_n} [\, f(z) - f(w_0) - (z - w_0) f'(w_0)]\, dz \right| \\
&\leq 4^n \int_{R_n} \left| f(z) - f(w_0) - (z - w_0) f'(w_0) \right| |dz| \\
&\leq 4^n \left(\frac{\varepsilon \Delta}{2^n} \right) \cdot \text{perímetro } (R_n) \\
&\leq \varepsilon \Delta P
\end{aligned}$$

Puesto que esto es válido para toda $\varepsilon > 0$, debemos tener que $|\int_R f| = 0$ y por tanto $\int_R f = 0$, como se deseaba. ▼

Podemos ahora llevar adelante el segundo paso de la demostración del teorema de Cauchy-Goursat para un disco (2.3.1). Puesto que la función, f, es analítica en el disco $D = D(z_0; \rho)$, el resultado que se acaba de mostrar para un rectángulo, muestra que la integral de f es 0 a lo largo de cualquier rectángulo en D. Esto es suficiente para construir una antiderivada de f en forma muy similar a como se hizo en la demostración del teorema de la independencia con respecto de la trayectoria (2.1.9), y establecer así la parte (i) del teorema.

Nuevamente definiremos la antiderivada $F(z)$ como una integral de z a z_0. Sin embargo, no sabemos aún si tal integral es independiente de la trayectoria. En su lugar especificaremos una elección particular de la trayectoria y usaremos la nueva información disponible —la analiticidad de f y la geometría de la situación, conjuntamente con el caso rectangular del teorema de Cauchy— para mostrar que obtenemos una antiderivada. Durante la duración de esta demostración usaremos la notación $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ para denotar la trayectoria poligonal que va de un punto a a un punto b que consta de dos segmentos, primero uno paralelo al eje x y después uno paralelo al eje y, como en la figura 2.3.3.

Si el punto b está en el disco $D(a; \delta)$ centrado en a, entonces la trayectoria $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ está contenida en ese disco. Así, para $z \in D$, podemos definir la función $F(z)$ como

$$F(z) = \int_{\langle\langle z_0, z\rangle\rangle} f(\xi)\, d\xi$$

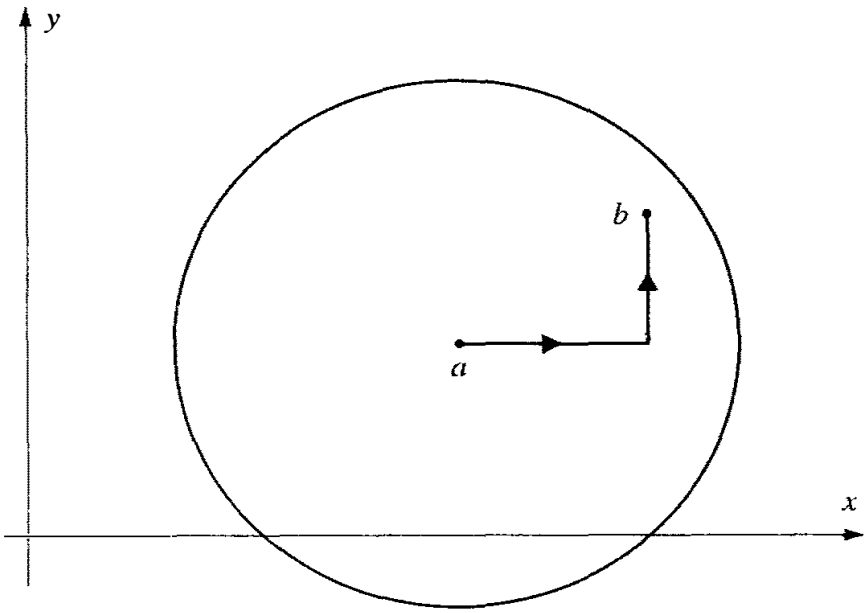


Figura 2.3.3. La trayectoria $\langle\langle a, b\rangle\rangle$.

Queremos mostrar que $F'(z) = f(z)$. Para ello necesitamos mostrar que

$$\lim_{w \to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z)$$

Fijando $z \in D$ y $\varepsilon > 0$, usamos el hecho de que D es abierto y f es continua en D para elegir $\delta > 0$ suficientemente pequeña, de modo que $D(z; \delta) \subset D$ y $|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon$ para $\xi \in D(z; \delta)$. Si $w \in D(z; \delta)$, entonces la trayectoria $\langle\langle z, w\rangle\rangle$ está contenida en $D(z; \delta)$ y por tanto en D. Las trayectorias $\langle\langle z_0, z\rangle\rangle$ y $\langle\langle z_0, w\rangle\rangle$ están también contenidas en D y estas tres trayectorias se ajustan exactamente a una trayectoria rectangular R,

también contenida en D, y que tiene una esquina en z, véase la figura 2.3.4. Podemos escribir, para los dos casos de la figura 2.3.4,

$$\int_{\langle\langle z_0,\, z\rangle\rangle} f(\xi)\, d\xi \pm \int_R f(\xi)\, d\xi + \int_{\langle\langle z_0,\, w\rangle\rangle} f(\xi)\, d\xi = \int_{\langle\langle z_0,\, w\rangle\rangle} f(\xi)\, d\xi$$

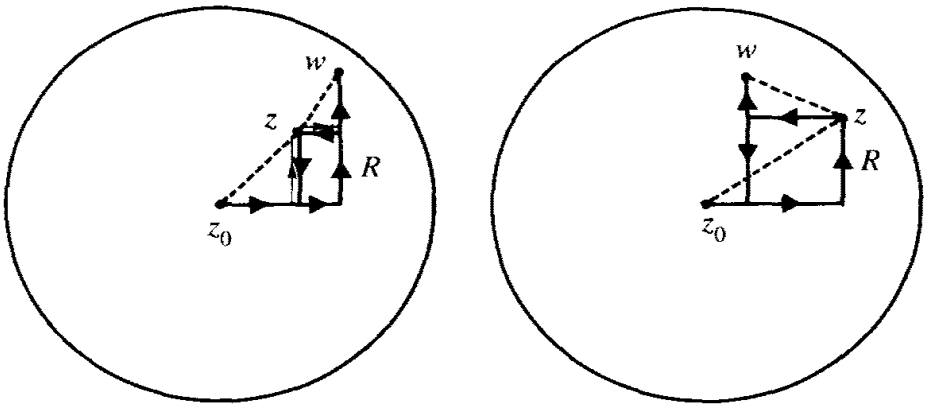


Figura 2.3.4. Dos posibles configuraciones para R, z_0, z y w.

Por el teorema de Cauchy-Goursat para un rectángulo (2.3.2), $\int_R f(\xi)\, d\xi = 0$, así la ecuación precedente toma la forma

$$F(z) + \int_{\langle\langle z,\, w\rangle\rangle} f(\xi)\, d\xi = F(w)$$

Ya que ninguno de los lados del triángulo rectángulo definido por $\langle\langle z,\, w\rangle\rangle$ puede ser mayor que su hipotenusa, la cual tiene longitud $|z - w|$ concluimos que la longitud de $(\langle\langle z,\, w\rangle\rangle) \leq 2|z - w|$, y por tanto

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z)\right| &= \frac{1}{|w - z|}\left|\int_{\langle\langle z,\, w\rangle\rangle} f(\xi)\, d\xi - f(z)(w - z)\right| \\
&= \frac{1}{|w - z|}\left|\int_{\langle\langle z,\, w\rangle\rangle} f(\xi)\, d\xi - f(z)\int_{\langle\langle z,\, w\rangle\rangle} 1\, d\xi\right| \\
&= \frac{1}{|w - z|}\left|\int_{\langle\langle z,\, w\rangle\rangle} |f(\xi) - f(z)]\, d\xi|\right| \\
&\leq \frac{1}{|w - z|}\int_{\langle\langle z,\, w\rangle\rangle} |f(\xi) - f(z)|\, |d\xi| \\
&\leq \frac{1}{|w - z|}\varepsilon \text{ longitud } (\langle\langle z,\, w\rangle\rangle) \leq \frac{1}{|w - z|}\varepsilon \cdot 2|w - z| = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{w \to z} = \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z)$$

y en consecuencia $F'(z) = f(z)$, como se deseaba. Puesto que f tiene una antiderivada definida en todo D y γ es una curva cerrada en D, tenemos que $\int_\gamma f = 0$ por el teorema de independencia con respecto de la trayectoria (2.1.9). Esto establece la parte (ii) del teorema y así la demostración está completa. ■

Vecindades agujeradas

Por razones técnicas que serán evidentes en la sección 2.4, será útil tener la siguiente variante de (2.3.2).

Lema 2.3.3. *Supóngase que* R *es una trayectoria rectangular con lados paralelos a los ejes, y que* f *es una función definida en un conjunto abierto* G *que contiene a* R *y su interior, y que* f *es analítica en* G *excepto en algún punto fijo* z_1 *en* G *que no está sobre la trayectoria* R. *Suponga que en* z_1, *la función* f *satisface que* $\lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = 0$. *Entonces.* $\int_R f = 0$.

Nótese que la condición en este lema es válida bajo cualquiera de las tres situaciones siguientes:

(i) Si f es acotada en una vecindad agujerada de z_1.
(ii) Si f es continua en G

o

(iii) Si $\lim_{z \to z_1} f(z)$ existe

Demostración. Si z_1 está fuera de R, entonces la situación es justamente la del teorema de Cauchy-Goursat para un rectángulo (2.3.2), así que podemos asumir que z_1 está en el interior de R. Para $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $|z - z_1|\,|f(z)| < \varepsilon$, siempre que $|z - z_1| < \delta$. Escójase δ suficientemente pequeña para lograr eso y de modo que el cuadrado S de lados con longitud δ centrado en z_1, esté completamente dentro de R. Entonces, a lo largo de todo S tenemos que $|f(z)| < \varepsilon / |z - z_1|$. Ahora divida R en nueve subrectángulos extendiendo los lados de S como se muestra en la figura 2.3.5.

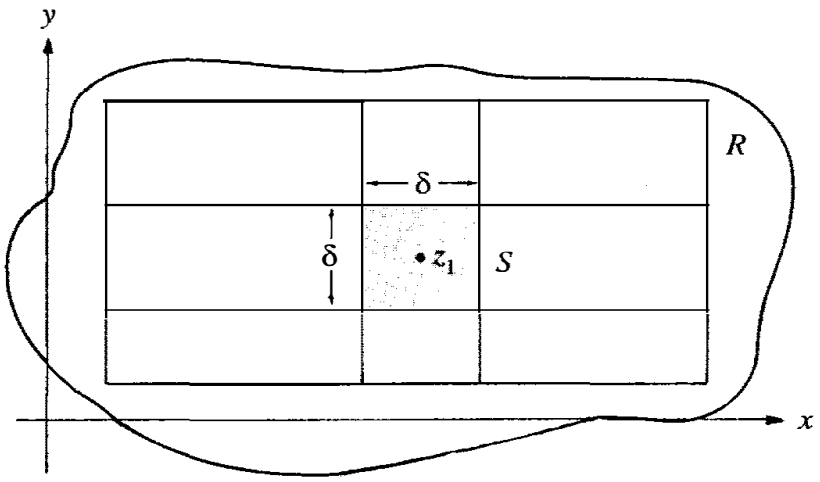


Figura 2.3.5. La construcción de S y la subdivisión de R para la demostración del lema 2.3.3.

Debido al teorema de Cauchy-Goursat para un rectángulo (2.3.2), las integrales de f alrededor de los ocho subrectángulos distintos de S son iguales a 0, por lo tanto $\int_S f = \int_R f$. Pero a lo largo de S tenemos

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - z_1|} \leq \frac{\varepsilon}{\delta/2} = \frac{2\varepsilon}{\delta}$$

ya que $|z - z_1| \geq \delta/2$ a lo largo de S. Así

$$\left| \int_S f \right| \leq \text{longitud } (S) \frac{2\varepsilon}{\delta} = 4\delta \frac{2\varepsilon}{\delta} = 8\varepsilon$$

Por consiguiente, $|\int_R f| \leq |\int_S f| \; \delta \; 8\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$. Así, debemos tener que $|\int_R f| = 0$ y así $\int_R f = 0$, como se deseaba. ▼

Si reforzamos la suposición sobre f y asumimos que es continua en z_1, entonces podemos desistir de la condición que z_1 no está sobre la trayectoria R.

Lema 2.3.4. *Suponga que* R *es una trayectoria rectangular con lados paralelos a los ejes, y que* f *es una función definida y continua en un conjunto abierto* G *que contiene a* R *y su interior, y que* f *es analítica en* G *excepto en algún punto fijo* z_1 *en* G. *Entonces* $\int_R f = 0$.

El único problema real es estar seguros que la integral se comporta bien si el rectángulo R pasa por z_1. En este caso, la subdivisión es un poco diferente, pero los cálculos son más sencillos.

Demostración. Otra vez, sea $\varepsilon > 0$. Podemos escoger δ de tal manera que $|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$, siempre que $|z - z_1| < \delta$. Si z_1 no está sobre R, entonces se aplica el lema 2.3.3. Si está sobre R, sea S la mitad del cuadrado de lado δ, y subdivídase R como se muestra en la figura 2.3.6.

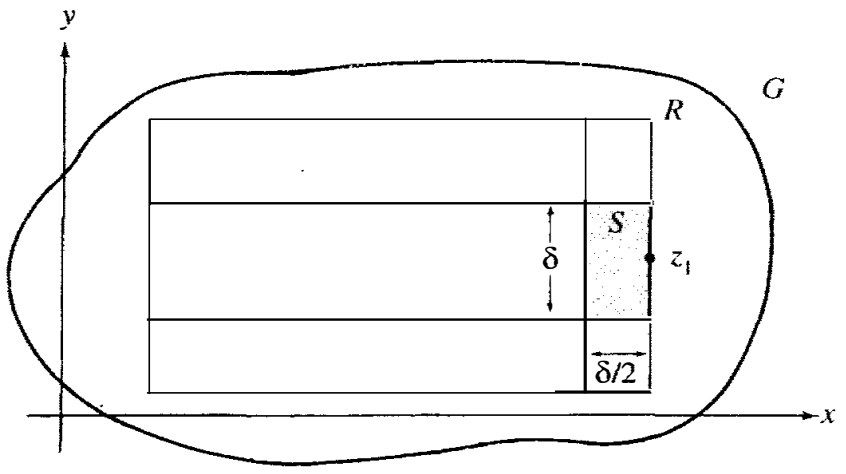


Figura 2.3.6. Lo que pasa si z_1 está en R.

Por el teorema de Cauchy-Goursat para rectángulos (2.3.2), las integrales de f a lo largo de los cinco subrectángulos distintos de S son iguales a 0 y, por tanto, $\int_S f =$

$\int_R f$. Pero a lo largo de S tenemos que $|f(z)| < \varepsilon$. De este modo, si también pedimos que $\delta < \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\left| \int_S f \right| \leq \text{longitud } (S)\, \varepsilon = 2\delta\varepsilon < \varepsilon$$

Por lo tanto, $|\int_R f| \leq |\int_S f| \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$ y así debemos tener que $|\int_R f| = 0$. Así, $\int_R f = 0$, como se deseaba. ▼

Si usamos el lema 2.3.4 en vez del teorema de Cauchy-Goursat para un rectángulo (2.3.2) en la demostración del teorema 2.3.1, obtenemos las correspondientes conclusiones:

Teorema fortalecido de Cauchy-Goursat para un disco 2.3.5. *Las mismas conclusiones que en el teorema de Cauchy-Goursat para un disco* (2.3.1) *son válidas, si asumimos únicamente que la función es continua en* D *y analítica en* $G\backslash\{z_1\}$ *para algún punto fijo* z_1 *en* D.

Note que se asume la continuidad en z_1. Nuevamente se necesita aplicar el lema 2.3.4 y estar seguros que la integral $\int_\gamma f$ está definida aun si γ pasa a través de z_1. Nótese también que una versión más complicada, pero paralela, del mismo argumento producirá la misma conclusión, si hay un número finito de puntos "malos" en G, en vez de sólo uno.

Homotopía y regiones simplemente conexas

Para extender el teorema de Cauchy a regiones más generales que discos o rectángulos, y demostrar los teoremas de deformación, debemos clarificar el concepto de deformación de curvas u homotopía que se discutió informalmente en la sección 2.2. Hay dos situaciones a ser tratadas: dos curvas diferentes entre los mismos dos extremos y dos curvas cerradas que pueden no cruzarse en absoluto. Por conveniencia, supondremos que todas las curvas están parametrizadas en el intervalo [0, 1], a menos que se especifique otra cosa. (Esto puede hacerse siempre, reparametrizando si es necesario.)

Definición 2.3.6. *Suponga que* γ_0: [0, 1] $\to$ G *y* γ_1: [0, 1] $\to$ G *son dos curvas continuas de* z_0 *a* z_1 *en un conjunto* G. *Decimos que* γ_0 ***es homotópica con extremos fijos*** *a* γ_1 *en* G *si existe una función continua* H: [0, 1] $\times$ [0, 1] $\to$ G, *del cuadrado unitario* [0, 1] $\times$ [0, 1] *en* G, *tal que*

(i) $H(0, t) = \gamma_0(t)$ *para* $0 \leq t \leq 1$
(ii) $H(1, t) = \gamma_1(t)$ *para* $0 \leq t \leq 1$
(iii) $H(s, 0) = z_0$ *para* $0 \leq s \leq 1$

y

(iv) $H(s, 1) = z_1$ *para* $0 \leq s \leq 1$

La idea detrás de esta definición es simple. Conforme s varía de 0 a 1, tenemos una familia de curvas que cambian o se deforman continuamente, de γ_0 a γ_1, como en la figura 2.3.7. El lector debe tener en cuenta que el dibujo no necesita ser de apariencia tan simple como esta ilustración. Las curvas pueden virar, torcerse o cruzarse sobre sí mismas o con respecto de la otra. No se hace la suposición que las curvas son simples, pero usualmente esto no importa. Un poco más de notación puede hacer más claro el asunto. Si hacemos $\gamma_s(t) = H(s, t)$, entonces cada γ_s es una curva continua de z_0 a z_1 en G. La curva inicial es γ_0 y corresponde al lado izquierdo del cuadrado unitario. La curva final es γ_1 y corresponde al lado derecho del cuadrado. Todo el lado inferior va a z_0, y todo el lado superior va a z_1. Las curvas γ_s son una familia de curvas intermedias que cambian continuamente.

Por ejemplo, el segmento de línea recta de 0 a $1 + i$, el cual es parametrizado por $\gamma_0(t) = t + ti$, es homotópico con extremos fijos a la trayectoria parabólica que va de 0 a $1 + i$, parametrizada por $\gamma_1(t) = t + t^2 i$; véase la figura 2.3.8.

Una posible homotopía de una curva a la otra es

$$H(s, t) = t + t^{1+s} i$$

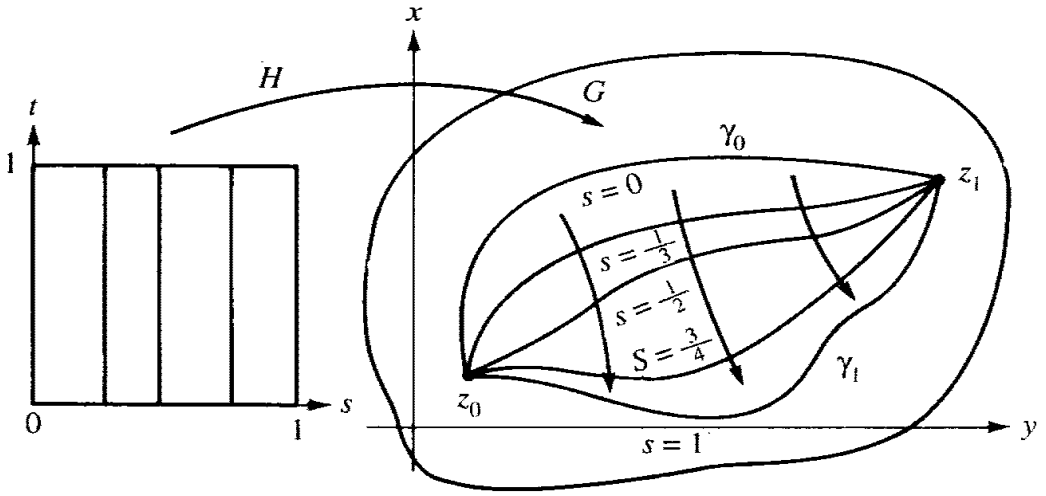


Figura 2.3.7. Homotopía con extremos fijos.

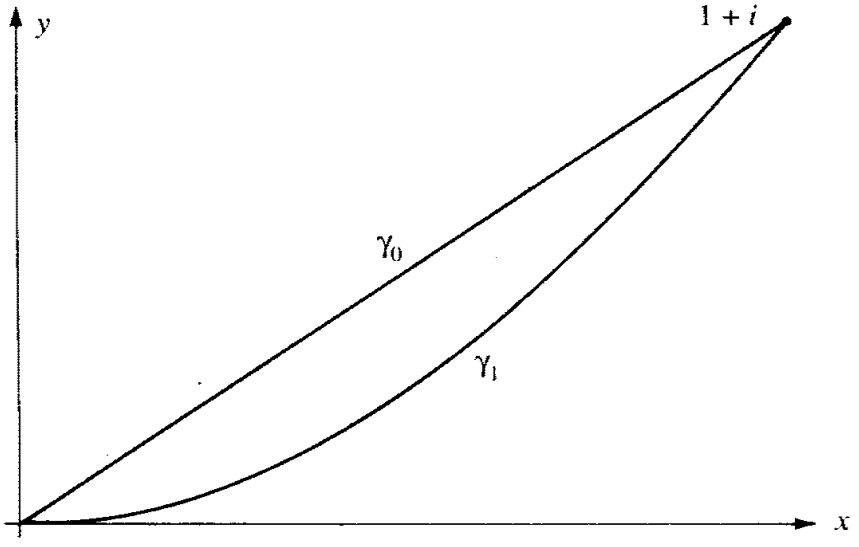


Figura 2.3.8. Una trayectoria rectilínea y una trayectoria parabólica de 0 a $1 + i$.

Por supuesto existe más de una forma de obtener una homotopía entre estas dos curvas. Otra manera de hacer que $H(s, t)$ siga la línea recta entre $t + ti$ y $t + t^2i$:

$$H(s, t) = s(t + ti) + (1 - s)(t + t^2i) = t + [st + (1 - s)t^2]i$$

Se requiere una definición ligeramente diferente para la deformación de una curva *cerrada* en otra.

Definición 2.3.7. *Suponga que* γ_0: [0, 1] → G *y* γ_1: [0, 1] → G *son dos curvas cerradas continuas en un conjunto* G. *Decimos que* γ_0 *y* γ_1 *son* ***homotópicas como curvas cerradas en*** G, *si existe una función continua* H: [0, 1] × [0, 1] → G, *del cuadrado unitario* [0, 1] × [0, 1] *en* G, *tal que*

(i) $H(0, t) = \gamma_0(t)$ *para* $0 \le t \le 1$
(ii) $H(1, t) = \gamma_1(t)$ *para* $0 \le t \le 1$

y

(iii) $H(s, 0) = H(s, 1)$ *para* $0 \le s \le 1$

Otra vez, si hacemos $\gamma_s(t) = H(s, t)$, entonces cada γ_s es una curva continua en G. La tercera condición dice que cada una de ellas es una curva cerrada; véase la figura 2.3.9.

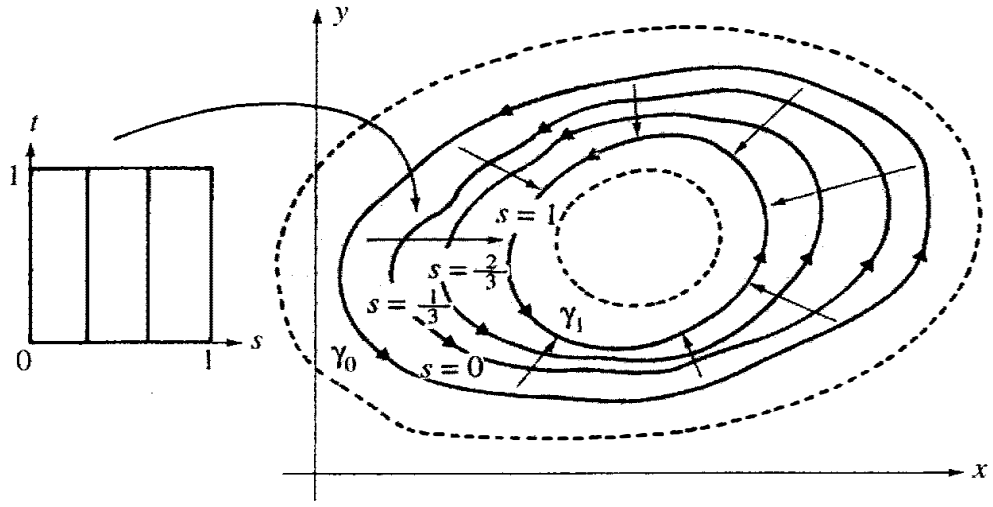


Figura 2.3.9. Homotopía de curvas cerradas.

Por ejemplo, el círculo unitario puede ser parametrizado como $\gamma_0(t) = \cos t + i$ sen t, y la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$, como $\gamma_1(t) = 2 \cos t + i$ sen t. Estas curvas son homotópicas como curvas cerradas en el anillo $G = \{z | \frac{1}{2} < |z| < 3\}$. Una posibilidad para la homotopía es $H(s, t) = (1 + s) \cos t + i$ sen t. (Véase la figura 2.3.10.)

Si en la figura 2.3.10 el hoyo no estuviera en medio de G, pero tuviéramos en lugar de eso el disco sólido $D = \{z$ tal que $|z| < 3\}$, entonces cualquiera de las dos curvas podrá ser deformada continuamente en un punto. Por ejemplo, $H(s, t) = (1 - s)\,\gamma_0(t)$ es una homotopía que contrae al círculo γ_0, hasta una curva constante en el punto 0. Las curvas intermedias γ_s son círculos de radio $(1 - s)$ centrados en el 0. Si γ_0 fuera cualquier otra curva en D, entonces la misma definición de H nos daría una homotopía que cambia continuamente la escala de la curva hasta contraerla a un punto. Así, cualquier curva en D es homotópica a un punto en D. Si hubiera un hoyo en el con-

junto, como lo hay en el anillo de la figura 2.3.10, entonces no podría hacerse esto si la curva rodeara el hoyo. Esto nos conduce a una definición más precisa de la noción de regiones simplemente conexas que aquella que se introdujo informalmente en la sección 2.2.

Definición 2.3.8. *Un conjunto es llamado* ***simplemente conexo*** *si toda curva cerrada* γ *en* G *es homotópica (como una curva cerrada) a un punto en* G, *esto es, a alguna curva constante.*

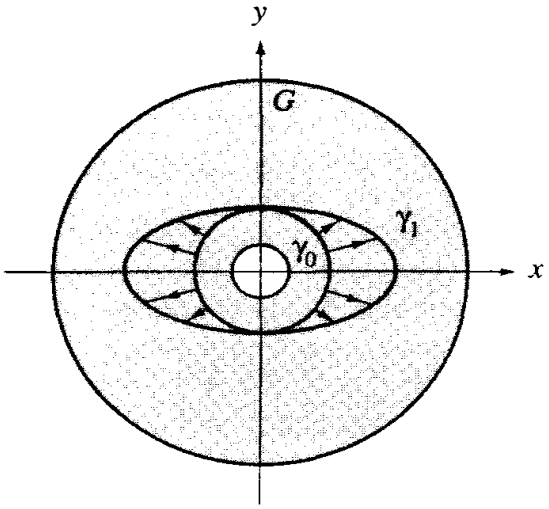


Figura 2.3.10. Un círculo homotópico a una elipse.

La segunda homotopía entre la línea recta y la parábola en la figura 2.3.8, que se siguió a lo largo de segmentos de línea recta y la homotopía de un círculo hasta un punto en el disco, son sugestivas y nos conducen a la definición de dos importantes clases de conjuntos simplemente conexos. Recuérdese que si z_0 y z_1 son dos puntos cualesquiera y $0 \leq s \leq 1$, entonces el punto $sz_1 + (1 - s)z_0$ están en el segmento de línea recta entre los dos.

Definición 2.3.9. *Un conjunto es llamado* ***convexo*** *si contiene el segmento de línea recta entre cualquier pareja de sus puntos. Esto es, si* z_0 *y* z_1 *están en* A, *entonces también lo está* $sz_1 + (1 - s)z_0$, *para cualquier número* s *entre* 0 *y* 1, (figura 2.3.11.)

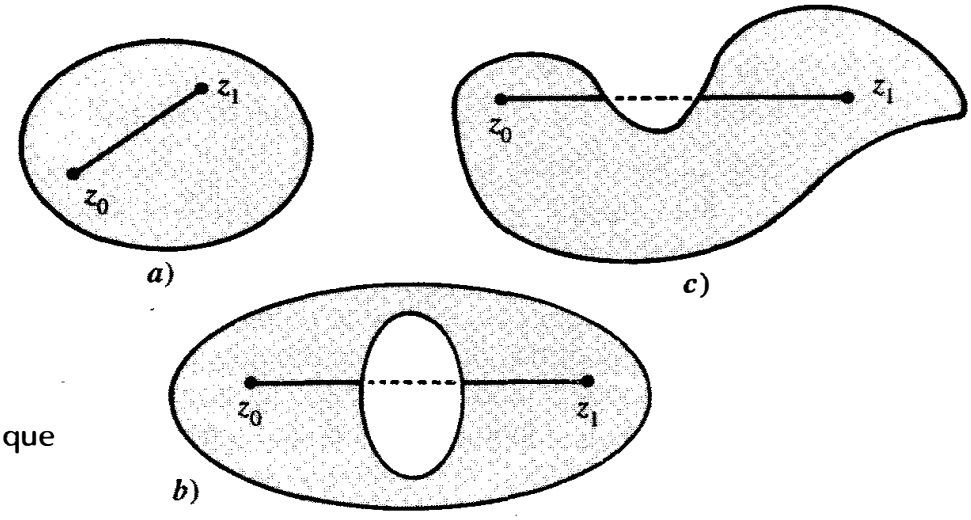


Figura 2.3.11. Un conjunto que es convexo (*a*) y dos que no lo son (*b* y *c*).

Proposición 2.3.10. *Si* A *es una región convexa, entonces cualesquiera dos curvas cerradas en* A *son homotópicas como curvas cerradas y cualesquiera dos curvas con los mismos extremos son homotópicas con extremos fijos.*

Demostración. Sean γ_0: [0, 1] $\to G$ y γ_1: [0, 1] $\to G$ dos curvas y defina $H(s, t)$ como $H(s, t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t)$. Entonces $H(s, t)$ descansa sobre el segmento de línea recta entre $\gamma_0(t)$ y $\gamma_1(t)$ y, por tanto, está en el conjunto A. Ésta es una función continua, ya que γ_0 y γ_1 son continuas. En $s = 0$ obtenemos $\gamma_0(t)$, y en $s = 1$ obtenemos $\gamma_1(t)$. Si éstas son curvas cerradas, entonces

$$H(s, 0) = s\gamma_1(0) + (1 - s)\gamma_0(0) = s\gamma_1(1) + (1 - s)\gamma_0(1) = H(s, 1)$$

y, por tanto, es una homotopía con curvas cerradas entre las dos. Si ambas van de z_0 a z_1, entonces $H(s, 0) = s\gamma_1(0) + (1 - s)\gamma_0(0) = sz_0 + (1 - s)z_0 = z_0$, y $H(s, 1) = s\gamma_1(1) + (1 - s)\gamma_0(1) = sz_1 + (1 - s)z_1 = z_1$ y, por tanto, H es una homotopía de extremos fijos entre las dos. ■

Corolario 2.3.11. *Una región convexa es simplemente conexa.*

Demostración. Sea z_0 cualquier punto en la región convexa A y sea γ cualquier curva cerrada en A. La curva constante en z_0, $\gamma_1(t) = z_0$ para toda t, es ciertamente cerrada y las dos son homotópicas por la proposición 2.3.10. ■

Un tipo ligeramente más general de región simplemente conexa llamada *región estrellada* (o en *forma de estrella*) será considerada en los ejercicios. Para regiones más complicadas, a menudo nos atenemos a nuestra intuición geométrica para determinar cuando dos curvas son homotópicas. En otras palabras, tratamos de determinar cuándo podemos deformar continuamente una curva en otra sin abandonar nuestra región. Una razón es que, en la práctica, raramente usamos las homotopías, H, explícitamente; éstas son, usualmente, herramientas teóricas cuya existencia nos permite postular algo más. Frecuentemente ésta es la igualdad de dos integrales. En algunas situaciones también podría ser muy complicado realmente escribirlas. Sin embargo, debemos estar preparados para justificar nuestra intuición geométrica, o con una H explícita o con una demostración de su existencia en alguna situación particular.

Teorema de deformación

Teorema de deformación 2.3.12. *Suponga que* f *es una función analítica en un conjunto abierto* G *y que* γ_0 y γ_1 *son curvas* C^1 *por tramos en* G.

(i) *Si* γ_0 y γ_1 *son trayectorias de* z_0 *a* z_1 *y son homotópicas en* G *con extremos fijos, entonces*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

(ii) *Si* γ_0 *y* γ_1 *son curvas cerradas que son homotópicas como curvas cerradas en* G, *entonces*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Demostración. La suposición de homotopía significa que existe una función continua H: $[0, 1] \times [0, 1] \to G$, del cuadrado unitario *en* G, que lleva a cabo una deformación continua de γ_0 a γ_1 en G. Para cada valor de s, la función $\gamma_s(t) = H(s, t)$ es una curva intermedia tomada durante la deformación. Similarmente, para cada valor fijo de t, la función $\gamma_t(s) = H(s, t)$ describe una curva que cruza desde $H(0, t) = \gamma_0(t)$ hasta $H(1, t) = \gamma_1(t)$. Así, una malla de líneas horizontales y verticales en el cuadrado define una correspondiente malla de curvas en G, con el lado izquierdo del cuadrado correspondiendo a γ_0, y el lado derecho a γ_1. En el caso de extremos fijos, $\gamma_0(s)$ es una curva constante en z_0, y $\gamma_1(s)$ es una curva constante en z_1. En el caso de curvas cerradas, éstas son la misma curva, de $\gamma_0(0)$ $(= \gamma_0(1))$ a $\gamma_1(0)$ $(= \gamma_1(1))$. (Véanse las figuras 2.3.12 y 2.3.13.) Se previene al lector que la malla de curvas en G no necesita lucir tan bonita como en esta ilustración, ya que puede torcerse y cruzar sobre sí misma, resultando algo de apariencia tan enmarañada como una red para peces arrojada sobre la playa. Sin embargo, esto no importa para la demostración.

La idea de la demostración es usar la continuidad uniforme para restringir el problema a discos más pequeños, usar el teorema de Cauchy para un disco, y luego reunir nuevamente las piezas para obtener el resultado deseado. Deseamos una partición del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ tomando puntos intermedios $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = 1$ y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ lo suficientemente cercanos, para formar cuadrados tan pequeños, que cada más pequeño cuadrado de la malla resultante sea mapeado dentro de un disco que está completamente contenido en G,

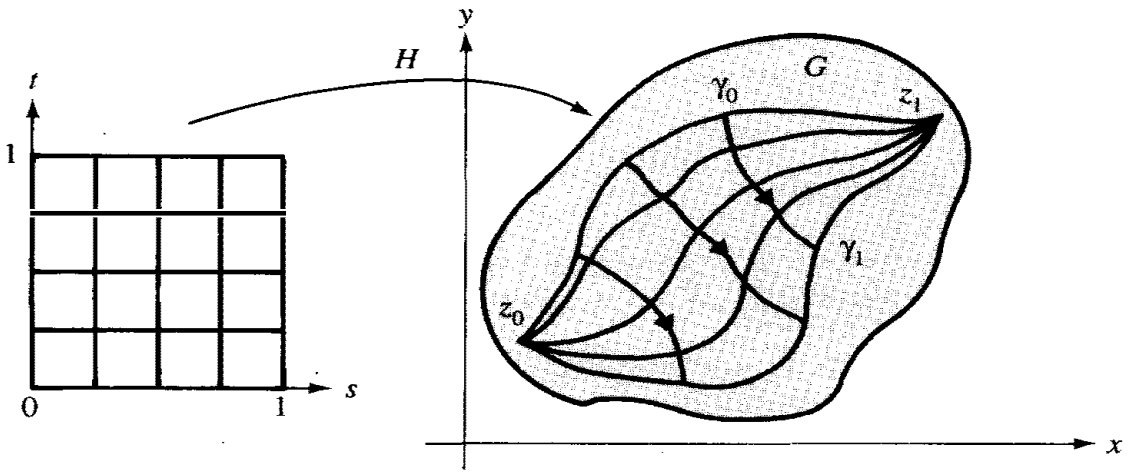


Figura 2.3.12. Homotopía con extremos fijos.

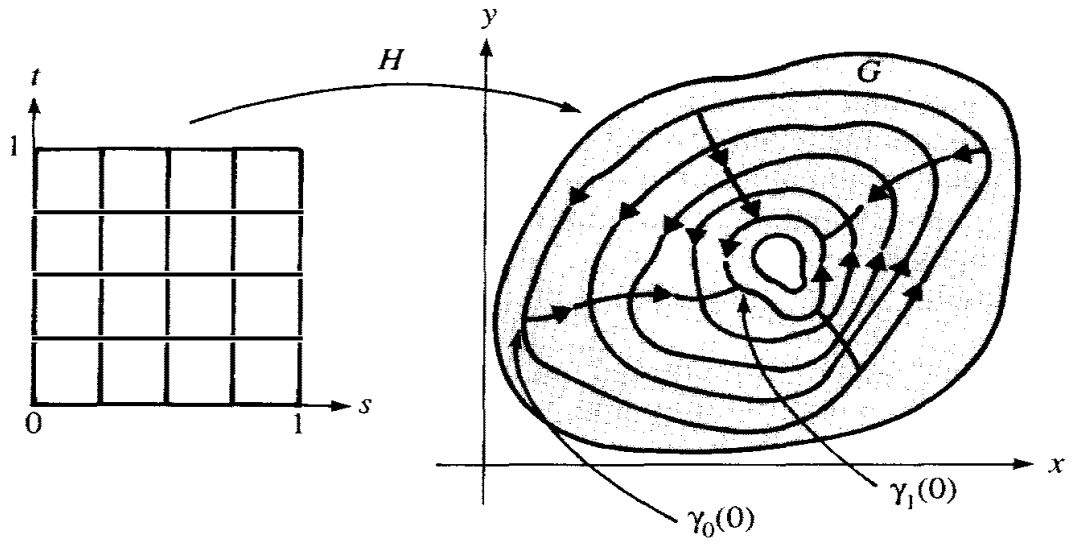


Figura 2.3.13. Homotopía de curvas cerradas.

como se muestra en la figura 2.3.14. Podremos entonces aplicar el teorema de Cauchy para un disco a la integral alrededor de cada una de estas trayectorias más pequeñas. Hacer la subdivisión no es ningún, problema la función H es continua en el conjunto compacto ($[0, 1] \times [0, 1]$, y así su imagen es un subconjunto compacto de G, por la proposición 1.4.19. Por el lema de la distancia (1.4.21), se mantiene una distancia positiva ρ del conjunto cerrado $\mathbf{C}\backslash G$. Esto es, $|H(s, t) - z| < \rho$ implica que $z \in G$. Pero sabemos (por la proposición 1.4.23) que H es de hecho uniformemente continua en el cuadrado. Por lo tanto, existe un número δ tal que $|H(s, t)-$

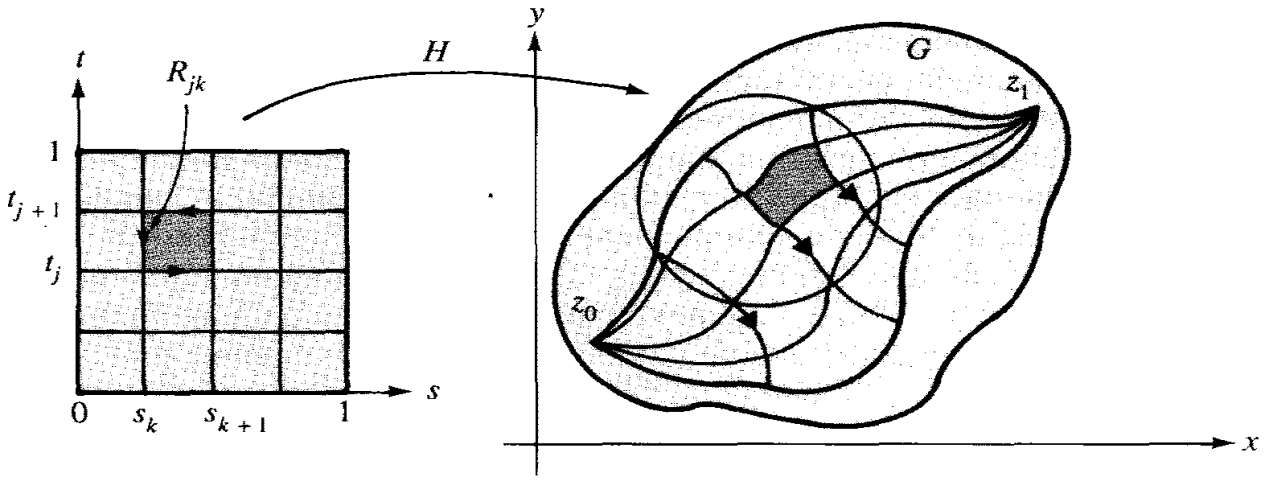


Figura 2.3.14. La subdivisión para la demostración del teorema de deformación.

$H(s', t')| < \rho$, siempre que la distancia $((s, t), (s', t')) = \sqrt{(s-s')^2 + (t-t')^2} < \delta$. Si escogemos puntos intermedios igualmente espaciados, para partir $[0, 1] \times [0, 1]$ en cuadrados pequeños con lados de longitud $1/n$, la diagonal de cada subcuadrado tendrá una longitud menor que δ si $n > \sqrt{2}/\delta$. Si R_{kj} es el rectángulo con esquinas en (s_{k-1}, t_{j-1}), (s_k, t_{j-1}), (s_k, t_j), (s_{k-1}, t_j), entonces todo el rectángulo es transformado dentro del disco $D_{kj} = D(H(s_{k-1}, t_{j-1}); \rho)$ el cual está contenido en G. Sea Γ_{kj} la curva cerrada descrita por $H(R_{kj})$ con la orientación que se obtiene al orientar R_{kj} en la dirección contraria al sentido de las agujas del reloj. La imagen de cada lado

de cada uno de los subcuadrados R_{kj}, forma parte de dos de las curvas cerradas Γ_{kj}, pero con direcciones opuestas, excepto por aquellos subcuadrados sobre los lados exteriores, donde t o s es 0 o 1. Note que, de hecho, al juntar estos lados forman las curvas $\gamma_s(t)$ y $\lambda_t(s)$ discutidas más arriba. Si sumamos las integrales en torno a todos los aros Γ_{kj}, todos los lados que se usan dos veces se cancelan y tan sólo nos queda

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\Gamma_{kj}} f=\int_{\lambda_0} f+\int_{\gamma_1} f-\int_{\lambda_1} f-\int_{\gamma_0} f$$

(véase la figura 2.3.15). Puesto que Γ_{kj} es una curva cerrada completamente contenida dentro del disco D_{kj}, en el cual la función f es analítica, el teorema de Cauchy para un disco implica que cada una de las integrales en la suma del lado izquierdo es 0 y en consecuencia el lado derecho también es 0. Así

$$0=\int_{\lambda_0} f+\int_{\gamma_1} f-\int_{\lambda_1} f-\int_{\gamma_0} f$$

Esto es

$$\int_{\lambda_1} f+\int_{\gamma_0} f=\int_{\lambda_0} f+\int_{\gamma_1} f \tag{1}$$

Hasta este momento las demostraciones para el caso con extremos fijos y el caso de las curvas cerradas han sido iguales. Ahora divergirán un poco.

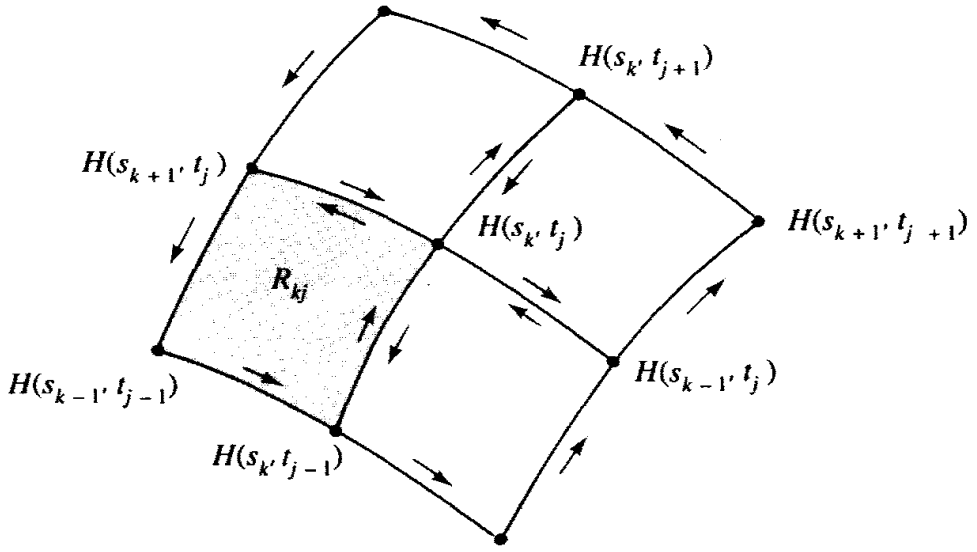


Figura 2.3.15. Cancelación de los lados de los subcuadrados en la demostración de los teoremas de deformación.

Para el caso con extremos fijos, $\lambda_0(s) = H(s, 0) = z_0$ para toda s; y $\lambda_1(s) = H(s, 1) = z_1$ para toda s. Ambas son curvas constantes, esto es, puntos sencillos, y así $\int_{\lambda_0} f = \int_{\lambda_1} f = 0$.

Para el caso de la curva cerrada, λ_0 y λ_1 son la misma curva:

$$\lambda_0(s) = H(s, 0) = H(s, 1) = \lambda_1(s) \text{ para toda } s$$

así que $\int_{\lambda_0} f = \int_{\lambda_1} f$.

En cualquier caso, la ecuación (1) toma la forma $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$, que es exactamente lo que queríamos.

La demostración que acabamos de dar no es del todo válida. La dificultad podría parecer ser una sutileza poco interesante, pero es crucial. Se asumió que la función H es continua, pero no se hizo ninguna suposición acerca de la diferenciabilidad. Así, las curvas $\gamma_s(t)$ y $\lambda_t(s)$ son continuas, pero no tienen porque ser C^1 por tramos. Desafortunadamente, toda nuestra teoría sobre integrales de contorno está basada en curvas C^1 por tramos. Así que las integrales que aparecen más arriba no necesariamente tienen sentido. Lo tendrían, y todo sería correcto, si todas las curvas en cuestión fueran C^1 por tramos. En consecuencia, haremos una definición y una suposición provisionales.

Definición 2.3.13. *Una homotopía* H: [0, 1] × [0, 1] → G *se llama* ***suave****, si las curvas intermedias* $\gamma_s(t)$, *como funciones de* t, *son* C^1 *por tramos para cada* s *y las curvas transversales* $\lambda_t(s)$, *como funciones de* s, *son* C^1 *por tramos para cada* t.

Suposición provisional. Asúmase que las homotopías en el teorema de deformación son suaves.

Con esta suposición extra, todas las curvas en la demostración que aparece más arriba son C^1 por tramos, todas las integrales tienen sentido y la demostración es válida. Cuando se considere esta suposición adicional, nos referimos al teorema como *teorema de deformación suave.* En el suplemento A de esta sección se muestra cómo usar el teorema de deformación suave para dar una definición razonable de la integral de una función analítica a lo largo de una curva continua, y cómo obtener el teorema de deformación sin la suposición de suavidad, mediante el uso del teorema de deformación suave. ■

Teorema de Cauchy

Con el poder del teorema de deformación, estamos ahora en posibilidad de establecer una forma bastante general del teorema de Cauchy.

Teorema de Cauchy 2.3.14. *Sea* f *analítica en una región* G. *Sea* γ *una curva cerrada en* G *la cual es homotópica a un punto en* G. *Entonces*

$$\int_\gamma f = 0$$

Demostración. La curva γ es homotópica en G, a una curva constante $\lambda(t) = z_0$ para toda t. En consecuencia $\int_\gamma f = \int_\lambda f = 0$. ■

SUPLEMENTO A DE LA SECCIÓN 2.3

El material de este suplemento se ha separado de la parte principal de la sección, debido a que no es esencial para la comprensión del teorema de Cauchy o del material de los capítulos posteriores. La primera parte del suplemento proporciona el material que se prometió al principio, en la discusión del teorema de deformación. El teorema de deformación suave se usa para mostrar cómo la integral de una función analítica se puede definir a lo largo de una curva que es continua, pero no necesariamente C^1 por tramos. Luego, esto y el mismo teorema de deformación suave, se usan para terminar la demostración del teorema de deformación. En el suplemento B se examinará, sin demostración, la relación del teorema de Cauchy con un resultado geométrico conocido como el teorema de la curva de Jordan, el cual discute lo que entendemos por el interior y exterior de una curva cerrada, continua y simple.

Integrales a lo largo de curvas continuas

En la demostración de la versión homotópica o de deformación del teorema de Cauchy, hicimos la suposición provisional que la deformación era suave en el sentido que cada curva intermedia $\gamma_s(t) = H(s, t)$ y cada curva transversal $\lambda_t(s) = H(s, t)$, pensadas como curvas trazadas por el punto $H(s, t)$ conforme s o t, respectivamente, permanece constante, son C^1 por tramos. Se estableció en aquel momento que esto no es realmente necesario. Realmente sólo necesitamos suponer que $H(s, t)$ es una función continua de s y t, de tal manera que $\gamma_s(t)$ es una curva continua. Por el momento nos referiremos al teorema con la suposición C^1, como el "teorema de deformación suave". La razón principal para esta suposición fue que nuestra definición de integrales de contorno se basa completamente en curvas C_1 por tramos —¡después de todo la derivada de la curva aparece explícitamente en la definición!—. En general, no sabemos lo que realmente es la integral de una función a lo largo de una curva que es continua, pero no C_1 por tramos. En efecto, una teoría tan general no está a nuestro alcance. Sin embargo, la situación es salvada por el hecho de que no estamos realmente interesados en funciones en general, sino tan sólo en funciones analíticas. Esta suposición adicional sobre la función que se va a integrar, remplaza la disminución de la información acerca de la curva a lo largo de la cual se va a integrar. El enfoque que se tomó aquí para eliminar esta dificultad, puede no ser una de las rutas más directas al teorema de deformación, pero tiene la ventaja de mostrar cómo darle sentido a la integral de una función analítica a lo largo de una curva continua. Esto tiene también la interesante ventaja de usar el teorema de deformación suave en el proceso de comprobar que la suposición sobre suavidad no es realmente necesaria. [Varias de estas ideas son presentadas de un modo más directo y un tanto diferente, en el artículo de R. Redhheffer, "The Homotopy Theorems of Function Theory", *American Mathematical Monthly*, Vol. 76, 1969, pp. 778-787, y son usadas ahí para hacer varias cosas interesantes.]

Supóngase que f es una función analítica en un conjunto abierto G y que γ: $[0, 1] \to G$ es una curva continua (pero no necesariamente C^1 por tamos) que va de z_0 a z_1 en G. Queremos encontrar un modo razonable de definir $\int_\gamma f$. El bosquejo del programa es éste:

(i) Sabemos lo que $\int_\lambda f$ significa, si λ es C^1 por tramos en G, de z_0 a z_1.
(ii) Mostramos que existe al menos una de estas λ que está "cerca de" γ, usando el lema de la cubierta de una trayectoria (1.4.24).
(iii) Mostraremos que si λ_0 y λ_1 son dos de las curvas que están "cerca de" γ, entonces están "cerca" una de la otra y usamos el teorema de deformación suave para demostrar que $\int_{\lambda_0} f = \int_{\lambda_1} f$.
(iv) Debido a (iii), $\int_\lambda f$ es la misma para toda curva λ / C^1 por tramos que esté "cerca de" γ con los mismos extremos y podemos tomar este valor común, como una razonable definición de $\int_\gamma$.

Para llevar adelante este programa, primero debemos definir "cerca de". Para hacer esto, definimos un tipo de distancia entre dos curvas parametrizadas con el mismo intervalo para el parámetro, de tal manera que al recorrer ambas curvas, en cada valor del parámetro t registramos la distancia entre los puntos correspondientes de las curvas, y entonces tomamos la mayor de estas distancias. Esto se ilustra en la figura 2.3.16.

Definición 2.3.18. *Si* λ: [0, 1] $\to$ **C** *y* γ: [0, 1] $\to$ **C** *son curvas parametrizadas en* **C**, *sea* $\text{dist}(\lambda, \gamma) = \max \{ |\lambda(t) - \gamma(t)| \text{ tal que } 0 \le t \le 1 \}$.

Supóngase ahora que G es un conjunto abierto en **C** y que γ: [0, 1] $\to G$ es una curva continua de z_0 a z_1 en G. Por el lema de la distancia (1.4.21), existe una distancia positiva ρ entre la imagen compacta de γ y el complemento cerrado de G, esto es, $|\gamma(t) - w| \ge \rho$ para $w \in \mathbf{C} \backslash G$, así que $|\gamma(t) - z| < \rho$ implica que z está en G. El lema de la cubierta de una trayectoria (1.4.24), nos da una cubierta de la curva γ con un número finito de discos, con centro en los puntos $\gamma(t_k)$, a lo largo de la curva, en tal forma que cada disco está contenido en G y cada uno contiene los centros de los discos anterior y posterior. Los radios de estos discos pueden tomarse igual a ρ para el propósito de esta demostración.

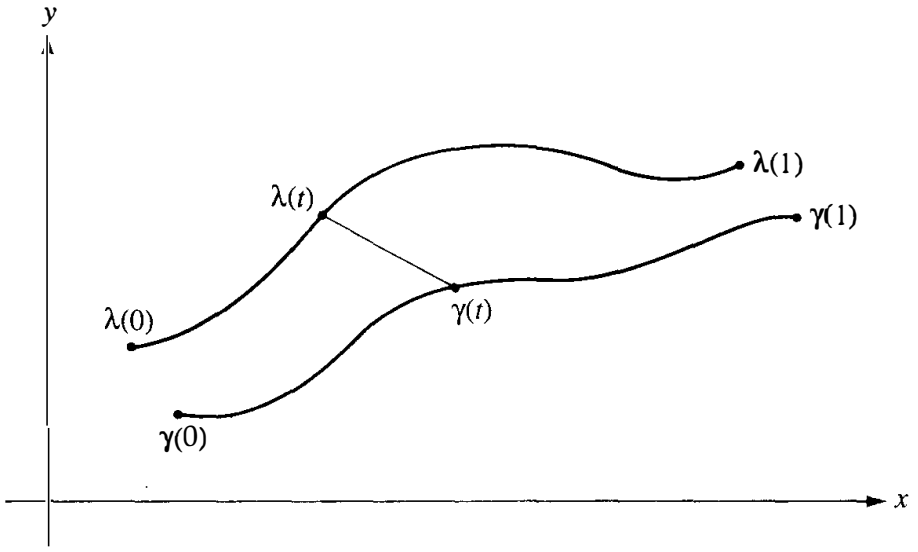


Figura 2.3.16. Una "distancia" entre curvas parametrizadas.

Construimos una curva C^1 por tramos λ en G, haciendo $\lambda(t_k) = \gamma(t_k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y luego conectando estos puntos por un segmento rectilíneo. Más precisamente, para $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, hacemos

$$\lambda(t) = \frac{(t - t_{k-1})\,\lambda(t_k) + (t_k - t)\,\lambda(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$$

Puesto que los números $(t - t_{k-1}) / (t_k - t_{k-1})$ y $(t_k - t) / (t_k - t_{k-1})$ son positivos y suman 1, el punto $\lambda(t)$ recorre el segmento recilíneo de $\gamma(t_{k-1})$ a $\gamma(t_k)$conforme t va de t_{k-1} a t_k, como en la figura 2.3.17.

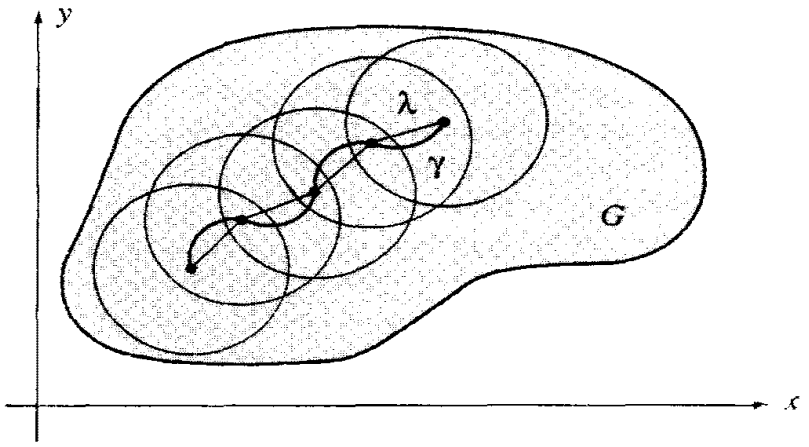


Figura 2.3.17. Una aproximación suave por tramos, de hecho lineal, a una curva continua.

La función $\lambda(t)$ es lineal y, en consecuencia, es una función diferenciable en t, entre t_{k-1} y t_k, así que λ es una trayectoria C^1 por tramos, de z_0 a z_1. Más aún, para cada t, los puntos $\lambda(t)$ y $\gamma(t)$ están ambos en el disco $D(\gamma(t_{k-1}); \rho)$, por tanto, la curva λ está en el conjunto G y $\text{dist}(\lambda, \gamma) \leq 2\rho$. En efecto, ya que $\lambda(t)$ está sobre la línea entre los centros, y $\gamma(t)$ está en ambos discos $D(\gamma(t_{k-1}); \rho)$ y $D(\gamma(t_k); \rho)$, tenemos que $\text{dist}(\lambda, \gamma) \leq \rho$. Puesto que los tres lados del triángulo mostrado tienen longitud menor que ρ, la distancia de $\lambda(t)$ a $\lambda(t)$ es también menor que ρ. (Véase la figura 2.3.18.)

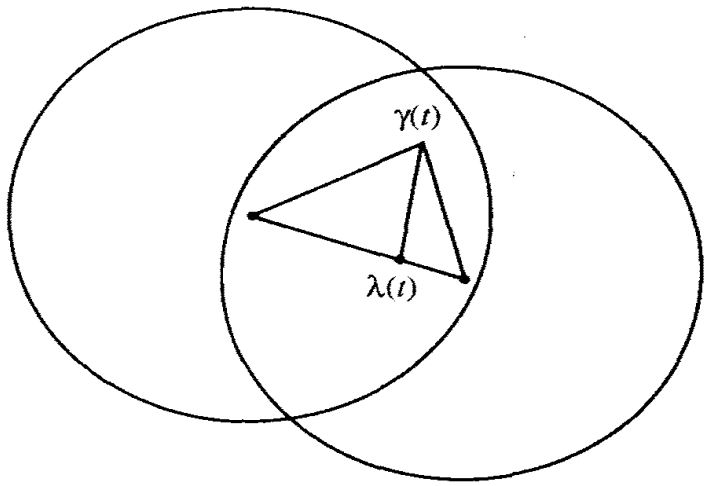


Figura 2.3.18. $\text{dist}(\lambda, \gamma) < \rho$.

Esto nos da la existencia de al menos una trayectoria C^1 por tramos que está "cerca de" γ. El paso (iii) del programa es mostrar que las integrales a lo largo de todas estas trayectorias son iguales. Supóngase que λ_0 y λ_1 son trayectorias C^1 por tramos de z_0 a z_1, tales que $\text{dist}(\lambda_0, \gamma) < \rho$ y $\text{dist}(\lambda_1, \gamma) < \rho$. Entonces, tanto λ_0 como λ_1 están en G. El teorema de deformación suave puede ser usado para mostrar que $\int_{\lambda_0} f = \int_{\lambda_1} f$. La homotopía requerida entre las dos curvas puede construirse siguiendo la línea recta de $\lambda_0(t)$ a $\lambda_1(t)$ (véase la figura 2.3.14). Para s y t entre 0 y 1, defínase

$$H(s, t) = s\lambda_1(t) + (1 - s)\lambda_0(t)$$

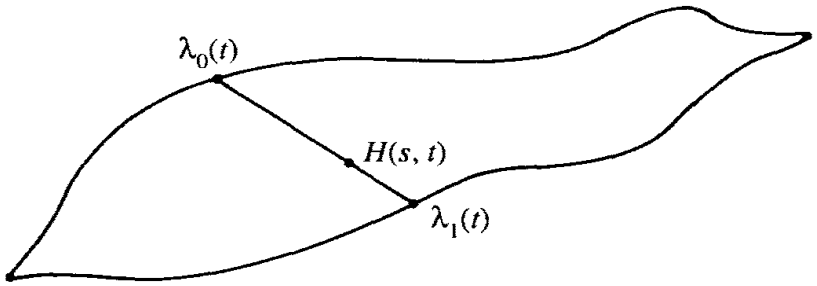


Figura 2.3.19. Homotopía suave de λ_0 a λ_1.

La función $H(s, t)$ es una función C^1 por tramos de s y t. Los problemas pueden ocurrir sólo cuando $t = t_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y así necesitamos únicamente verificar que la imagen siempre está en G. Pero

$$\begin{aligned} |H(s, t) - \gamma(t)| &= |s\lambda_1(t) + (1 - s)\lambda_0(t) - \gamma(t)| \\ &= |s\,[\lambda_1(t) - \gamma(t)] + (1 - s)[\lambda_0(t) - \gamma(t)]| \\ &\leq s|\lambda_1(t) - \gamma(t)| + (1 - s)|\lambda_0(t) - \gamma(t)| \\ &\leq s\rho + (1 - s)\rho = \rho \end{aligned}$$

Así, $H(s, t) \in D(\gamma(t); \rho) \subset G$ y, por tanto, se puede aplicar el teorema de deformación suave a λ_0 y λ_1, y mostrar que $\int_{\lambda_0} f = \int_{\lambda_1} f$. Esto completa la parte (iii) del programa y muestra que tiene sentido definir la integral de una función analítica a lo largo de una curva continua como sigue.

Definición 2.3.19. *Supóngase que* f *es analítica en un conjunto abierto* G *y que* γ: $[0, 1] \to$ G *es una curva continua en* G. *Si la distancia de* γ *al complemento de* G *es* ρ, *sea* $\int_\gamma f = \int_\lambda f$, *donde* λ *es cualquier curva* C^1 *por tramos en* G, *con los mismos extremos que* γ *y la cual está "cerca de"* γ, *en el sentido que* $\text{dist}(\lambda, \gamma) < \rho$.

El teorema de deformación

Con un poco de cuidado puede usarse, esencialmente, la misma idea empleada anteriormente en la demostración del paso (iii), para obtener el teorema de deformación a partir del teorema de deformación suave (tanto para extremos fijos como para curvas cerradas). Si H es una homotopía continua de γ_0 a γ_1, entonces para s^* cer-

ca de s, $\gamma_{s*}(t)$ está cerca de $\gamma_s(t)$ y así γ_{s*} está "cerca de" γ_s. Si escogemos curvas C^1 por tramos λ y μ, suficientemente "cerca de" γ_s y γ_{s*}, respectivamente, entonces λ estará "cerca de" μ, y al moverse por un segmento rectilíneo entre $\lambda(t)$ y $\mu(t)$, obtendremos una deformación suave de λ a μ. (Véase la figura 2.3.20.) El teorema de deformación suave dice que $\int_\lambda f = \int_\mu f$, así que la integral sobre γ_s es la misma que sobre γ_{s*}. Por ende, si variamos s de 0 a 1, en pasos suficientemente pequeños de modo que este argumento se pueda aplicar en cada paso, la integral nunca cambiará y la integral a lo largo de γ_0 será la misma que a lo largo de γ_1. Que, en efecto, esto puede hacerse en un número finito de pasos suficientemente pequeños se debe a que H es una función continua en el cuadrado compacto $[0, 1] \times [0, 1]$, por lo que su imagen es un subconjunto compacto de G y se encuentra a una distancia positiva del complemento cerrado de G.

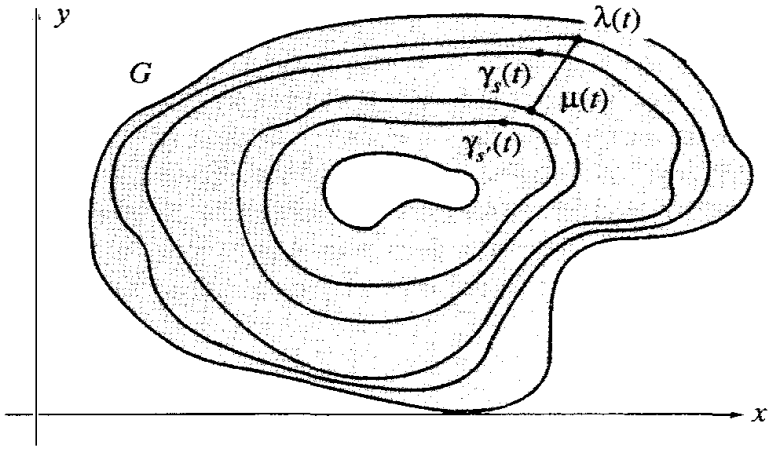


Figura 2.3.20. Los teoremas de deformación pueden ser obtenidos del teorema de deformación suave.

SUPLEMENTO B DE LA SECCIÓN 2.3

Relación del teorema de Cauchy con el teorema de la curva de Jordan

Entender el teorema de la curva de Jordan no es absolutamente esencial para entender el teorema de Cauchy o el material de los capítulos subsecuentes. Sin embargo, el teorema de la curva de Jordan está íntimamente relacionado con las hipótesis del teorema de Cauchy, y, por lo tanto, será considerado brevemente aquí. En muchos ejemplos prácticos, el resultado del teorema de la curva de Jordan es geométricamente obvio y, usualmente, puede probarse directamente. El caso general del teorema es bastante difícil y no se demostrará aquí.

Teorema de la curva de Jordau 2.3.20. *Sea* γ: [a, b] $\to$ **C** *una curva cerrada simple continua en* C. *Entonces* C\γ([a, b]) *puede expresarse como la unión ajena de dos regiones* I *y* O, *tales que* I *es acotada (esto es, está en algún disco suficientemente grande). La región* I *es llamada el* ***interior*** *de* γ, *y* o *es llamado el* ***exterior***. *La región* I *es simplemente conexa y* γ *es contraitible a cualquier punto en* I $\cup$ γ([a, b]). *La frontera de cada una de las dos regiones es* γ([a, b]).

La demostración de este teorema necesita matemáticas más avanzadas y está más allá de las perspectivas de este libro; véase, por ejemplo, G. T. Whyburn, *Topological Analysis,* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1964.

Así, el teorema de la curva de Jordan, combinado con el teorema de Cauchy (2.3.14), conduce a lo siguiente: *Si* f *es analítica en una región* A, γ *es una curva cerrada simple en* A, *y el interior de* γ *está en* A, *entonces* $\int_\gamma f = 0$. Ésta es una manera clásica de enunciar el teorema de Cauchy. Aunque conveniente en la práctica, ésta es teóricamente engañosa por dos razones: 1) Depende del teorema de la curva de Jordan para definir el concepto de "interior", y 2) Se restringe γ a ser una curva simple. Las versiones del teorema de Cauchy, enunciadas en los teoremas 2.3.12 y 2.3.14, no dependen del difícil teorema de la curva de Jordan, son más generales y son igualmente fáciles de aplicar. Por otra parte, el teorema de la curva de Jordan, nos reafirma que las regiones que intuitivamente esperamos sean simplemente conexas, lo son en realidad. (Existe otra forma para describir el interior de una curva cerrada simple usando el índice o el número de giros de una curva; este método será discutido en la próxima sección.)

La filosofía general de este texto es que debemos usar nuestra intuición geométrica para justificar que una región dada es simplemente conexa o que dos curvas son homotópicas, pero reconociendo que tal conocimiento se basa en la intuición y que intentar ser precisos podría ser tedioso. Por otra parte, debe usarse un argumento preciso siempre que sea posible y práctico (véase, por ejemplo, el argumento que se usó anteriormente para ver que una región convexa es simplemente conexa).

Ejemplos resueltos

2.3.21. *Sea* A *la región acotada por el eje* x *y la curva* $\sigma(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, *donde* $R > 0$ *es fijo. Sea* $f(z) = e^{z^2}/(2R - z)^2$. *Demuestre que para cualquier curva cerrada* γ *en* A, $\int_\gamma f = 0$.

Solución. Obsérvese primero que f deja de ser analítica sólo cuando $z = 2R$ y, por tanto, f es analítica en A, ya que $2R$ está fuera de A (véase la figura 2.3.21). Nosotros sostenemos que A es simplemente conexa. Que cualesquiera dos puntos en A pueden ser unidos por un segmento rectilíneo en A (esto es, que A es convexa), es obvio geométricamente y también es un hecho simple el verificarlo (lo cual debe hacer el estudiante). Así, A es simplemente conexa, por el corolario 2.3.11. Por el teorema de Cauchy. $\int_\gamma f = 0$ para cualquier curva cerrada en A.

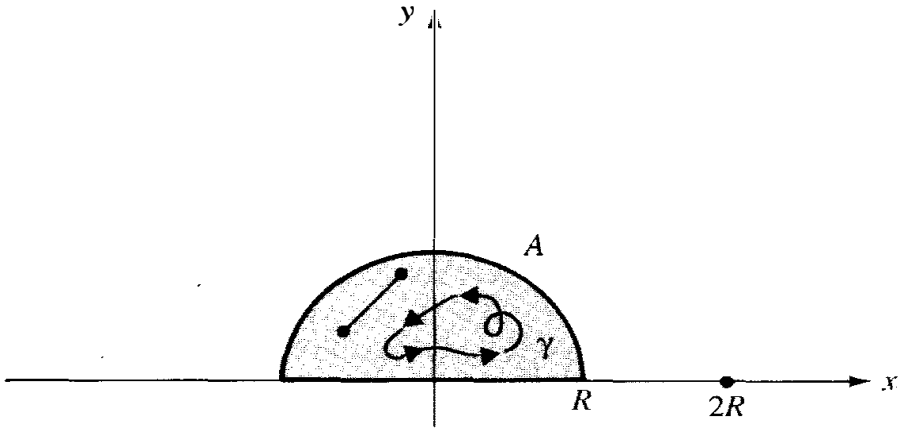


Figura 2.3.21. Región convexa.

2.3.22. *Sea* $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 4\}$. *Primero intuitivamente, luego precisamente, demuestre que* A *no es simplemente conexa. También demuestre precisamente que los círculos* $|z| = 2$ y $|z| = 3$, *son homotópicos en* A.

Solución. Intuitivamente, el círculo $|z| = 2$ no puede ser contraído continuamente a un punto sin pasar sobre el hoyo en A; esto es, el conjunto $\{z \in \mathbf{C}$ tal que $|z| \leq 1\}$. Precisamente, la función $1/z$ es analítica en A, y si A fuera simplemente conexa, entonces tendríamos $\int_\gamma (1/z)dz = 0$, para cualquier curva cerrada en A. Pero si hacemos $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces obtenemos

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} \cdot 2ie^{it}\, dt = 2\pi i$$

En consecuencia, A no es simplemente conexa.
Sean $\gamma_1(t) = 2e^{it}$ y $\gamma_2(t) = 3e^{it}$, las cuales representan a los círculos $|z| = 2$ y $|z| = 3$, respectivamente. Defínase $H(t, s) = 2e^{it} + se^{it}$, entonces H es una homotopía apropiada entre γ_1 y γ_2 en A. El efecto de H se ilustra en la figura 2.3.22.

2.3.23. *Denótese por* γ *al círculo unitario* $|z| = 1$. *Sean* γ_1 y γ_2 *dos círculos de radio* $\frac{1}{4}$ *y centros* $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, *respectivamente. Sea* A *una región que contiene a* γ, γ_1 y γ_2, *y que incluye la región entre estas curvas* (*véase la* figura 2.3.23). *Para* f *analítica en* A, *demuestre que*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

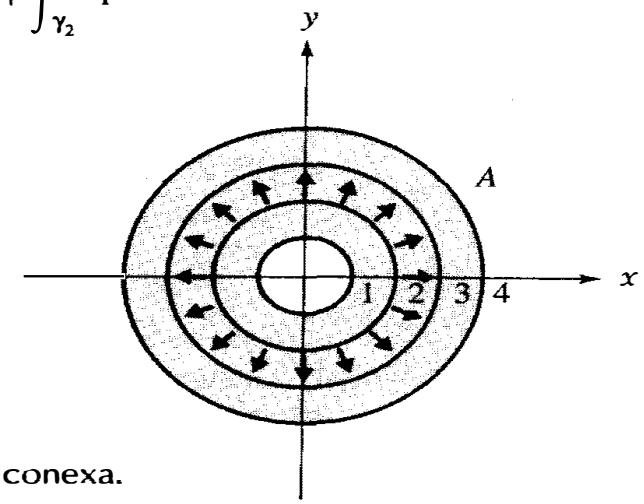


Figura 2.3.22. Región que no es simplemente conexa.

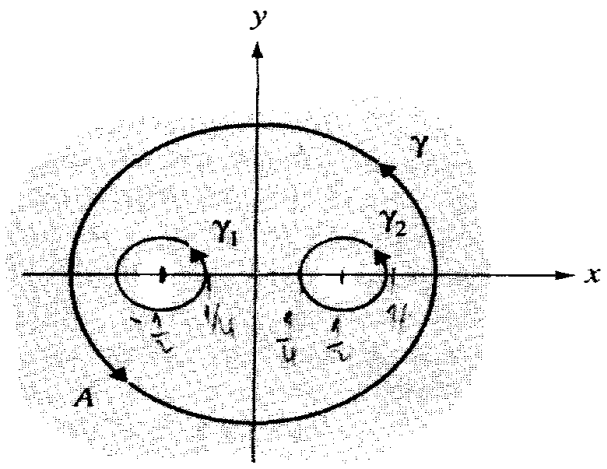


Figura 2.3.23. Región de analiticidad de *f*.

Solución. Tenemos

$$\gamma_1(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{it} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

y

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{it} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Sea $\tilde{\gamma}$ la curva descrita en la figura 2.3.24.

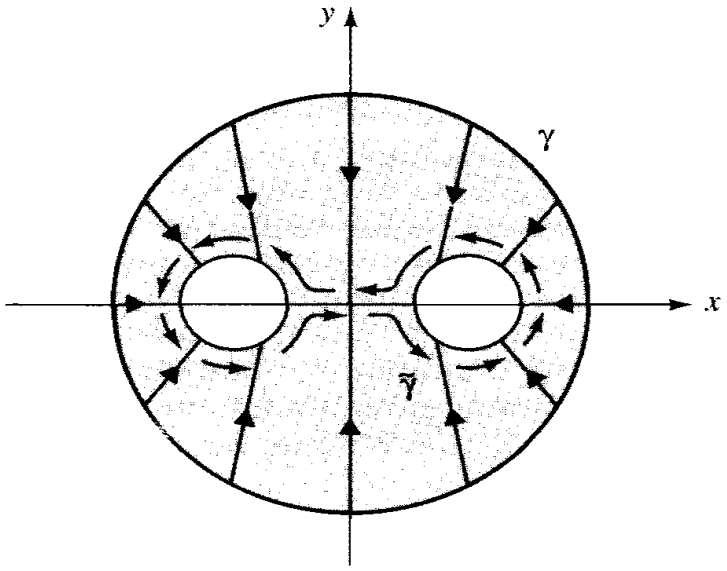


Figura 2.3.24. Construcción de la homotopía de γ a $\tilde{\gamma}$.

Es geométricamente claro que γ es homotópica a $\tilde{\gamma}$ en A. La homotopía exacta puede obtenerse fácilmente por (1) reparametrizando $\tilde{\gamma}$ de modo que tenga el mismo intervalo $[0, 2\pi]$ que γ; (2) definiendo $H(s, t) = s\gamma(t) + (1 - s)\tilde{\gamma}(t)$, y (3) verificando que el segmento rectilíneo que une $\gamma(t)$ y $\tilde{\gamma}(t)$ permanece en A (aun cuando A no es convexa). Este método se ilustraen la figura 2.3.24. Por el teorema de deformación, $\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f$. Pero $\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$, ya que $\tilde{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_0 + (-\gamma_0)$, donde γ_0 denota el segmento rectilíneo que une $\frac{1}{2}$ con $-\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la afirmación está demostrada. Compare esta solución con aquella del ejemplo resuelto 2.2.10, sección 2.2 y observe que aquí $\tilde{\gamma}$ no tiene que ser una curva cerrada simple, sino únicamente cerrada.

Ejercicios

1. Demuestre que $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ no es simplemente conexo.
2. Muestre que todo disco es convexo.
3. Se dice que una región A tiene forma de estrella con respecto de z_0 si contiene al segmento recilíneo entre cada uno de sus puntos y z_0, esto es, si $z \in A$ y $0 \le s \le 1$ implica que $sz_0 + (1 - s)z \in A$. La región tiene forma de estrella, si hay al menos uno de tales puntos en A. Demuestre que un conjunto en forma de estrella es simplemente conexo.
4. Demuestre que un conjunto A es convexo si y sólo si tiene forma de estrella con respecto de cada uno de sus puntos (véase el ejercicio 3).
5. Sea G la región construida como la unión de dos regiones rectangulares $G = \{z$ tal que $|\text{Re } z| < 1$ y $|\text{Im } z| < 3\} \cup \{z$ tal que $|\text{Re } z| < 3$ y $|\text{Im } z| < 1\}$. (Este conjunto se ilustra en la figura 2.3.25.) Demuestre que G tiene forma de estrella. (Véase el ejercicio 3.)

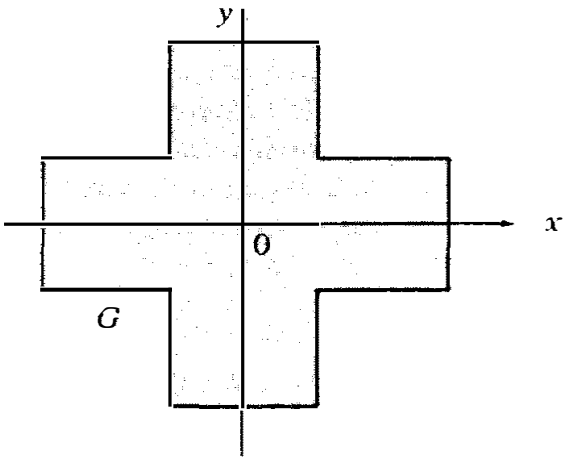


Figura 2.3.25. Una región en forma de estrella convexa.

6. Complete la demostración de la proposición 2.2.4.

7. Evalúe las siguientes integrales sin realizar cálculos explícitos.

a) $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, donde $\gamma(t) = \cos t + 2i \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$.

b) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$, *donde* γ *está definida como en a).*

c) $\int_\gamma \frac{e^z dz}{z}$, donde $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

d) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1}$, donde γ es un círculo de radio 1 centrado en 1.

8. Evalúe $\int_\gamma dz/z$ donde γ es el segmento de recta que une 1 con i.

9. *a)* Sea γ una curva homotópica al círculo unitario en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Evalúe $\int_\gamma dz/z$.
b) Evalúe $\int_\gamma dz/z$ donde γ es la curva $\gamma(t) = 3 \cos t + i\, 4 \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$.

10. Evalúe lo siguiente:

$$a) \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3} \qquad b) \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} = \frac{dz}{(1-z)^3} \qquad c) \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$$

2.4. FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Uno de los atractivos de la teoría de funciones de una variable compleja, es que muchos resultados poderosos pueden hacerse fluir rápidamente partiendo de alguno de los varios puntos iniciales. Hemos seleccionado el teorema de Cauchy como punto inicial y estamos ahora en posición de inferir algunas importantes consecuencias. Por ejemplo, veremos que una función diferenciable debe ser infinitamente diferenciable y de hecho, analítica en el sentido de que las series de Taylor convergen a la función en algún disco. El teorema fundamental del álgebra: todo polinomio tiene

una raíz compleja; será un beneficio secundario. El lazo de conexión entre estos resultados es una consecuencia del teorema de Cauchy y también lleva su nombre. Éste dice que los valores de una función analítica están completamente determinados en cualquier lugar del interior de una curva cerrada por sus valores a lo largo de la curva, y da una fórmula explícita que relaciona estos valores.

Índice de una trayectoria

Existe una útil fórmula que expresa cuántas veces gira una curva γ alrededor de un punto dado z_0 (véase la figura 2.4.1). Este número de veces es informalmente llamado *índice* de γ con respecto de z_0. El término "índice" se definirá formalmente en la definición 2.4.1.

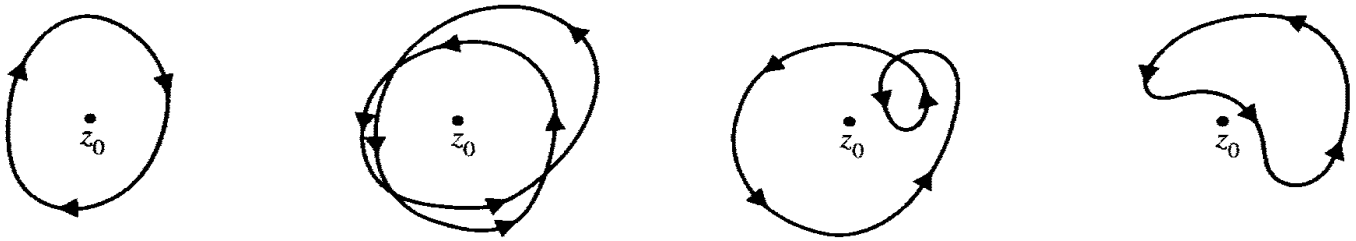


Figura 2.4.1. Índice de una curva alrededor de un punto.

La fórmula que usaremos para calcular el índice está basada en los cálculos que fueron hechos en el ejemplo resuelto 2.1.12: Si γ es el círculo unitario $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, entonces

$$2\pi i = \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

Si $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi n$, entonces γ circunda al origen n veces y de la misma forma encontramos que

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

Vamos a suponer ahora que otra curva cerrada $\tilde{\gamma}$ puede ser deformada hasta γ sin pasar a través del 0 (esto es, que $\tilde{\gamma}$ y γ son homotópicas en la región $A = \mathbf{C}\backslash\{0\}$. Entonces, otra vez

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

por el teorema de deformación (véanse las secciones 2.2 o 2.3). Ya que $\tilde{\gamma}$ y γ son

homotópicas en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, es intuitivamente razonable que ellas giran alrededor del 0 el mismo número de veces. En general, para cualquier punto $z_0 \in \mathbf{C}$, se ve que el número de veces que una curva $\tilde{\gamma}$ gira alrededor de z_0 es

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z - z_0}$$

por un argumento similar. Es entonces razonablemente claro que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } z_0 \text{ está dentro de } \gamma \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ está fuera de } \gamma \end{cases}$$

para una curva cerrada *simple* γ (esto puede establecerse precisamente usando el teorema de la curva de Jordan del suplemento B de la sección 2.3). Esta idea conduce a formular la siguiente definición.

Definición 2.4.1. *Sean γ una curva cerrada en $\mathbf{C}$ y $z_0 \in \mathbf{C}$ un punto que no está en γ. Entonces, el **índice** de γ con respecto de z_0 (también llamado el **número de giros** de γ con respecto de z_0) está definido como*

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

*Decimos que γ **gira alrededor** de z_0, $I(\gamma, z_0)$ veces.*

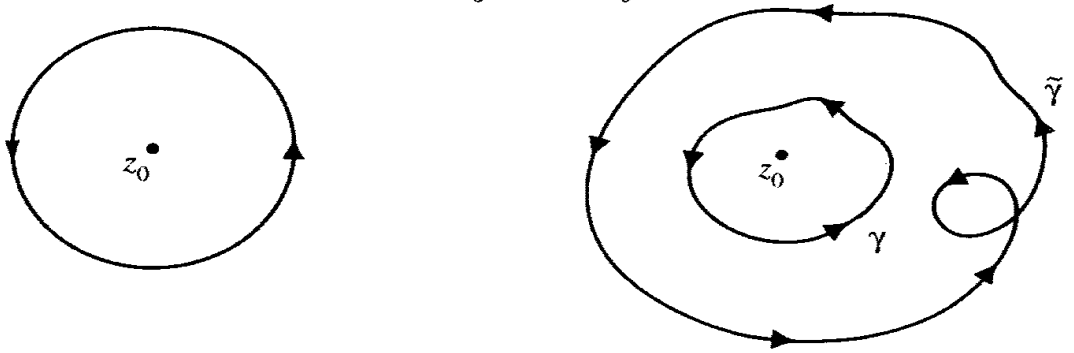
La discusión que precedió esta definición demuestra la siguiente proposición, la cual se ilustra en la figura 2.4.2.

Proposición 2.4.2.

(i) *El círculo $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi n$, $r > 0$, tiene índice n con respecto de z_0; el círculo $-\gamma(t) = z_0 + re^{-it}$, $0 \le t \le 2\pi n$, tiene índice $-n$*

(ii) *Si z_0 no está sobre $\tilde{\gamma}$ ni sobre γ, y si $\tilde{\gamma}$ y γ son homotópicas en $\mathbf{C}\backslash\{z_0\}$, entonces*

$$I(\tilde{\gamma}, z_0) = I(\gamma, z_0)$$



Índice del círculo

$\tilde{\gamma}$ y γ tienen el mismo índice con respecto de z_0

Figura 2.4.2. Índice = número de veces que z_0 es rodeado.

Puesto que algunas veces puede ser difícil tratar directamente con las homotopías, es usual únicamente dar un argumento geométrico intuitivo de que $I(\gamma, z_0)$ tiene un cierto valor, pero otra vez el estudiante debe estar preparado para dar una demostración completa cuando se le pida (véase el ejemplo resuelto 2.4.12 al final de esta sección).

La siguiente demostración proporciona una verificación de que el índice $I(\gamma, z_0)$ es siempre un entero. Éste debe ser el caso si la definición 2.4.1 realmente representa las ideas ilustradas en las figuras.

Teorema del índice 2.4.3. *Sea* γ: [a, b] $\to$ **C** *una curva cerrada* (C^1 *por tramos*) *y* z_0 *un punto que no está en* γ; *entonces,* $I(\gamma, z_0)$ *es un entero.*

Demostración. Sea

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds$$

Entonces, en puntos donde el integrando es continuo, el teorema fundamental del cálculo nos da

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

Así

$$\frac{d}{dt}\, e^{-g(t)}[\gamma(t) - z_0] = 0$$

en puntos donde $g'(t)$ existe, y por tanto $e^{-g(t)}\,[\gamma(t) - z_0]$ es constante por tramos en $[a, b]$. Pero $e^{-g(t)}\,[\gamma(t) - z_0]$ es continua y, por lo tanto, debe ser constante en $[a, b]$. Este valor constante es

$$e^{-g(a)}[\gamma(a) - z_0]$$

y así obtenemos $e^{-g(b)}\,[\gamma(b) - z_0] = e^{-g(a)}\,[\gamma(a) - z_0]$. Pero $\gamma(b) = \gamma(a)$, de modo que $e^{-g(b)} = e^{-g(a)}$. Por otro lado, $g(a) = 0$; así que $e^{-g(b)} = 1$. Por lo tanto, $g(b) = 2\pi ni$ para algún entero n, y el teorema se sigue. ■

El *interior* de una curva γ puede ser definido como $\{z \mid I(\gamma, z) \neq 0\}$, y esta definición estaría de acuerdo con el "interior" definido por el teorema de la curva de Jordan y también con las ideas intuitivas ilustradas en la figura 2.4.1. De este modo, el interior de una curva cerrada puede definirse sólo analíticamente, sin aplicar el teorema de la curva de Jordan.

Fórmula integral de Cauchy

El teorema de Cauchy se usará ahora para deducir una muy útil fórmula que relaciona el valor de una función analítica en z_0 con cierta integral.

Fórmula integral de Cauchy 2.4.4. *Sea* f *analítica en una región* A, *sea* γ *una curva cerrada en* A *que es homotópica a un punto, y sea* $z_0 \in$ A *un punto que no está en* γ. *Entonces,*

$$f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \tag{1}$$

Esta fórmula[4] se aplica a menudo cuando γ es una curva cerrada simple, y z_0 está dentro de γ. Entonces $I(\gamma, z_0) = 1$, así que la fórmula (1) se convierte en

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \tag{1'}$$

La fórmula (1') es notable, puesto que dice que los valores de f sobre γ determinan completamente los valores de f dentro de γ. En otras palabras, el valor de f está determinado por sus "valores frontera".

Demostración. La demostración hace un uso inteligente de la analiticidad de f y del fortalecimiento técnico del teorema de Cauchy para el cual sustentamos las bases en el teorema de Cauchy fortalecido para un disco (2.3.5), en el que se admitía que la función fuera continua y no necesariamente analítica en un punto. (Véase también el ejemplo resuelto 2.2.11 y las observaciones que siguen a la proposición 2.3.17). Sea

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Entonces g es analítica, excepto posiblemente en z_0 y es continua en z_0 pues f es diferenciable ahí. Por ende $\int_\gamma g = 0$ y, por tanto,

$$0 = \int_\gamma g(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz$$

y

$$\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0) I(\gamma, z_0)$$

y de este modo se sigue el teorema. ■

La fórmula (1) es extremadamente útil en los cálculos. Por ejemplo, podemos inmediatamente calcular

[4] La fórmula integral de Cauchy puede fortalecerse requiriendo únicamente que f sea continua sobre γ y analítica "dentro" de γ. Este cambio produce pequeñas diferencias en la resolución de la mayoría de los ejemplos. Para la demostración del teorema fortalecido, pueden usarse los métodos del suplemento A de la sección 2.3, y un argumento de aproximación. Véase también E. Hille, *Analytic Function Theory*, vol. 1, Boston, Ginn, 1959.

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i$$

donde γ es el círculo unitario. Aquí $f(z) = e^z$ y $z_0 = 0$.

Nótese que en la fórmula (1) es f, y no el integrando $f(z)/(z - z_0)$, la que es analítica en A; el integrando es analítico sólo en $A\backslash\{z_0\}$, por lo que no podemos usar el teorema de Cauchy para concluir que la integral es cero de hecho, la integral es usualmente diferente de cero.

Integrales del tipo de Cauchy

La fórmula de Cauchy es una fórmula especial y poderosa para el valor de f en z_0. La usaremos ahora para mostrar que todas las derivadas de orden superior de f también existen. El truco central en la demostración es un artificio que se usa con frecuencia. Cambiamos un tanto el punto de vista. Si empezamos por asumir tan sólo que conocemos los valores de la función a lo largo de una curva, entonces, podemos considerar a las integrales a lo largo de la curva para definir una nueva función. La versión de esta idea que se usa aquí se llama *integral del tipo de Cauchy.*

Diferenciabilidad de integrales del tipo de Cauchy 2.4.5. *Sea* γ *una curva en* $\mathbf{C}$ *y sea* g *una función continua, definida a lo largo de la curva (en la imagen* $\gamma([a, b])$*). Hágase*

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

Entonces, G *es analítica en* $\mathbf{C}\backslash\gamma([a, b])$; *en efecto,* G *es infinitamente diferenciable y su* k*-ésima derivada está dada como*

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

La fórmula para las derivadas puede recordarse si se lee "diferenciación con respecto de z bajo el signo de integración":

$$\frac{d}{dz}G(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\right)d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

La demostración formal justifica este procedimiento y aparece al final de esta sección.

Existencia de las derivadas de orden superior

Si se usan las integrales del tipo de Cauchy, podemos mostrar que una función de una variable compleja diferenciable es, en realidad, infinitamente diferenciable, y que al mismo tiempo nos da una fórmula para todas las derivadas.

Fórmula integral de Cauchy para las derivadas 2.4.6. *Sea* f *analítica en una región* A. *Entonces, todas las derivadas de* f *existen en* A. *Más aún, para* z_0 *en* A *y* γ *cualquier curva cerrada homotópica a un punto en* A, *para la que* z_0 *no está en* γ, *tenemos*

$$f^{(k)}(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

donde $f^{(k)}$ *denota la* k*-ésima derivada de* f.

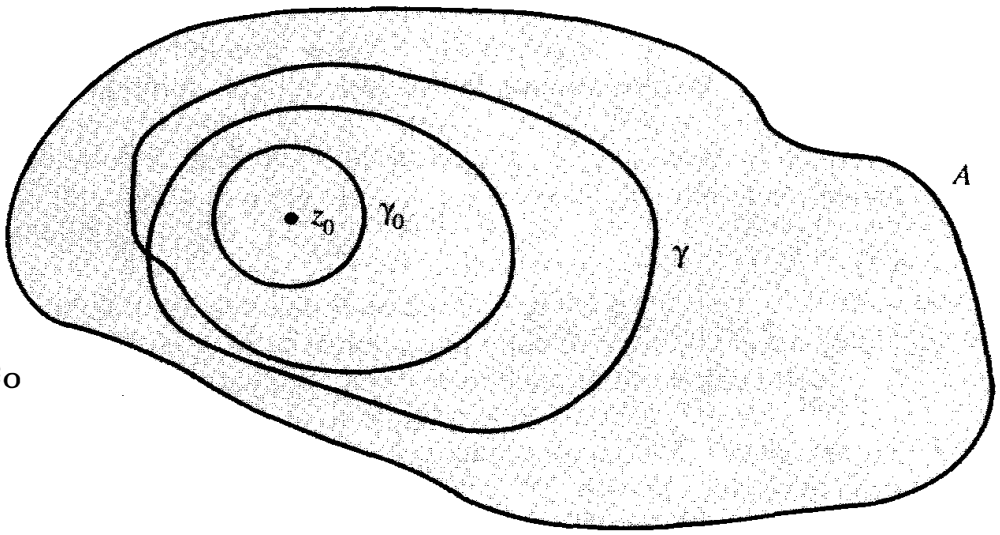


Figura 2.4.3. Sea γ_0 un círculo con centro en z_0 y lo suficientemente pequeño para que no se cruce con γ.

Demostración. Puesto que A es abierto y z_0 no está en γ, podemos encontrar un círculo pequeño γ_0 con centro en z_0, cuyo interior está en A y tal que γ no corte a γ_0 (véase la figura 2.4.3). Para z en A y no en γ, defínase

$$G(z) = f(z) \cdot I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Ésta es una integral del tipo de Cauchy y, por tanto, es infinitamente diferenciable en $A \backslash \gamma$, y

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \tag{4}$$

Pero

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{y} \quad I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

también son integrales del tipo de Cauchy y, por tanto, son infinitamente diferenciables cerca de z_0. En particular, el índice es una función continua de z, en tanto z no cruce γ —pero es también un entero—. Por lo tanto, debe ser constante, excepto cuando z cruza la curva. En particular, es constante en el interior de γ_0. Así $G^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0)I(\gamma, z_0)$. Al combinar esto con la ecuación (4), da el resultado deseado. ■

Desigualdades de Cauchy y el teorema de Liouville

Desigualdades de Cauchy 2.4.7. *Sea* f *analítica en una región* A *y sea* γ *un círculo con radio* R *y centro* z_0 *que está en* A. *Asuma que el disco* $\{z$ *tal que* $|z - z_0| < R\}$ *también está en* A. *Suponga que* $|f(z)| \le M$ *para toda* z *en* γ. *Entonces, para cada* $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{R^k} M \tag{5}$$

Demostración. Puesto que $I(\gamma, z_0) = 1$, de la fórmula (3) obtenemos

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta$$

y en consecuencia

$$|f^{(k)}(z_0)| = \frac{k!}{2\pi}\left|\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta\right|$$

Ahora bien

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\right| \le \frac{M}{R^{k+1}}$$

puesto que $|\zeta - z_0| = R$ para ζ en γ, así que

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{k+1}} \cdot l(\gamma)$$

Pero $l(\gamma) = 2\pi R$, con lo que conseguimos nuestro resultado. ■

Este resultado establece que aun cuando la k-ésima derivada de f puede irse hacia infinito conforme $k \to \infty$, no puede crecer demasiado rápido conforme $k \to \infty$;

específicamente, no puede crecer más rápido que una constante multiplicada por $k!/R^k$. Podemos usar las desigualdades de Cauchy para deducir el siguiente sorprendente resultado: *las únicas funciones enteras acotadas son las constantes.*

Teorema de Liouville[5] 2.4.8. *Si* f *es entera y existe una constante* M *tal que* $|f(z)| \leq M$ *para todo* $z \in \mathbf{C}$, *entonces* f *es constante.*

Demostración. Para cualquier $z_0 \in \mathbf{C}$ tenemos, por la fórmula (5), $|f'(z_0)| \leq M/R$. Si hacemos $R \to \infty$, concluimos que $|f'(z_0)| = 0$ y, por lo tanto, $f'(z_0) = 0$, así que f es constante. ■

Ésta es otra propiedad completamente diferente a aquellas que podían ser posiblemente válidas para funciones de una variable real. Ciertamente, hay muchas funciones de variable real que son suaves y acotadas y que no son constantes, por ejemplo, $f(x) = \text{sen } x$.

Teorema fundamental de álgebra

A continuación demostraremos un resultado que aparentemente es elemental y que probablemente, en el pasado, el estudiante lo ha tomado como un hecho. Algebraicamente, el teorema es bastante difícil.[6] Sin embargo, hay una demostración muy simple que usa el teorema de Liouville.

Teorema fundamental del álgebra 2.4.9. *Sean* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *números complejos y supóngase que* $n \geq 1$ *y* $a_n \neq 0$. *Sea* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. *Entonces, existe un punto* $z_0 \in \mathbf{C}$ *tal que* $p(z_0) = 0$.

NOTA: De acuerdo con el ejercicio de repaso 24 al final del capitulo 1, el polinomio no puede tener más de n raíces. Si se factoriza repetidamente se sigue que p tendrá *exactamente n* raíces, si son contadas de acuerdo con sus multiplicidades.

Demostración. Supóngase que $p(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \mathbf{C}$. Entonces $f(z) = 1/p(z)$ es entera. Ahora bien $p(z)$ y, en consecuencia, $f(z)$ no son constantes (porque $a_n \neq 0$), así que, por el teorema de Liouville, es suficiente demostrar que $f(z)$ es acotada.

Para hacer esto, primero demostraremos que $p(z) \to \infty$ conforme $z \to \infty$ o, equivalentemente, que $f(z) \to 0$ conforme $z \to \infty$. En otras palabras, probamos que dada $M > 0$, existe un número $K > 0$ tal que $|z| > K$ implica que $|p(z)| > M$. Puesto que $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ tenemos que $|p(z)| \geq |a_n|\,|z|^n - |a_0| - |a_1|\,|z| - \cdots - |a_{n-1}|\,|z^{n-1}|$. (Hacemos $a_n z^n = p(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{n-1} z^{n-1}$ y aplicamos la desigualdad del triángulo.) Sea $a = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$. Si $|z| > 1$, entonces

[5] De acuerdo con E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4a. ed., London, Cambridge University Press, 1927, p. 105, el teorema de Liouville se atribuye incorrectamente a Liouville por Borchardt (a quien otros copiaron), quien lo escuchó en unas lecturas de Liouville en 1947. Éste se debe a Cauchy, en *Comptes Rendus*, vol. 19, 1844, pp. 1377-1378, aun cuando pudo haber sido conocido anteriormente por Gauss (véase la siguiente nota de pie de página).

[6] Fue demostrada primero por Karl Friedrich Gauss en su tesis doctoral en 1799. La presente demostración parece ser debida esencialmente también a Gauss (*Comm. Soc. Gott.*, vol. 3, 1816, pp. 59-64).

$$|p(z)| \geq |z|^{n-1}\left(|a_n||z| - \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-2}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{1}\right)$$

$$\geq |z|^{n-1}(|a_n||z| - a)$$

Sea $K = \text{máx}\{1, (M + a)/|a_n|\}$; entonces, si $|z| > K$, tenemos que $|p(z)| \geq M$.

Por lo que si $|z| > K$, tenemos $1/|p(z)| < 1/M$. Pero en el conjunto de z para las cuales $|z| \leq K$, $1/p(z)$ está acotada en valor absoluto, pues es continua. Si ésta cota para $1/p(z)$ se denota por L, entonces, en $\mathbf{C}$, obtenemos que $1/|p(z)| < \text{máx}\,(1/M, L)$ y, por lo tanto, $|f(z)|$ está acotada en $\mathbf{C}$. ■

Otro argumento para mostrar que $f(z) \to 0$ conforme $z \to \infty$, que es un tanto más sencillo pero acepta la validez de varios de los teoremas de límites, es el siguiente

$$f(z) = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$= \frac{1/z^n}{a_n + a_{n-1}(1/z) + a_{n-2}(1/z^2) + \cdots + a_0(1/z^n)}$$

Al hacer $z \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \frac{0}{a_n + 0 + \cdots + 0} = 0$$

puesto que $a_n \neq 0$.

Teorema de Morera

El siguiente teorema es un recíproco parcial del teorema de Cauchy.

Teorema de Morera 2.4.10. *Sea* f *continua en una región* A *y suponga que* $\int_\gamma f = 0$, *para cualquier curva cerrada en* A. *Entonces,* f *es analítica en* A, *y* $f = F'$ *para alguna función analítica* F *en* A.

Demostración. La existencia de la antiderivada se sigue de que las integrales a lo largo de curvas cerradas se anulan y del teorema de independencia con respecto de la trayectoria (2.1.9). La antiderivada F es, ciertamente, analítica (su derivada es f). Por lo tanto, por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, es infinitamente diferenciable. En particular $F'' = f'$ existe. ■

Al aplicar el teorema de Morera, con frecuencia sólo se quiere mostrar que f es analítica en una región. Si la región no es simplemente conexa, f podría no tener una antiderivada en toda la región. Pero para mostrar la diferenciabilidad cerca de un punto, uno podría restringir la atención a una vecindad pequeña del punto y a cierto tipo de curvas, si así conviene. Esta idea se ilustra en el siguiente corolario y en los ejemplos resueltos 2.4.16 y 2.4.17.

Corolario 2.4.11. *Sea* f *continua en una región* A *y analítica en* $A\backslash\{z_0\}$ *para algún punto* $z_0 \in$ A. *Entonces* f *es analítica en* A.

Demostración. Para mostrar la analiticidad en z_0, podemos concentrarnos en un disco pequeño $D(z_0, \varepsilon) \subset A$. Si γ es cualquier curva cerrada en el disco, entonces $\int_\gamma f = 0$, por la versión fortalecida del teorema de Cauchy para un disco (2.3.5). Así, el teorema de Morera implica que f es analítica en este disco. Ya sabemos que es analítica en el resto de A. ■

Demostración técnica del teorema 2.4.5

Diferenciabilidad de integrales del tipo de Cauchy 2.4.5. *Sea* γ *una curva en* **C** *y sea* g *una función continua definida a lo largo de la curva, en la imagen* $\gamma([a, b])$. *Hágase*

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Entonces G, *es analítica en* $\mathbf{C}\backslash\gamma([a, b])$; *en efecto,* G *es infinitamente diferenciable, con la* k*-ésima derivada dada por*

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Demostraremos esto bajo una suposición sobre g, un tanto más débil que la continuidad. Todo lo que suponemos es que la función es acotada e integrable a lo largo de γ. Llamamos a tales funciones admisibles.

Demostración. Usaremos primero varios hechos del cálculo avanzado desarrollados en la sección 1.4. La curva imagen γ es un conjunto compacto, pues es la imagen continua de un intervalo cerrado y acotado. Si z_0 no está en γ entonces, por el lema de la distancia, éste está a una distancia positiva δ de la curva. Si tomamos $\eta = \delta/2$ y U como el η–disco en torno a z_0, entonces $z \in U$ y ζ en γ implica que $|z - \zeta| \geq \eta$ pues $|z - \zeta| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z| \geq 2\eta - \eta$ (véase la figura 2.4.4).

Empezamos ahora con el caso $k = 1$. Queremos mostrar que

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right] = 0$$

La expresión entre paréntesis puede escribirse como

$$\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta = \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2(\zeta - z)} d\zeta$$

la cual se obtiene al usar la identidad

$$\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right)-\frac{1}{(\zeta-z_0)^2}=\frac{z-z_0}{(\zeta-z_0)^2(\zeta-z)}$$

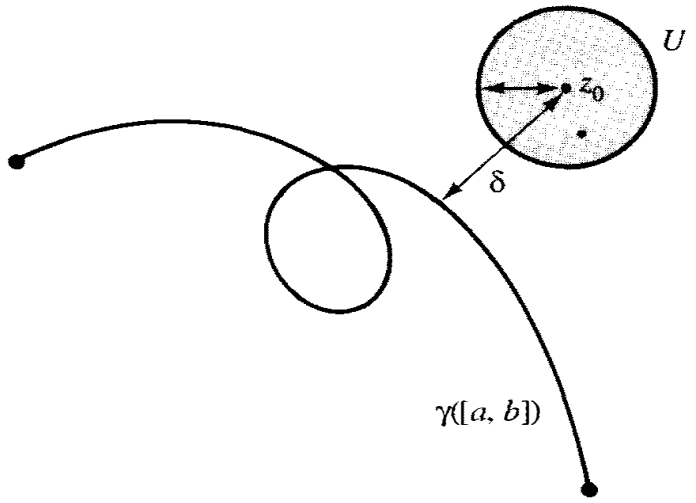


Figura 2.4.4. Un punto z_0 que no está sobre una curva γ, está a una distancia positiva de γ.

Sea U la η-vecindad de z_0 construida como previamente se describió y sea M el máximo de g en γ. Entonces $|(\zeta - z)^2 (\zeta - z)| \geq \eta^2 \cdot \eta = \eta^3$, con lo que tenemos la estimación $|g(\zeta)/[(\zeta - z_0)^2 (\zeta - z)]| \leq M\eta^{-3}$ (M una constante fija independiente de ζ en γ, y $z, z_0 \in U$). Así

$$\left|\frac{z-z_0}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2(\zeta-z)}\,d\zeta\right| \leq |z-z_0|\,\frac{M\eta^{-3}}{2\pi}\,l(\gamma)$$

Esta expresión se aproxima a 0 conforme $z \to z_0$ y en consecuencia el límite es 0, como se quería.

Para demostrar el caso general procedemos por inducción sobre k. Supóngase que se sabe que el teorema es válido para toda función admisible y para todo valor de k entre 1 y $n - 1$. Queremos demostrar que funciona para $k = n$. Formulamos la hipótesis de inducción de esta manera ya que no sólo la aplicaremos a g, sino también a $g(\zeta)/(\zeta - z_0)$, la cual también es acotada e integrable a lo largo de γ. Sabemos que G puede diferenciarse $n - 1$ veces en $\mathbf{C}\backslash\gamma$ y que

$$G^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\,d\zeta$$

Sea $z_0 \in \mathbf{C}\backslash\gamma([a, b])$. Entonces, al usar la identidad

$$\frac{1}{(\zeta-z)^n} = \frac{1}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)} + \frac{z-z_0}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)}$$

obtenemos

$$G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)}\,d\zeta - \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n}\,d\zeta\right]$$
$$+ \frac{(n-1)!}{2\pi i}(z - z_0)\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)}\,d\zeta \qquad (6)$$

Podemos concluir de esta ecuación que $G^{(n-1)}$ es continua en z_0, por la siguiente razón. Si aplicamos la hipótesis de inducción a $g(\zeta)/(\zeta - z_0)$, vemos que

$$\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)}\,d\zeta$$

es analítica como función de z en el conjunto $\mathbf{C}\backslash\gamma([a, b])$ y, por tanto, continua en z. En consecuencia

$$\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)}\,d\zeta \to \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n}\,d\zeta$$

conforme $z \to z_0$. Si la distancia de z_0 a γ es 2η, si $|g(z)| < M$ en γ, y si $|z - z_0| < \eta$, tenemos

$$\left|\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)}\,d\zeta\right| < \frac{M}{\eta^{n+1}} \cdot l(\gamma)$$

donde $l(\gamma)$ es la longitud de γ. Así

$$|z - z_0|\left|\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)}\,d\zeta\right| \to 0$$

conforme $z \to z_0$ y, por lo tanto, $G^{(n-1)}$ es continua en $\mathbf{C}\backslash\gamma([a, b])$.

De la ecuación (6) obtenemos

$$\frac{G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0}$$
$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\frac{1}{(z - z_0)}\left[\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)}\,d\zeta - \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n}\,d\zeta\right]$$
$$+ \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)}\,d\zeta \qquad (7)$$

Al aplicar la hipótesis de inducción a $g(\zeta)/(\zeta - z_0)$, vemos que el primer término del lado derecho de la ecuación (7) converge a

$$\frac{(n-1)(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

conforme $z \to z_0$. En el párrafo siguiente a la ecuación (6), se muestra que $G^{(n-1)}$ es continua en $\mathbf{C}\backslash\gamma([a, b])$ y al aplicar este hecho a $g(\zeta)/(\zeta - z_0)$ en lugar de a $g(\zeta)$, se infiere que

$$\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)}\,d\zeta \to \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

conforme $z \to z_0$. Así hemos mostrado que, conforme $z \to z_0$,

$$\frac{G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0}$$

converge a

$$(n-1)\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta + \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

Esto concluye la inducción y demuestra el teorema. ■

Ejemplos resueltos

2.4.12. *Considérese la curva* γ *definida como* $\gamma(t) = (\cos t, 3 \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 4\pi$. *Muestre rigurosamente que* $I(\gamma, 0) = 2$.

Solución. Suponga que podemos mostrar que γ es homotópica en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ a círculo $\tilde{\gamma}$ que está centrado en el origen y que es recorrido dos veces en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj (esto es, $\tilde{\gamma}(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$). Entonces, por la proposición 2.4.2, $I(\gamma, 0) = I(\tilde{\gamma}, 0) = 2$. Una homotopía adecuada es $H(t, s) = \cos t + i\,(3 - 2s)$ sen t, dado que H es continua, $H(t, 0) = \gamma(t)$ y $H(t, 1) = \tilde{\gamma}(t)$ y H no es nunca cero (véase la figura 2.4.5).

2.4.13. *Evalúe*

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz \qquad \text{y} \qquad \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\,dz$$

donde γ *es el círculo unitario.*

Solución. El círculo γ es contraíble a un punto en la región en la cual cos z es analítica, ya que en efecto cos z es entera. Por lo tanto, podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy, observando que $I(\gamma, 0) = 1$, para obtener

$$1 = \cos 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz$$

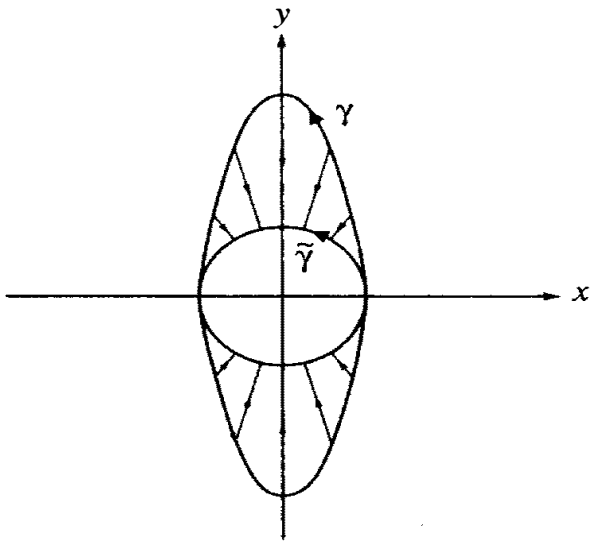


Figura 2.4.5. Homotopía de $\gamma(t) = (\cos t, 3 \operatorname{sen} t)$ hacia $\tilde{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

de modo que

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz = 2\pi i$$

Por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, tenemos

$$\operatorname{sen}'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\, dz$$

esto es,

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\, dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i$$

2.4.14. *Evalúe*

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\, dz$$

donde γ *es* (i) *el círculo unitario y* (ii) *un círculo con radio* 3 *centrado en el* 0.

Solución

(i) γ es contraíble a un punto en $\mathbf{C}\backslash\{2\}$ (¿por qué?), y $(e^z + z)/(z-2)$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{2\}$. Entonces, por el teorema de Cauchy, $\int_\gamma (e^z + z)/(z-2)\, dz = 0$.

(ii) Aquí γ no es contraíble a algún punto en $\mathbf{C}\backslash\{2\}$. En efecto, γ gira alrededor de $2 + 0i$ exactamente una vez, por tanto $I(\gamma, 2) = 1$.
Precisamente, γ es homotópica en $\mathbf{C}\backslash\{2\}$ a un círculo γ centrado en 2 y, por tanto, $I(\gamma, 2) = 1$ por la proposición 2.4.2. Así, por la fórmula integral de Cauchy, la cual se puede aplicar pues γ es contraíble a un punto, y $e^z + z$ es analítica en todo $\mathbf{C}$, tenemos

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2}\, dz = 2\pi i(e^2 + 2)$$

2.4.15. *Este ejemplo, que trata con funciones analíticas definidas por integrales, generaliza el teorema* 2.4.5. *Sea* f(z, w) *una función continua de* z *y* w, *para* z *en una región* A *y* w *sobre una curva* γ. *Para cada* w *sobre* γ *asuma que* f *es analítica en* z. *Hágase*

$$F(z) = \int_{\gamma} f(z, w)\, dw$$

Entonces, muestre que F *es analítica y*

$$F'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z, w)\, dw$$

donde $\partial f/\partial z$ *denota la derivada de* f *con respecto de* z, *con* w *mantenido fijo.*

Solución. Sea $z_0 \in A$. Sea γ_0 un círculo en A alrededor de z_0 cuyo interior también está en A. Entonces, para z en el interior de γ_0,

$$f(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta, w)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

por la fórmula integral de Cauchy. Así

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\int_{\gamma_0} \frac{f(z, w)}{\zeta - z}\, d\zeta \right] dw$$

Enseguida sostenemos que podemos invertir el orden de integración, obteniendo así

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \left[\int_{\gamma} \frac{f(\zeta, w)}{\zeta - z}\, dw \right] d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Este procedimiento se justifica debido a que el integrando es continuo, y cuando lo escribimos en términos de integrales reales tiene la forma

$$\int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} h(x, y)\, dx\, dy + i \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} k(x, y)\, dx\, dy$$

Nosotros sabemos, del cálculo, que este orden puede intercambiarse (teorema de Fubini); véase, por ejemplo, J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, San Francisco, W.H. Freeman and Company, 1974, cap. 9.
Así

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

y, por tanto, por el teorema 2.4.5, F es analítica en el interior de γ_0, y

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta, w)}{(\zeta - z)^2}\, dw\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta, w)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\, dw = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, w)\, dw$$

otra vez, por la fórmula integral de Cauchy. Ya que z_0 es arbitrario obtenemos el resultado deseado.

Observación. f debe ser analítica en z, pero sólo necesita ser integrable con respecto de la variable w, como es evidente a partir de la demostración precedente; únicamente necesitamos una hipótesis adecuada para justificar el intercambio en el orden de integración.

2.4.16. *Demuestre la siguiente afirmación: Suponga que* f *es continua en una región* A *y que para cada* z_0 *en* A, *existe un disco* $D = D(z_0, \rho)$ *tal que* $\int_R f = 0$ *para cualquier trayectoria rectangular* R *en* D *con lados paralelos a los ejes. Entonces* f *es analítica en* A (véase la figura 2.4.6).

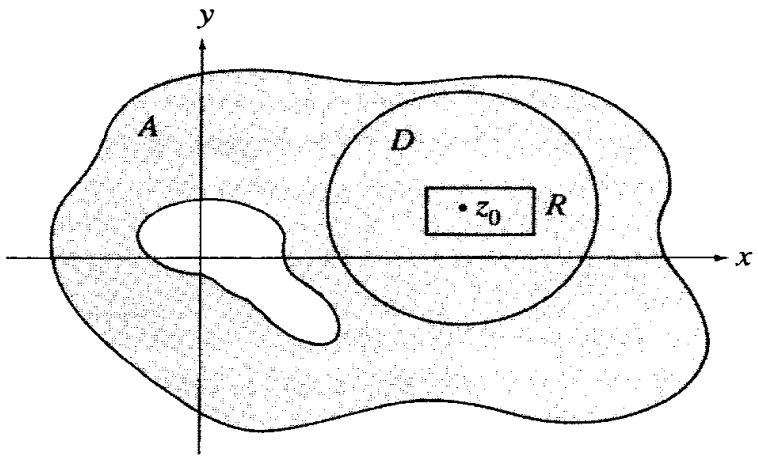


Figura 2.4.6. Si $\int_R f = 0$, entonces f es analítica.

Solución. Sea z_0 en A. La anulación de $\int_R f$ para rectángulos en D, fue la conclusión del teorema de Cauchy-Goursat para un rectángulo (2.3.2) y la herramienta usada en la construcción de la antiderivada para f en la demostración del teorema de Cauchy para un disco. Así que la antiderivada existe en D (no necesariamente en todo A al mismo tiempo). La analiticidad en D se sigue de la demostración del teorema de Morera y, por tanto, f es analítica cerca de z_0. Puesto que z_0 fue un punto arbitrario de A, f es analítica en A.

2.4.17. *Demuestre lo siguiente: Suponga que* A *es una región que intersecta al eje real* x *y que* f *es una función continua en* A *y analítica en* A**R**. *Entonces,* f *es analítica en* A.

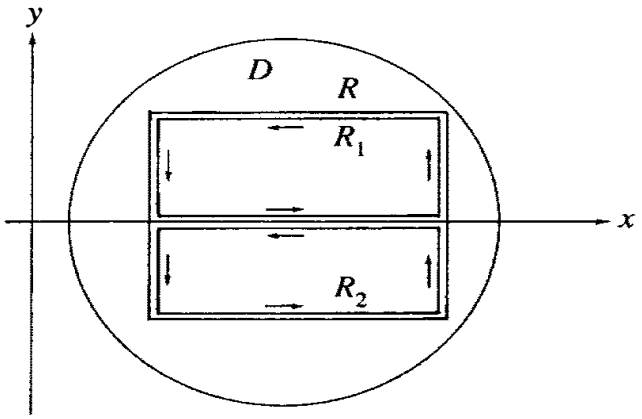


Figura 2.4.7. Construcción usada para mostrar que $\int_R f = 0$.

Solución. Sabemos que f es analítica en todo A excepto en el eje real, por tanto, supóngase que $z_0 \in R$. Puesto que A es abierto, existe un disco $D = D(z_0; \rho) \subset A$. Sea R una trayectoria rectangular en este disco con lados paralelos a los ejes. Si R no toca o cruza el eje real, entonces $\int_R f = 0$, por el teorema de Cauchy. Si lo cruza, como en la figura 2.4.7, entonces $\int_R f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f$, donde R_1 y R_2 son rectángulos con uno de sus lados sobre el eje. (Los lados sobre el eje son recorridos en direcciones opuestas y, por tanto, se cancelan.) Así que es suficiente mostrar que $\int_R f = 0$ cuando R es un rectángulo con un lado sobre el eje real, como en la figura 2.4.8. Sean a y b los extremos del lado sobre el eje, y nótese que $b - a < \rho$.

Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que f es continua,es uniformemente continua en el conjunto compacto compuesto por R y su interior y, por tanto, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ siempre que $|z_1 - z_2| \leq \delta$, y z_1 y z_2 están en este conjunto. Podemos también escoger δ que sea menor que ε. Sea M el máximo de $|f(z)|$ en R y su interior y sea S otro rectángulo igual a R excepto que el extremo sobre el eje está movido una distancia δ a partir del eje. Entonces, con la notación de la figura 2.4.8.

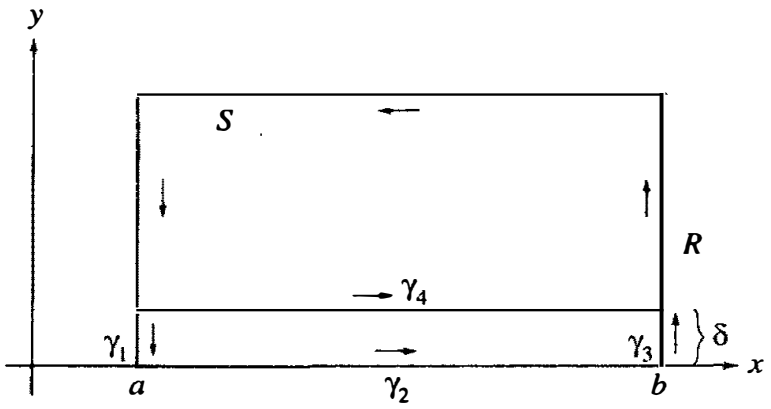


Figura 2.4.8. El rectángulo deslizado ligeramente del eje real.

$$\left|\int_R f - \int_S f\right| = \left|\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f - \int_{\gamma_4} f\right|$$

$$\leq \left|\int_{\gamma_1} f\right| + \left|\int_{\gamma_2} f - \int_{\gamma_4} f\right| + \left|\int_{\gamma_3} f\right|$$

$$\leq \delta M + \left|\int_a^b [f(x) - f(x + \delta i)]\, dx\right| + \delta M$$

$$\leq 2\delta M + \int_a^b |f(x) - f(x + \delta i)|\, \delta x$$

$$\leq 2\delta M + \varepsilon(b - a) \leq \varepsilon(2M + \rho)$$

Ya que esto se satisface para toda $\varepsilon > 0$, debemos tener $\int_R f - \int_S f = 0$. Pero, por el teorema de Cauchy, $\int_S f = 0$, ya que S no cruza el eje y está completamente dentro

de una región en la cual se sabe que f es analítica. Así $\int_R f = 0$. Hemos mostrado que las condiciones del ejemplo resuelto 2.4.16 se dan y, por tanto, f es analítica en A.

Ejercicios

1. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z-1}\,dz$, donde γ es un círculo de radio 2, centrado en el 0.

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2}\,dz$, donde γ es el círculo unitario.

2. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2-1}{z^2+1}\,dz$, donde γ es un círculo de radio 2, centrado en el 0.

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} e^z}{z}\,dz$, donde γ es el círculo unitario.

3. Sea f entera. Si $|f(z)| \le M|z|^n$ para $|z|$ grande, para una constante M, y para un entero n, muestre que f es un polinomio de grado $\le n$.

4. Sea f analítica en "el interior y sobre" una curva cerrada simple γ. Suponga que $f = 0$ sobre γ. Muestre que $f = 0$ en el interior de γ.

5. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^3}$, donde γ es el cuadrado con vértices $-1-i$, $1-i$, $1+i$, $-1+i$.

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}\,dz$, donde γ es el círculo unitario.

6. Sea f analítica en una región A y sea γ una curva cerrada en A. Para cualquier $z_0 \in A$ que no está sobre γ, muestre que

$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\,d\zeta$$

¿Puede usted pensar en una forma de generalizar este resultado?

7. Suponga que sabemos que $f(z)$ es analítica en $|z| < 1$ y que $|f(z)| \le 1$. ¿Qué estimación puede hacerse acerca de $|f'(0)|$?

8. Suponga que f es entera y que $\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$. Demuestre que f es constante.

9. Demuestre que si γ es un círculo, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, entonces para toda z en el interior de γ (esto es, $|z - z_0| < r$), $I(\gamma, z) = 1$.

10. Use el ejemplo resuelto 2.4.15 para demostrar que

$$F(z) = \int_0^1 e^{-z^2x^2}\,dx$$

es analítica en z. ¿Cómo es $F'(z)$?

11. Muestre que si F es analítica en A, entonces también lo es f, donde

$$f(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

si $z \neq z_0$ y $f(z_0) = F'(z_0)$, donde z_0 es algún punto de A.

12. Demuestre que si la imagen γ está en una región simplemente conexa A, y si $z_0 \notin A$, entonces $I(\gamma, z_0) = 0$.

13. Use el ejemplo resuelto 2.1.12 (donde sea apropiado) y la fórmula integral de Cauchy para evaluar las siguientes integrales; en cada caso, γ es el círculo $|z| = 2$.

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 1}$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1}$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 8}$ *d)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2z - 3}$

14. Demuestre que $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \pi$, considerando $\int_\gamma (e^z/z)dz$, donde γ es el círculo unitario.

15. Evalúe

$$\int_C \frac{|z|e^z}{z^2}\,dz$$

donde C es la circunferencia del círculo de radio 2 alrededor del origen.

16. Considere la función $f(z) = 1/z^2$.

a) Satisface que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo contorno cerrado γ (que no pasa a través del origen), pero no es analítica en $z = 0$. ¿Contradice esta afirmación el teorema de Morera?

b) Es acotada conforme $z \to \infty$ pero no es constante. ¿Contradice esta afirmación el teorema de Liouville?

17. Sea $f(z)$ entera y sea $|f(z)| \geq 1$ en todo el plano complejo. Demuestre que f es constante.

18. ¿Es $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}\,dz = 0$? ¿Es $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2}\,dz = 0$?

19. Evalúe

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2 - 2i}$

b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z^2 + 16)}$

20. Demuestre que para curvas cerradas γ_1, γ_2.

$$I(-\gamma_1, z_0) = -I(\gamma_1, z_0)$$

$$I(\gamma_1 + \gamma_2, z_0) = I(\gamma_1, z_0) + I(\gamma_2, z_0)$$

Interprete geométricamente estos resultados.

21. Sea f analítica en el interior y sobre el círculo $\gamma: |z - z_0| = R$. Demuestre que

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right] f(z)\, dz$$

para z_1, z_2 en el interior de γ.

2.5. EL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO Y FUNCIONES ARMÓNICAS

Una de las consecuencias más sorprendentes y poderosas de la fórmula integral de Cauchy es el *teorema del módulo máximo, también llamado el principio del módulo máximo*. Éste establece que si f es una función analítica en una región A y no es constante, entonces $|f|$ no puede tener un máximo local en el interior de A (puede alcanzar un máximo sólo en la frontera de A). Este teorema y la fórmula integral de Cauchy se usarán para desarrollar algunas de las propiedades importantes de las funciones armónicas.

Teorema del módulo máximo

El principio del módulo máximo puede enunciarse, quizá mejor, como sigue: si una función analítica tiene un máximo local (o su valor absoluto) en un punto, entonces debe ser constante cerca de ese punto. Una versión preliminar del teorema es ésta:

Principio del módulo máximo (versión local) 2.5.1. *Sea* f *analítica en una región* A *y supóngase que* |f| *tiene un máximo relativo* $z_0 \in$ A. *(Esto es,* $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ *para todo* z *en alguna vecindad de* z_0*). Entonces,* f *es constante en alguna vecindad de* z_0.

La demostración descansa en una sorprendente consecuencia de la fórmula integral de Cauchy: el valor de una función analítica en el centro de un círculo, es el promedio de sus valores en el círculo. Todo esto será precisado en breve, pero la versión local del principio se sigue, esencialmente, porque un promedio no puede ser mayor o igual a todos los valores, a menos que todos ellos sean iguales.

Propiedad del valor medio 2.5.2. *Sea* f *analítica en el interior y sobre un círculo de radio* r *y centro en* z_0 *(esto es, analítica en una región que contiene al círculo y su interior). Entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \qquad (1)$$

Demostración. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

donde $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Pero por la definición de la integral,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \blacksquare$$

Es conveniente notar que en tanto nos mantengamos integrando en torno al círculo, no importa en qué rango de 2π varíe el ángulo. Un simple cambio de variable muestra que, por ejemplo, $\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$.

La propiedad del valor medio se usará ahora para establecer 2.5.1. La idea es que si $f(z_0)$ es al menos tan grande como el resto de los valores de f cerca de z_0 y, además, es igual al promedio de estos valores alrededor de un pequeño círculo con centro en z_0, entonces $|f(z)|$ debe ser constante cerca de z_0. Una vez que se sabe que $|f|$ es constante se sigue, de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que la propia f es constante. (Véase el ejemplo resuelto 1.5.19).

Demostración del teorema 2.5.1. Supóngase que f es analítica y que tiene un máximo relativo en z_0, de modo que $|f(z)| \le |f(z_0)|$ en algún disco $D_0 = D(z_0; r_0)$. Nosotros queremos mostrar que $|f(z)| = |f(z_0)|$ en D_0; supóngase, por el contrario, que existe un punto z_1 en D_0, donde la desigualdad estricta es válida: $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Sea $z_1 = z_0 + re^{ia}$ con $r < r_0$. Puesto que f es continua, existen números positivos ε y δ tales que $|f(z_0 + re^{i\theta})| < |f(z_0)| - \delta$ siempre que $|\theta - a| < \varepsilon$. Equivalentemente, $|f(z_0 + re^{i(a+\phi)})| < |f(z_0)| - \delta$ siempre que $|\phi| < \varepsilon$. Obtendremos ahora una contradicción usando la propiedad del valor medio y considerando separadamente la integral sobre la parte del círculo donde sabemos que la función es más pequeña (figura 2.5.1); a saber,

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + re^{i(a+\phi)})\, d\phi \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} f(z_0 + re^{i(a+\phi)})\, d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z_0 + re^{i(a+\phi)})\, d\phi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(z_0 + re^{i(a+\phi)})\, d\phi \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} \left| f(z_0 + re^{i(a+\phi)}) \right| d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| f(z_0 + re^{i(a+\phi)}) \right| d\phi \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \left| f(z_0 + re^{i(a+\phi)}) \right| d\phi
\end{aligned}$$

En la primera y en la tercera integrales, el integrando no es mayor que $|f(z_0)|$ y la longitud del intervalo es $\pi - \varepsilon$. Así, cada una de las integrales no es mayor que

$|f(z_0)|\ (\pi - \varepsilon)$. En la integral intermedia, la longitud del intervalo es 2ε, y el integrando es menor que $|f(z_0)| - \delta$. Por lo tanto, esta integral no es mayor que $(|f(z_0)| - \delta)\ 2\varepsilon$. Al reunir todo esto nos da

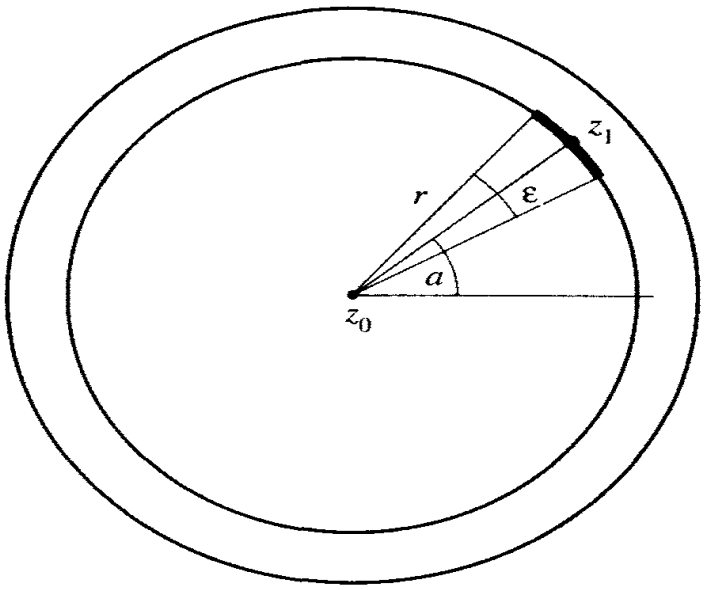


Figura 2.5.1. Construcción para la demostración del principio del módulo máximo —versión local—. $|\phi| < \varepsilon$ da la parte del círculo donde se sabe que $|f|$ es menor.

$$|f(z_0)| < \frac{1}{2\pi}\left[\,|f(z_0)|(\pi - \varepsilon) + (\,|f(z_0)| - \delta)2\varepsilon + |f(z_0)|(\pi - \varepsilon)\right]$$

o

$$|f(z_0)| < |f(z_0)|\,\frac{\varepsilon\delta}{\pi}$$

Esto es obviamente imposible y muestra que no puede existir tal punto z en D_0 para el que $|f(z)| < |f(z_0)|$. La única posibilidad restante es que $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo z en D_0.

Así que $|f|$ es constante en D_0. Al usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, como en el ejemplo resuelto 1.5.19, se muestra que la propia función f debe ser constante. Esto es exactamente lo que deseábamos. ■

La versión local del principio del módulo máximo nos dice que una función analítica no puede tener un máximo local en un punto, a menos que ésta sea constante cerca del punto. En el capítulo 6 veremos que aún más es cierto. Una función analítica en un conjunto abierto y *conexo* no puede tener un máximo local en ningún punto del conjunto, a menos que sea constante en todo el conjunto. Dirigimos ahora nuestra atención a una versión global un tanto diferente de este principio. Investigaremos máximos globales, esto es, el valor más grande que toma $|f(z)|$ en todo el conjunto. Mostraremos que éste sólo puede encontrarse en la orilla o frontera del conjunto. En la sección 1.4, vimos que una función continua con valores reales en un conjunto cerrado y acotado, alcanza un máximo finito, pero podría no hacerlo si el conjunto no es cerrado o no es acotado.

Cerradura y frontera

En la sección 1.4 se vio intuitivamente que un conjunto es cerrado, si contiene todos los puntos de su frontera; y es abierto, si no contiene a ninguno de ellos. Así, si empezamos con un conjunto A y agregamos todos aquellos puntos de la frontera que le hacen falta, deberemos obtener un conjunto cerrado que contiene a A. Esto es cierto, pero hay algunos problemas técnicos. Uno de ellos es que aún no tenemos una definición de "frontera".

Definición 2.5.3. *Sea* A *un conjunto. La* ***cerradura*** *de* A, *denotada por* $\bar{A}$ *o por* cl (A), *consiste de* A *junto con todos los puntos límite de todas las sucesiones convergentes de puntos de* A.

Esto produce el resultado deseado, el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.

Proposición 2.5.4. *Si* $A \subset C$, *entonces*

(i) $A \subset \text{cl}(A)$.
(ii) A *es cerrado si y sólo si* $A = \text{cl}(A)$.
(iii) *Si* $A \subset C$ *y* C *es cerrado, entonces* $\text{cl}(A) \subset C$.
(iv) cl (A) *es cerrado.*

Demostración. La primera afirmación es inmediata a partir de la definición. La herramienta principal para las restantes, es la proposición 1.4.8, la cual establece que un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a los límites de todas las sucesiones convergentes de sus puntos. Si hacemos $\text{lím}(A) = \{w \mid$ existe una sucesión de puntos en A que converge a $w\}$, entonces $A \subset \text{lím}(A)$ pues las sucesiones constantes, ciertamente convergen. La cerradura se definió como $\text{cl}(A) = A \cup \text{lím}(A)$, así que en realidad tenemos que $\text{cl}(A) = \text{lím}(A)$. Pero la proposición 1.4.8, dice exactamente que A es cerrado si y sólo si $\text{lím}(A) \subset A$, por ende (ii) queda establecida. Esto también muestra que si C es cerrado y $A \subset C$, entonces $\text{lím}(A) \subset C$ y, por tanto, tenemos (iii). Lo único que resta mostrar es que cl (A) es cerrado. Para ello, tan sólo necesitamos mostrar que $\text{cl}(A) = \text{cl}(\text{cl}(A))$, esto es, que $\text{lím}(A) = \text{lím}(\text{lím}(A))$. Puesto que automáticamente $\text{lím}(A) \subset \text{lím}(\text{lím}(A))$, resta por mostrar que $\text{lím}(\text{lím}(A)) \subset \text{lím}(A)$. Supóngase que $z_1, z_2, z_3, \ldots$ es una sucesión de puntos en $\text{lím}(A)$ tal que $\lim_{n \to \infty} z_n = w$. Queremos mostrar que w está en $\text{lím}(A)$. Cada z_n está en $\text{lím}(A)$, así que hay puntos w_n en A para los que $|w_n - z_n| < 1/n$. Esto obliga a que $\lim_{n \to \infty} w_n = w$, y por lo tanto $w \in \text{lím}(A)$, como se deseaba.■

La frontera de un conjunto A es el conjunto de puntos en la "orilla" de A. Si w está en la frontera debe ser posible aproximarse a él desde A y desde el complemento de A. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.5.5. *Si* A *es un conjunto, la* ***frontera*** *de* A *se define como*

$$\text{fr}(A) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(C \backslash A)$$

No es difícil ver que $\text{cl}(A) = A \cup \text{fr}(A)$. Véase el ejemplo resuelto 2.5.17.

Un principio del módulo máximo global

Estamos ahora listos para dar la versión global del principio del módulo máximo prometida.

Principio del módulo máximo 2.5.6. *Sea* A *un conjunto conexo, abierto y acotado, y sea* f: cl (A) $\to$ **C** *una función analítica en* A *y continua en* cl (A). *Sea* M *el máximo de* |f(z)| *en* fr (A); *esto es,* M *es la menor de las cotas superiores o supremo de* |f(z)|, *con* z *variando en* fr (A). *En símbolos,* M = sup {|f(z)| *tal que* z $\in$ fr (A)}. *Entonces*

(i) |f(z)| $\leq$ M *para toda* z $\in$ A

y

(ii) *Si* |f(z)| = M *para alguna* z $\in$ A, *entonces* f *es constante en* A.

Este teorema establece que el máximo de f ocurre en la frontera de A y que si el máximo se alcanza en el propio conjunto A, entonces f debe ser constante. Éste es un resultado bastante sorprendente y ciertamente es una propiedad muy especial de las funciones analíticas. Los valores de $|f|$ dentro de una región A, deben ser menores que el mayor valor de $|f|$ en la frontera. Uno debe tener algo de cuidado. Por ejemplo, el principio del módulo máximo en esta forma, *no* necesariamente es cierto, si A no es acotada. En tal caso, la función no necesariamente es acotada en A, aun si lo es en fr (A). (Véase el ejercicio 3.) En las aplicaciones de este teorema, A será a menudo, el interior de una curva cerrada simple, por lo que cl (A) será $A \cup \gamma$, y fr (A) será γ.

Es razonablemente claro que si A es acotado, también lo es su cerradura. Si $|z| \leq B$ para toda z en A, y $z_1, z_2, z_3, \ldots$ es una sucesión en A que converge a w, entonces $|z_n|$ converge a $|w|$, así que $|w| \leq B$. Por lo tanto, cl (A) = lím (A) también está acotado por B.

Del teorema del valor extremo (1.4.20), sabemos que una función continua con valores reales en un conjunto cerrado y acotado, alcanza su máximo en ese conjunto. Se sigue que si $M' = \sup \{|f(z)| \text{ tal que } z \in \text{cl } (A)\}$ entonces $M' = |f(a)|$, para alguna $a \in$ cl (A).

Demostración del principio del módulo máximo. El primer paso es mostrar que $M = M'$, donde $M' = \sup \{|f(z)| \text{tal que } z \in \text{cl } (A)\}$ y $M = \sup \{|f(z)| \text{ tal que } z \in \text{fr } (A)\}$.

En el primer paso, hay dos casos. Primero, supongamos que no existe $a \in A$ tal que $|f(a)| = M'$. Por tanto, debe haber una $a \in$ fr (A) tal que $|f(a)| = M'$ (puesto que sabemos que debe haber alguna $a \in$ cl (A) = $A \cup$ fr (A) tal que $|f(a)| = M'$). Pero, entonces, debemos tener que $|f(a)| = M' = M$. Segundo, supongamos que existe una $a \in A$ tal que $|f(a)| = M'$. Por la versión local (2.5.1), el conjunto $B = \{z \in A | f(z) = f(a)\}$ es abierto, ya que cada $z \in B$ tiene una vecindad en la cual f es el valor constante $f(z) = f(a)$. Por otra parte, B es la imagen inversa del conjunto cerrado $\{f(a)\}$ bajo la transformación continua f restringida a A; en consecuencia, B es un conjunto cerrado en A. Así B es tanto abierto como cerrado en A y, por supuesto, no vacío, por lo tanto, de los hechos básicos sobre conectividad, tenemos que $B = A$. Por ende, f es el valor constante $f(a)$ en A y, en consecuencia, por la continuidad de f en cl (A), también el valor de f es igual al valor constante $f(a)$ en cl (A) (¿por qué?). Por lo tanto, también en este caso tenemos que $M = M'$.

Ya que $M = M'$, obviamente $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in A$, y así (i) está demostrado. Si $|f(z)| = M = M'$ para alguna $z \in A$, correspondiente al segundo caso, entonces, como se mostró allí, f es constante en A y (ii) queda demostrado. ■

Lema de Schwarz

El siguiente teorema es un ejemplo de una aplicación del teorema del módulo máximo. Este resultado no es uno de los resultados más básicos de la teoría, pero indica el tipo de severas restricciones que la analiticidad impone.

Lema de Schwarz 2.5.7. *Sea* f *analítica en el disco abierto unitario* $A = \{z \in \mathbf{C}$ *tal que* $|z| < 1\}$ *y supóngase que* $|f(z)| \leq 1$ *para* $z \in A$ y $f(0) = 0$. *Entonces* $|f(z)| \leq |z|$ *para toda* $z \in A$ y $|f'(0)| \leq 1$. *Si* $|f(z_0)| = |z_0|$ *para alguna* $z_0 \in A$, $z_0 \neq 0$, *entonces* $f(z) = cz$ *para toda* $z \in A$ *y para alguna constante* c, con $|c| = 1$.

Demostración. Sea

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

La función g es analítica en A porque es continua en A y analítica en $A\backslash\{0\}$ (véase el corolario 2.4.11 del teorema de Morera). Sea $A_r = \{z$ tal que $|z| \leq r\}$ para $0 < r < 1$ (véase la figura 2.5.2). Entonces g es analítica en A_r, y en $|z| = r$, $|g(z)| = |f(z)/z| \leq 1/r$. Por el principio del módulo máximo $|g(z)| \leq 1/r$ en todo A_r; esto es, $|f(z)| \leq |z|/r$ en A_r. Pero al mantener $z \in A$ fijo, podemos dejar que $r \to 1$ para obtener que $|f(z)| \leq |z|$. Claramente, $|g(0)| \leq 1$; esto es, $|f'(0)| \leq 1$.

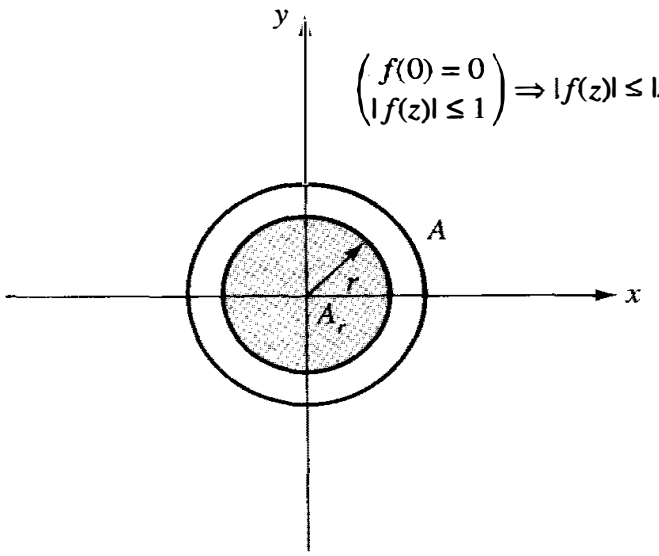


Figura 2.5.2. Lema de Schwarz.

Si $|f(z_0)| = |z_0|$, $z_0 \neq 0$, entonces $|g(z_0)| = 1$ es un máximo en A_r, donde $|z_0| < r < 1$ y, por lo tanto, g es constante en A_r. La constante es independiente de r (¿por qué?), y el teorema está demostrado. ■

El lema de Schwarz es una herramienta para muchos elegantes resultados geométricos, y ocasionalmente útiles, del análisis complejo. Una generalización que es útil para obtener estimaciones precisas de cotas para funciones, es conocida como el *principio de Lindelöf*, el cual es el siguiente: *Supóngase que* f *y* g *son analíticas en* $|z| < 1$, que g *transforma a* $|z| < 1$ en forma uno a uno y sobre en un conjunto G, que $f(0) = g(0)$, *y que la imagen de* f *está contenida en* G. *Entonces* $|f'(0)| \leq |g'(0)|$, *y la imagen de* $|z| < r$ *bajo* f, *para* $r < 1$, *está contenida en su imagen bajo* g. Este principio se hace particularmente útil por la conveniente disponibilidad de las transformaciones fraccionales parciales, para el papel de g, éstas tienen la forma $g(z) = (az + b)/(cz + d)$. Como demostraremos en el capítulo 5, éstas mandan círculos en círculos, así que la imagen bajo g del disco $|z| < r$ es usualmente fácil de encontrar (véase el ejercicio 4 para detalles adicionales).

Para un estudio provechoso de los resultados más geométricos y una bibliografía, véase T. H. MacGregor, "Geometry Problems in Complex Analysis", *American Mathematical Monthly*, mayo 1972, p. 447.

Funciones armónicas y armónicas conjugadas

Si f es analítica en A y $f = u + iv$, sabemos que u y v son infinitamente diferenciables y que son armónicas (por el teorema 2.4.6 y la proposición 1.5.11). Vamos ahora a mostrar que el recíproco también es cierto.

Proposición 2.5.8. *Sea* A *una región en* **C** *y sea* u *una función armónica, dos veces continuamente diferenciable en* A. *Entonces* u *es* C^∞, y *en una vecindad de cada punto* $z_0 \in A$, u *es la parte real de alguna función analítica. Si* A *es simplemente conexa, existe una función analítica* f *en* A *tal que* u = Re f.

Así, una función armónica es siempre la parte real de una función analítica (o la parte imaginaria de la función analítica *if*) al menos localmente y en todo el dominio de la función, si el dominio es simplemente conexo.

Demostración. Demostremos primero la última afirmación del teorema. Vamos a considerar la función $g = (\partial u/\partial x) - i(\partial/\partial y)$. Sostenemos que g es analítica. Si hacemos $g = U + iV$ donde $U = \partial u/\partial x$ y $V = -\partial u/\partial y$, debemos verificar que U y V tienen primeras parciales continuas y que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En efecto, las funciones $\partial U/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2$ y $\partial V/\partial y = -\partial^2 u/\partial y^2$ son continuas por suposición y son iguales ya que $\nabla^2 u = 0$. También, por la igualdad de las parciales cruzadas,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Así concluimos que g es analítica. Más aún, si A es simplemente conexa, existe una función analítica f en A tal que $f' = g$ (por el teorema de la antiderivada, 2.2.5 o 2.3.16). Sea $f = \tilde{u} + i\tilde{v}$. Entonces $f' = \partial\tilde{u}/\partial x) - i(\partial\tilde{u}/\partial y)$ y, por tanto, $\partial\tilde{u}/\partial x = \partial\tilde{u}/\partial y = \partial u/\partial y$. Por ende $\tilde{u}$ difiere de u por una constante. Si ajustamos f sustrayendo esta constante, obtenemos $u = \text{Re}\, f$.

Demostremos ahora la primera afirmación. Si D es un disco alrededor de z_0 en A, es simplemente conexo. Por lo tanto, como resultado de lo que acabamos de demostrar, podemos escribir $u = \text{Re}\, f$ para alguna f analítica en D. Así, puesto que f es C^∞, u es también C^∞ en una vecindad de cada punto en A y, por lo tanto, es C^∞ en A. ■

Recuérdese que cuando existe una función analítica f tal que u y v están relacionadas por $f = u + iv$, decimos que u y v son *armónicas conjugadas*. Ya que f es analítica, $-v$ y u son también conjugadas armónicas. ¡Cuidado! El orden importa; si v es una armónica conjugada de u, entonces u probablemente no es una armónica conjugada de v. ¡En cambio, $-u$ lo es! La proposición precedente dice que *en una región simplemente conexa* A, *cualquier función armónica tiene una armónica conjugada* v = Im f. Ya que las ecuaciones de Cauchy-Riemann ($\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$) se deben cumplir, v está determinada únicamente excepto por la adición de una constante. Estas ecuaciones deben usarse como un método práctico para encontrar v cuando u está dada (véase el ejemplo resuelto 1.5.20). Otra forma de obtener la armónica conjugada de u en un disco, definiéndola directamente en términos de una integral, se indicó en el ejercicio 32 de la sección 1.5.

Propiedad del valor medio y principio del máximo para funciones armónicas

Una razón de por qué la proposición 2.5.8 es importante, es que nos permite deducir propiedades de las funciones armónicas a partir de las correspondientes propiedades de las funciones analíticas. Esto se hace en el siguiente teorema.

Propiedad del valor medio para funciones armónicas 2.5.9. *Sea* u *armónica en una región que contiene un círculo de radio* r *alrededor de* $z_0 = x_0 + iy_0$ *y a su interior. Entonces*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \tag{3}$$

Demostración. Por la proposición 2.5.8, existe una función analítica f definida en una región que contiene este círculo y su interior, tal que $u = \text{Re}\, f$. Esta región de contención puede escogerse para que sea un disco ligeramente más grande. La existencia de un círculo ligeramente más grande en A es intuitivamente clara; la demostración precisa se da en el ejemplo resuelto 1.4.28. Por la propiedad del valor medio para f,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

Al tomar la parte real en ambos lados nos da el resultado deseado. ■

A partir de este resultado podemos deducir, en una forma similar a la manera en que deducimos el teorema 2.5.1, el siguiente hecho.

Principio del máximo para funciones armónicas (versión local) 2.5.10. *Sea* u *armónica en una región* A. *Suponga que* u *tiene un máximo relativo en* $z_0 \in A$ (*esto es,* $u(z) \leq u(z_0)$ *para* z *cerca de* z_0). *Entonces* u *es constante en una vecindad de* z_0.

En este teorema "máximo" puede ser remplazado por "mínimo" (véase el ejercicio 6).

En lugar de llevar a cabo realmente una demostración para $u(z)$ similar a la demostración del teorema 2.5.1, podemos usar ese resultado para dar una demostración rápida.

Demostración. En un disco alrededor de z_0, $u = \text{Re}\, f$ para alguna f analítica. Entonces $e^{f(z)}$ es analítica y $|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$. Así, puesto que e^x es estrictamente creciente en x, para todo real x, los máximos de u son los mismos que aquellos de $|e^f|$. Por el teorema 2.5.1, e^f es constante en una vecindad de z_0; por lo tanto, e^u y, por ende u, son constantes (otra vez debido a que e^x es estrictamente creciente para x real). ■

A partir de este resultado deducimos, exactamente como se dedujo el principio del módulo máximo de su versión local, la siguiente más provechosa versión.

Principio del máximo para funciones armónicas 2.5.11. *Sea* $A \subset \mathbf{C}$ *abierto, conexo y acotado. Sea* u: cl (A) $\to \mathbf{R}$ *continua y armónica en* A. *Sea* M *el máximo de* u *en* fr(A). *Entonces*

(i) $u(x, y) \leq M$ *para toda* $(x, y) \in A$.
(ii) *Si* $u(x, y) = M$ *para alguna* $(x, y) \in A$, *entonces* u *es constante en* A.

Hay un resultado correspondiente para el mínimo, denótese por m al mínimo de u en fr (A). Entonces

(i) $u(x, y) \geq m$ para $(x, y) \in A$.
(ii) Si $u(x, y) = m$ para alguna $(x, y) \in A$, entonces u es constante.

El principio del mínimo para funciones armónicas, puede deducirse del principio del máximo para funciones armónicas al aplicar éste a $-u$.

El problema de Dirichlet para el disco y la fórmula de Poisson

Existe un problema muy importante en matemáticas y física, llamado el *problema de Dirichlet*, y es éste: Sea A una región acotada abierta y sea u_0 una función continua dada en fr (A). Encuentre una función de valores reales u en cl (A) que es continua en cl (A) y armónica en A, y que es igual a u_0 en fr (A).

Existen teoremas que afirman que si la frontera fr (A) es "suficientemente suave" entonces siempre hay una solución u. Estos teoremas son bastante difíciles. Sin embargo, podemos mostrar fácilmente que la solución es siempre única.

Unicidad para el problema de Dirichlet 2.5.12. *La solución al problema de Dirichlet es única* (*suponiendo que hay una solución*).

Demostración. Sean u y $\tilde{u}$ dos soluciones. Sea $\phi = u - \tilde{u}$. Entonces ϕ es armónica y $\phi = 0$ en fr (A). Debemos mostrar que $\phi = 0$.

Por el principio del máximo para funciones armónicas, $\phi(x, y) \leq 0$ dentro de A. Similarmente, del correspondiente principio del mínimo, $\phi(x, y) \geq 0$ en A. Por lo tanto, $\phi = 0$. ■

Queremos encontrar la solución al problema de Dirichlet para el caso donde la región es un disco abierto. Para hacerlo así, deducimos una fórmula que exprese explícitamente los valores de la solución en términos de sus valores en la frontera del disco.

Fórmula de Poisson 2.5.13. *Si* u *está definida y es continua en el disco cerrado* {z tal que |z| < r} *y es armónica en el disco abierto* D(0; r) = {z tal que |z| < r}, *entonces, para* ρ < r,

$$u(\rho e^{i\Phi}) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2} d\theta \tag{4}$$

o

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta \tag{4'}$$

NOTAS

(i) Las partes técnicas de la siguiente demostración requieren un conocimiento de la idea de *convergencia uniforme*. El estudiante que no ha estudiado convergencia uniforme en cálculo avanzado, podría releer esta demostración después de estudiar la sección 3.1, donde se discuten las ideas relevantes.

(ii) Si hacemos $z = 0$ en la ecuación (4'), recobramos la propiedad del valor medio para funciones armónicas.

Demostración. Puesto que u es armónica en $D(0; r)$, y $D(0; r)$ es simplemente conexa, existe una función analítica f definida en $D(0; r)$ tal que $u = \text{Re}\, f$.

Sea $0 < s < r$ y sea γ_s el círculo $|z| = s$. Entonces, por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda z tal que $|z| < s$. Podemos manipular esta expresión de una forma conveniente para tomar las partes reales.

Sea $\tilde{z} = s^2/\bar{z}$, la cual es llamada la *reflexión* de z en el círculo $|\zeta| = s$. La reflexión se ilustra en la figura 2.5.3.

Así, si z está dentro del círculo, entonces $\tilde{z}$ está fuera del círculo, y en consecuencia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \tilde{z}} d\zeta = 0$$

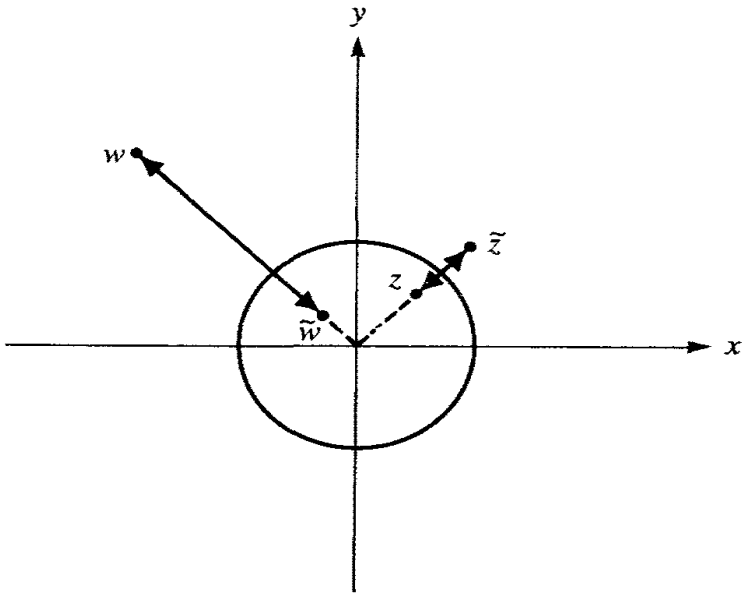


Figura 2.5.3. Reflexión de un número complejo en un círculo.

para $|z| < s$. Podemos sustraer esta fórmula integral de

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

para obtener

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \tilde{z}} \right) d\zeta$$

Observando que $|\zeta| = s$, podemos simplificar como sigue:

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \tilde{z}} = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - |\zeta|^2/\bar{z}} = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{\bar{z}}{\zeta(\bar{z} - \bar{\zeta})}$$

$$= \frac{-\zeta\bar{z} + |\zeta|^2 + \zeta\bar{z} - |z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2}$$

Por lo tanto, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(\zeta)(|\zeta|^2 - |z|^2)}{\zeta|\zeta - z|^2}\, d\zeta$$

esto es,

$$f(\rho e^{i\Phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(se^{i\theta})(s^2 - \rho^2)}{|se^{i\theta} - \rho e^{i\Phi}|^2}\, d\theta$$

donde $\rho < s$. Si observamos que $|se^{i\theta} - \rho e^{i\phi}|^2 = s^2 + \rho^2 - 2s\rho\cos(\theta - \phi)$ y tomamos las partes reales en ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$u(\rho e^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(se^{i\theta})(s^2 - \rho^2)\,d\theta}{s^2 + \rho^2 - 2s\rho\cos(\theta - \phi)}$$

Si mantenemos a ρ y a ϕ fijos, observamos que esta fórmula es cierta para cualquier s tal que $\rho < s < r$. Ya que u es continua en la cerradura de $D(0; r)$ y dado que la función $s^2 + \rho^2 - 2s\rho\cos(\theta - \phi)$ nunca es 0 cuando $s > \rho$, concluimos que para $s > \rho$, $[u(se^{i\theta})(s^2 - \rho^2)]/[s^2 + \rho^2 + 2s\rho\cos(\theta - \phi)]$ es una función continua de s y θ y, por tanto, (con ρ, ϕ fijas) es uniformemente continua en el conjunto compacto, $0 \le \theta \le 2\pi$, $(r + \rho)/2 \le s \le r$. Consecuentemente, conforme $s \to r$,

$$\frac{u(se^{i\theta})(s^2 - \rho^2)}{s^2 + \rho^2 - 2s\rho\cos(\theta - \phi)} \to \frac{u(re^{i\theta})(r^2 - \rho^2)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \phi)}$$

uniformemente en θ, lo cual implica que cuando $s \to r$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(se^{i\theta})(s^2 - r^2)}{s^2 + \rho^2 - 2s\rho\cos(\theta - \phi)}\,d\theta \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})(r^2 - \rho^2)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \phi)}\,d\theta$$

(Vea la proposición 3.1.9, si no está familiarizado con este resultado acerca de la convergencia de integrales.) Así

$$u(\rho e^{i\phi}) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \phi)}\,d\theta \blacksquare$$

La fórmula de Poisson (ecuación (4)) también nos permite encontrar una solución al problema de Dirichlet para el caso en el que la región es un disco. Supóngase que hemos dado la función continua u_0 definida en el círculo $|z| = r$. Definimos u por la fórmula (4):

$$u(\rho e^{i\phi}) = \frac{r^2 - \rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u_0(re^{i\theta})}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \phi) + \rho^2}\,d\theta$$

para $\rho < r$ y $u(re^{i\phi}) = u_0(re^{i\phi})$. Mientras que es relativamente simple mostrar que u es armónica en $D(0; r)$ (véase el ejercicio de repaso 18), es más difícil mostrar que u es continua en la cerradura de $D(0; r)$. La expresión debe ser examinada en el caso crítico en que $\rho \to r$ en cuyo caso el integrando toma la forma indeterminada 0/0 cerca de $\theta = \phi$. No se dará aquí una demostración.

Ejemplos resueltos

2.5.14. *Sea* f *analítica y distinta de cero en una región* A. *Muestre que* $|f|$ *no tiene un mínimo local estricto en* A. *Si* f *tiene ceros en* A, *muestre, mediante un ejemplo, que esta conclusión no se satisface.*

Solución. Puesto que f es analítica y distinta de cero en A, $1/f$ es analítica en A. Por el teorema del módulo máximo, $1/|f|$ no puede tener un máximo local en A, a menos que $1/|f|$ sea constante. Así $1/|f|$ no tiene un máximo local estricto en A. Por lo tanto, $|f|$ no puede tener un mínimo local estricto en A. La función identidad I: $z \mapsto z$ es analítica en el disco unitario y $|I|$ tiene un mínimo estricto en el origen.

2.5.15. *Encuentre el máximo de* $|\text{sen } z|$ *en* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Solución. Puesto que el sen z es entero, podemos aplicar el principio del módulo máximo, el cual nos dice que el máximo ocurre en la frontera de este cuadrado. Ahora $|\text{sen } z|^2 \text{ senh}^2 y + \text{sen}^2 x$ debido a que sen $(x + iy) = \text{sen } x \cosh y + i \cos x \cdot \text{senh } y$, $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y $\cosh^2 y - \text{senh}^2 y = 1$. En la frontera $y = 0$, $|\text{sen } z|^2$ tiene como máximo 1; para $x = 0$ el máximo es $\text{senh}^2 2\pi$, ya que senh y crece con y; para $x = 2\pi$ el máximo es otra vez $\text{senh}^2 2\pi$; para $y = 2\pi$, el máximo es $\text{senh}^2 2\pi + 1$. Así, el máximo de $|\text{sen } z|^2$ ocurre en $x = \pi/2$, $y = 2\pi$, y es $\text{senh}^2 2\pi + 1 = \cosh^2 2\pi$. Por lo tanto, el máximo de $|\text{sen } z|$ en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ es $\cosh 2\pi$.

2.5.16. *Encuentre el máximo de* $u(x, y) = \text{sen } x \cosh y$ *en el cuadrado unitario* $[0, 1] \times [0, 1]$.

Solución. $u(x, y)$ es una función armónica y no es constante, así que el máximo de u en el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ ocurre en la frontera. El máximo de sen x cosh y es sen (1) cosh (1), ya que tanto el sen como el cosh son crecientes en el intervalo [0, 1].

2.5.17. *Sea* A *un conjunto. Demuestre que* $\text{cl}(A) = A \cup \text{fr}(A)$.

Solución. $A \subset \text{cl}(A)$ y $\text{fr}(A) \subset \text{cl}(A)$, y por ende $A \cup \text{fr}(A) \subset \text{cl}(A)$. En la otra dirección, si z está en cl (A) y no está en A, entonces

$$z \in (\text{lím}(A)) \cap (\mathbf{C} \backslash A) \subset \text{cl}(A) \cap \text{cl}(\mathbf{C} \backslash A) = \text{fr}(A)$$

Por lo tanto, $\text{cl}(A) \subset A \cup \text{fr}(A)$.

2.5.18. *Demuestre lo siguiente: Bajo las condiciones del lema de Schwarz, si* $|f'(0)| = 1$, *entonces* $f(z) = cz$ *para toda* z *en* $D(0; 1)$, *para alguna constante* c, *con* $|c| = 1$.

Solución. Sea C el círculo $\{z \text{ tal que } |z| = r\}$ con $r < 1$, y sea M el valor máximo de $|f(z)|$ en C. Por el lema de Schwarz, si $f(z)$ no es un múltiplo constante de z, entonces $M < r$. Usemos ahora la fórmula integral de Cauchy para derivadas:

$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^2}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \, \frac{M}{r^2} < 1$$

Por lo tanto, la desigualdad $|f'(0)| \leq 1$, dada por el lema de Schwarz, debe ser estricta, a menos que $f(z)$ sea un múltiplo constante de z.

2.5.19. *Suponga que* f *y* g *son funciones analíticas uno a uno del disco unitario* D *sobre* D, *que satisfacen* $f(0) = g(0)$ y $g'(0) = f'(0) \neq 0$. *Demuestre que* $f(z) = g(z)$ *para toda* z *en* D.

Solución. La función $h(z) = g^{-1}(f(z))$ es analítica de D a D, y $h(0) = g^{-1}(f(0)) = g^{-1}(g(0)) = 0$. Ya que $g(h(z)) = f(z)$, tenemos $g'(h(0)) \cdot h'(0) = f'(0)$, por tanto $h'(0) = f'(0)/g'(0) = 1$. El ejemplo 2.5.18 muestra que $h(z) = cz$ para alguna constante c, pues $h'(0) = 1$, $c = 1$. Así $f(z) = g(h(z)) = g(z)$.

Observación. En el capítulo 5 veremos que la suposición de que f y g son uno a uno, *obliga* a la derivada a no ser 0, así que esta suposición es realmente superflua.

Ejercicios

1. Encuentre el máximo de $|e^z|$ en $|z| \leq 1$.
2. Encuentre el máximo de $|\cos z|$ en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.
3. Dé un ejemplo para mostrar que la interpretación del principio del módulo máximo que dice: "El valor absoluto de una función analítica en una región, es siempre menor que su máximo en la frontera de la región" es falsa, si la región no es acotada. La región de su ejemplo debe ser diferente todo C de tal manera que la frontera no sea vacía.
4. *a*) Muestre que para $|z_0| < R$, la transformación

$$T: z \mapsto \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

manda al disco abierto de radio R, en forma uno a uno y sobre, en el disco de radio 1; y manda a z_0 al origen. (*Sugerencia*: Use el teorema del módulo máximo, y verifique que $z_0 \mapsto 0$ y $|z| = R$ implica que $|Tz| = 1$.)

b) Suponga que f es analítica en el disco abierto $|z| < R$ y que $|f(z)| < M$ para $|z| < R$. Suponga también que $f(z_0) = w_0$. Muestre que

$$\left| \frac{M[f(z) - w_0]}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)} \right| \leq \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right|$$

(Ésta es una generalización del lema de Schwarz.)

5. Sean f y g continuas en cl (A), y analíticas en A, donde A es una región acotada, conexa y abierta. Si $f = g$ en fr (A), muestre que $f = g$ en todo cl (A).
6. Sea u armónica en la región acotada A y continua en cl (A). Entonces muestre que u alcanza su mínimo únicamente en fr (A), a menos que u sea constante. (Compare este ejercicio con el ejemplo resuelto 2.5.14.) (*Sugerencia*: considere $-u$.)
7. Encuentre el máximo de $|ez^2|$ en el disco unitario.
8. Encuentre el máximo de $u = \text{Re } z^3$ en el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.
9. Encuentre las armónicas conjugadas para cada una de las siguientes funciones (especifique una región en cada caso):

a) $u(x, y) = \text{senh } x \text{ sen y}$ *b*) $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ *c*) $u(x, y) = e^x \cos y$

10. Muestre que $u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ es armónica, pero que no tiene armónica conjugada en $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.
11. Verifique directamente que las curvas de nivel de Re e^z e Im e^z se intersectan ortogonalmente.
12. *a*) Demuestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} d\theta = 2\pi$$

para $R > r$ y cualquier ϕ. (*Sugerencia*: utilice la unicidad de la solución del problema de Dirichlet.)

b) Resuelva directamente el problema de Dirichlet con la condición de ser acotada $u_0(z) = x$. Deduzca que para $r < 1$,

$$r\cos\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\cos\theta}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\,d\theta$$

13. Sea f analítica y sea $f'(z) \neq 0$ en una región. Tómese $z_0 \in A$ y supóngase que $f(z_0) \neq 0$. Dada $\varepsilon > 0$, muestre que existe una $z \in A$ y una $\zeta \in A$ tal que $|z - z_0| < \varepsilon$, $|\zeta - z_0| < \varepsilon$, y

$$|f(z| > |f(z_0)| \quad |f(\zeta)| < |f(z_0)|$$

(*Sugerencia*: use el teorema del módulo máximo.)

14. Demuestre *el teorema de Hadamard de los tres círculos*: Sea f analítica en una región que contiene al conjunto R de la figura 2.5.4; sea $R = \{z \mid r_1 \leq |z| \leq r_3\}$ y suponga que $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Sean M_1, M_2, M_3, los máximos de $|f|$ en los círculos $|z| = r_1$, r_2, r_3, respectivamente. Entonces $M_2^{\log(r_3/r_1)} \leq M_1^{\log(r_3/r_2)} M_3^{\log(r_2/r_1)}$. (*Sugerencia*: sea $\lambda = -\log(M_3/M_1)/\log(r_3/r_1)$ y considere $g(z) = z^\lambda f(z)$. Aplique a g el principio del máximo; tenga cuidado con el dominio de analiticidad de g.)

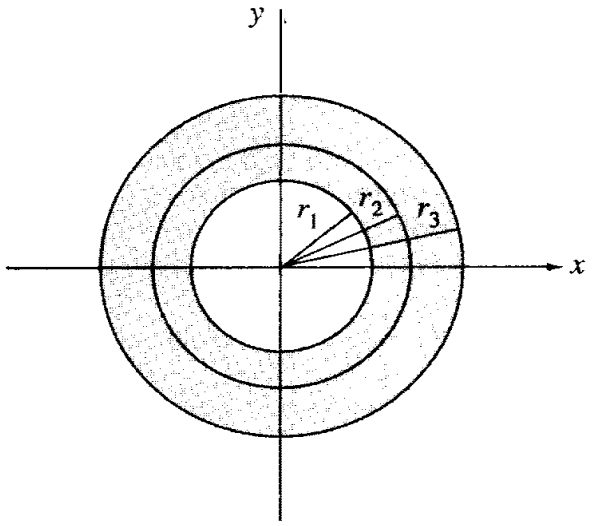


Figura 2.5.4. Teorema de los tres círculos de Hadamard.

15. Sea g analítica en $\{z$ tal que $|z| < 1\}$ y suponga que $|g(z)| = |z|$ para toda $|z| < 1$. Muestre que $g(z) = e^{i\theta}z$ para alguna constante $\theta \in [0, 2\pi]$. (*Sugerencia*: use el lema de Schwarz.)

16. Demuestre: si u es continua y satisface la propiedad del valor medio, entonces u es C^∞ y es armónica. (*Sugerencia*: use la fórmula de Poisson.)

17. Evalúe $\int_\gamma dz/(z^2 - 1)$ donde γ es el círculo $|z| = 2$.

18. La función $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo, e $\text{Im}\, f \leq 0$. Demuestre que f es una constante.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_\gamma \text{sen}\, z\, dz$, donde γ es el círculo unitario.

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz$, donde γ es el círculo unitario.

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\,dz$, donde γ es el círculo unitario.

d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} e^z}{z^2}\,dz$

2. Sean f y g analíticas en una región A. Demuestre: Si $|f| = |g|$ en A y $f \neq 0$, excepto en puntos aislados, entonces $f(z) = e^{i\theta}g(z)$ en A para alguna constante θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3. Sea f analítica en $\{z \text{ tal que } |z| > 1\}$. Muestre que si γ_r es el círculo de radio $r > 1$ y centro en 0, entonces $\int_{\gamma_r} f$ es independiente de r.

4. Sea $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde P y Q son polinomios, y el grado de Q es mayor que el de P, en al menos 2 unidades más.

a) Argumente que si R es suficientemente grande, existe una constante M tal que

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \text{para } |z| \geq R$$

b) Si γ es un círculo de radio r y centro en 0, con r suficientemente grande para que f sea analítica fuera de γ, demuestre que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. (*Sugerencia*: use el ejercicio 4 y haga $r \to \infty$)

c) Evalúe $\int_\gamma dz/(1 + z^2)$ donde γ es un círculo de radio 2 y centro en 0.

5. Evalúe $\int_\gamma f$, donde $f(x + iy) = x^2 + iy^2$ y γ es la línea que une a 1 con i.

6. Sea u una función armónica y acotada en C. Demuestre que u es constante.

7. Sea f analítica en un conjunto conexo y acotado A, y suponga que existe una $z_0 \in A$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para toda $z \in A$. Entonces muestre que f es constante en A.

8. Sean f entera y $|f(z)| \leq M$ para z en el círculo $|z| = R$, con R fijo. Entonces demuestre que

$$|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leq \frac{k!M}{(R-r)^k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

para toda $0 \leq r \leq R$.

9. Encuentre una armónica conjugada para

$$u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x}{(x-1)^2 + y^2}$$

en un dominio apropiado.

10. Sea f analítica en A y sea $f'(z_0) \neq 0$. Muestre que si γ es un círculo con centro en z_0, suficientemente pequeño, entonces

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_\gamma \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}$$

(*Sugerencia*: use el teorema de la función inversa.)

11. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}}\, d\theta$$

12. Sean f y g analíticas en una región A, y sea $g'(z) \neq 0$ para toda $z \in A$; sea g uno a uno y sea γ una curva cerrada en A. Entonces, para z que no está en γ, demuestre que

$$f(z)I(\gamma, z) = \frac{g'(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{g(\zeta) - g(z)}\, d\zeta$$

(*Sugerencia*: aplique el teorema de la integral de Cauchy a

$$h(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)(\zeta - z)}{g(\zeta) - g(z)} & z \neq \zeta \\ \dfrac{f(\zeta)}{g'(\zeta)} & z = \zeta \end{cases}$$

Aplique este resultado al caso en el que $g(z) = e^z$.)

13. Simplifique: $e^{\log i}$; $\log^{i}$; $\log(-i)$; $i^{\log(-1)}$.

14. Sea $A = \mathbf{C}$ menos al eje real negativo y el 0. Muestre que $\log z = \int_{\gamma_z} d\zeta/\zeta$, donde γ_z es cualquier curva en A que une a 1 con z. ¿A es simplemente conexo?

15. Sea f analítica en una región A y sea f distinta de 0. Sea γ una curva homotópica a un punto en A. Muestre que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$$

16. Sea f analítica sobre y en el interior del círculo unitario. Suponga que la imagen del círculo unitario $|z| = 1$ está en el disco $D = \{z \text{ tal que } |z - z_0| < r\}$. Muestre que la imagen de todo el interior del círculo unitario está en D. Ilustre esto con e^z.

17. ¿La integral $\int_\gamma x\, dx + x\, dy$ es siempre 0 si γ es una curva cerrada?

18. Muestre que la fórmula de Poisson puede escribirse como

$$u(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, u(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta}\right]$$

Entonces escriba una fórmula para la armónica conjugada de u. Utilice esta fórmula para demostrar que si $u(\zeta)$ es continua en la frontera, entonces $u(z)$ es armónica dentro de ella.

19. Sea $f = u + iv$ analítica en una región A. Indique cuáles de las siguientes expresiones son analíticas en A:

a) $u - iv$ *b)* $-u - iv$ *c)* $iu - v$

20. Si f es analítica sobre y en el interior del disco unitario, entonces muestre que

$$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - re^{i(\phi - \theta)}}\, d\theta \qquad r < 1$$

21. Calcule las raíces cúbicas de $8i$.

22. Discuta el siguiente bosquejo de una demostración para el teorema de Cauchy: Suponga que f es analítica en una región convexa G que contiene al 0, y que γ es una curva cerrada en G. Defina $F(t) = t\int_\gamma f(tz)dz$ para $0 \le t \le 1$. El teorema de Cauchy dice que $F(1) = 0$. Calcule que $F'(t) = \int_\gamma f(tz)dz + t\int_\gamma zf'(tz)dz$, e integre por partes la segunda integral, para obtener

$$F'(t) = \int_\gamma f(tz)\,dz + t\left\{\left[\frac{zf(tz)}{t}\right]_\gamma - \frac{1}{t}\int_\gamma f(tz)\,dz\right\} = 0$$

así que $F(1) = F(0) = 0$. (Véase Philip M. Morse y Herman Feshbach, *Methods of Mathematical Physics*, Parte I, Nueva York; McGraw-Hill Book Co., 1953, pp. 364-365.)

23. Demuestre la desigualdad de Harnack; Si u es armónica y no negativa para $|z| \le R$, entonces

$$u(0)\frac{R-|z|}{R+|z|} \le u(z) \le u(0)\frac{R+|z|}{R-|z|}$$

24. Demuestre el teorema de deformación, diferenciando bajo el signo de la integral e integrando por partes. (Asuma que estas operaciones son válidas.)

3

Representación en series de funciones analíticas

Existe una forma alternativa importante para definir una función analítica. En ciertos tratamientos de la teoría de funciones complejas, una función f es llamada *analítica* si, localmente, se representa como una serie de potencias.[1] Si esto puede hacerse, esa serie deberá ser la serie de Taylor de f. Como en el cálculo de variable real, la serie de Taylor de f con centro en a, es la serie

$$f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{1}{2}f''(a)(z-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Así, una función analítica es aquella que es infinitamente diferenciable, de modo que se puede escribir su serie de Taylor y la serie resultante converge a la función. Con las variables reales, cada una de estas tareas puede representar un problema. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

es diferenciable pero $f'(x) = 2|x|$. Así que la segunda derivada no existe en 0. Aun si todas las derivadas existen, la serie de Taylor puede no converger a la función. La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

[1] Véase, por ejemplo, H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1963.

es un ejemplo de ello. Por inducción, uno puede verificar que $f^{(k)}(0)$ existe para toda k (en el sentido de variables reales), y que $f^{(k)}(0) = 0$. Aquí todos los coeficientes de la serie de Taylor en 0 son 0 y, por ende, la serie resultante es cero, la cual no es igual a $f(x)$ en ningún intervalo no trivial alrededor del 0.

Una de las cosas más agradables sobre el análisis complejo es que no surge ninguna de estas dificultades. Asumir que una derivada compleja existe, es mucho más fuerte que asumir que una derivada real existe. Nosotros descubrimos en el capítulo 2, que en el momento en que la primera derivada existe en una región, todas las derivadas superiores deberán existir también. En este capítulo encontraremos que la segunda dificultad también desaparece. Si f es analítica en una región A y z_0 está en A, entonces la serie de Taylor de f con centro en z_0, debe converger a f en el disco abierto más grande centrado en z_0 y contenido en A.

El lector está, probablemente, familiarizado con la serie geométrica

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

la cual es válida para $|t| < 1$. En la sección 3.1 mostraremos que esto funciona igualmente bien para números complejos como para reales. En la sección 3.2 la usaremos para expander el integrando en la fórmula integral de Cauchy como una serie infinita, integraremos término a término esta serie, y usaremos la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, para reconocer a los coeficientes resultantes como los adecuados para una serie de Taylor. Se necesita cierta preparación en la sección 3.1 por varias razones. Los pasos en la argumentación anterior requieren justificación. También queremos investigar la representación como serie de una función analítica en una vecindad agujerada, esto es, de una función con una singularidad aislada. Esto se hará en la sección 3.1, también basándonos en la preparación de la sección 3.1. La serie resultante, llamada la serie de Laurent, brinda información valiosa sobre el comportamiento de las funciones cerca de las singularidades y este comportamiento es la clave del tema de residuos y sus aplicaciones subsecuentes.

3.1. SERIES CONVERGENTES DE FUNCIONES ANALÍTICAS

Usaremos la fórmula integral de Cauchy para determinar cuando el límite de una sucesión o de una serie convergente, de funciones analíticas, es una función analítica y cuando la derivada (o la integral) del límite es el límite de la derivada (o la integral) de los términos de la sucesión o de la serie. El tipo básico de convergencia que se estudia en este capítulo es la convergencia uniforme. El criterio M de Weierstrass es la herramienta básica usada para determinar tal convergencia. Estaremos especialmente interesados en el caso particular de series de potencias (estudiadas en la sección 3.2), pero debemos tener cuidado en que algunas funciones importantes son series convergentes, que no son series de potencias, tal como la función zeta de Riemann (véase el ejemplo resuelto 3.1.15).

Las demostraciones de los primeros resultados son ligeramente técnicas y ya que éstas son análogas al caso para series reales, aparecen al final de la sección.

Convergencia de sucesiones y series

Definición 3.1.1. *Se dice que una sucesión de números complejos* z_n ***converge*** *al número complejo* z_0 *si, para toda* $\varepsilon > 0$, *existe un entero* N *tal que* $n \geq N$ *implica que* $|z_n - z_0| < \varepsilon$. *La convergencia de* z_n *a* z_0 *se denota como* $z_n \to z_0$. *Se dice que una serie infinita* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***converge*** *a* S, *y escribimos* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, *si la sucesión de sumas parciales definidas como* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *converge a* S.

El límite z_0 es único; esto es, una sucesión puede converger a un solo punto z_0. (Esta y otras propiedades de límites fueron discutidas en la sección 1.4.) Una sucesión z_n converge si es una *sucesión de Cauchy*, en otras palabras, si, para toda $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n, m \geq N$ implica que $|z_n - z_m| < \varepsilon$. (Equivalentemente, la definición de sucesión de Cauchy puede leerse: Para toda $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica que $|z_n - z_{n+p}| < \varepsilon$ para todo entero $p = 0, 1, 2, \ldots$) Esta propiedad de $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ se sigue de la correspondiente propiedad de $\mathbf{R}$ y aceptaremos esto del cálculo avanzado.

Pueden hacerse afirmaciones correspondientes para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ si consideramos la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Puesto que $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$, el criterio de Cauchy resulta: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge si, para toda* $\varepsilon > 0$, *existe una* N *tal que* $n \geq N$ *implica que* $|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$ para toda $p = 1, 2, 3, \ldots$ Como un caso particular del criterio de Cauchy, con $p = 1$, vemos que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge*, *entonces* $a_k \to 0$. El inverso no es necesariamente verdadero, como lo muestra en el cálculo la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$.

Como con las series reales, se dice que una serie compleja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge. Usando el criterio de Cauchy obtenemos:

Proposición 3.1.2. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge absolutamente, entonces converge.*

La demostración de este teorema se encuentra al final de esta sección. El ejemplo del cálculo, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ muestra que el inverso no es cierto: esto es, esta serie converge, pero no converge absolutamente.

Esta proposición es importante porque $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es una serie *real* y los criterios usuales para series reales que conocemos del cálculo, pueden ser aplicados. Algunos de esos criterios están incluidos en la siguiente proposición (otra vez, la demostración aparece al final de la sección).

Proposición 3.1.3

(i) **Serie geométrica**: *Si* $|r| < 1$, *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge a* $1/(1 - r)$, *y diverge (no converge), si* $|r| \geq 1$.

(ii) **Criterio de comparación**: Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge, y* $0 \le a_k \le b_k$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge; si* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *diverge y* $0 \le c_k \le d_k$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *diverge.*

(iii) **Criterio de p-series**: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ *converge si* $p > 1$ *y diverge a* ∞ (*esto es, las sumas parciales crecen sin cota*) *si* $p \le 1$.

(iv) **Criterio de la razón**: *Suponga que* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe y es estrictamente menor que* 1. *Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente. Si el límite es estrictamente mayor que* 1, *la serie diverge. Si el límite es igual a* 1, *el criterio falla.*

(v) **Criterio de la raíz**: *Suponga que* $\lim_{n\to\infty} (|a_n|)^{i/n}$ *existe y es estrictamente menor que* 1. *Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente. Si el límite es estrictamente mayor que* 1, *la serie diverge; si el límite es igual a uno, el criterio falla.*

Hay algunos otros criterios del cálculo que vamos a requerir ocasionalmente, tales como el criterio de la serie alternante y el criterio de la integral. Suponemos que el lector revisará éstos, conforme surja la necesidad.

Convergencia uniforme

Supóngase que f_n: $A \to \mathbf{C}$ es una sucesión de funciones, todas ellas definidas en el conjunto A. Se dice que la sucesión *converge puntualmente* si, para cada $z \in A$, la sucesión $f_n(z)$ converge. El límite define una nueva función $f(z)$ en A. Una clase más importante de convergencia es la llamada convergencia uniforme y se define como sigue.

Definición 3.1.4. *Una sucesión* f_n: $A \to \mathbf{C}$ *de funciones definidas en un conjunto* A, *se dice que* ***converge uniformemente*** *a una función* f, *si para cada* $\varepsilon > 0$, *existe una* N *tal que* $n \ge N$ *implica que* $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ *para cada* $z \in A$. *Esto se escribe como* "$f_n \to f$ *uniformemente en* A".

Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ ***converge puntualmente****, si las correspondientes sumas parciales* $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} g_k(z)$ *converge puntualmente. Se dice que una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ ***converge uniformemente*** *si* $s_n(z)$ *converge uniformemente.*

Obviamente, la convergencia uniforme implica la convergencia puntual. La diferencia entre convergencia uniforme y puntual es la siguiente. Para la convergencia puntual, dada $\varepsilon > 0$, a la N requerida se le permite variar de punto a punto: mientras que para la convergencia uniforme, debemos poder encontrar una *sola* N que funcione para toda z.

Es difícil dibujar la gráfica de una función con valores complejos de variable compleja, ya que requeriríamos cuatro dimensiones reales, pero las correspondientes nociones para funciones de valores reales son instructivas para ejemplificar. El significado geométrico de la convergencia uniforme se muestra en la figura 3.1.1. Si $\varepsilon > 0$, entonces para n suficientemente grande, la gráfica $y = f_n(x)$ debe permanecer

dentro del "ε-tubo" alrededor de la gráfica de f. Es importante notar que el concepto de uniformidad depende no sólo de las funciones involucradas, sino también del conjunto en el cual estamos trabajando. La convergencia podría ser uniforme en un conjunto, pero no en un conjunto mayor. El siguiente ejemplo ilustra este punto.

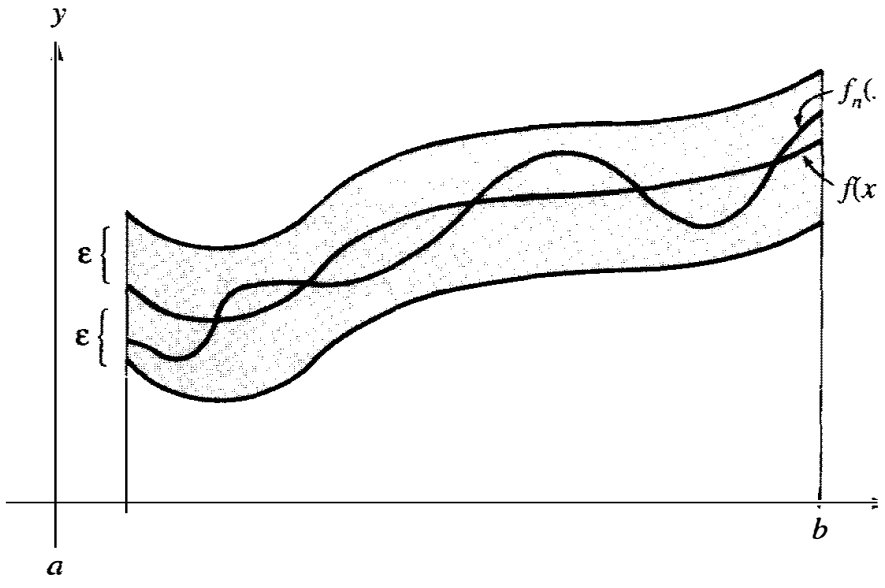


Figura 3.1.1. Convergencia uniforme en un intervalo $[a, b]$.

La sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a la función $0\ f(x) = 0$, para x en el intervalo semiabierto $[0,1[$, pero la convergencia no es uniforme. Al valor de la función x^n, le toma mucho más acercarse al 0 para x cerca de 1, que para x cerca del 0; tomando x suficientemente cerca de 1, necesitamos valores de n arbitrariamente grandes. La convergencia es uniforme en cualquier subintervalo cerrado $[0, r]$, con $r < 1$. Ya que el peor caso es cuando $x = r$, cualquiera que sea la n que ahí funcione, también lo hará para toda x menor. Véase la figura 3.1.2.

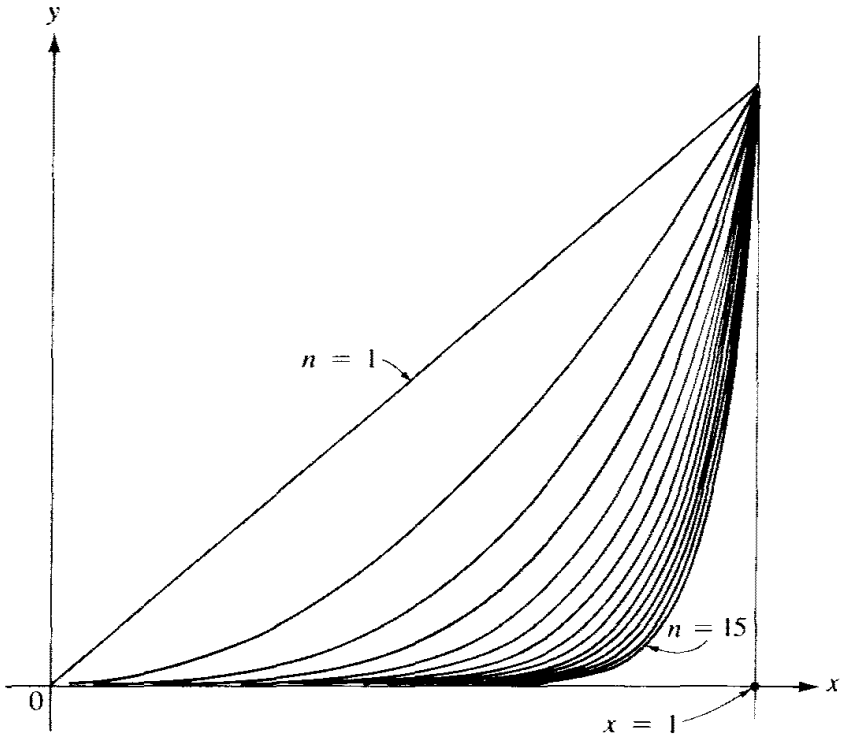


Figura 3.1.2. La convergencia de x^n a 0 no es uniforme en $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$.

Criterio de Cauchy 3.1.15

(i) *Una sucesión* $f_n(z)$ *converge uniformemente en* A *si, para cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe una* N *tal que* $n \geq N$ *implica que* $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$ *para toda* $z \in A$ *y toda* $p = 1, 2, 3, \ldots$

(ii) *Una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente en* A *si, para toda* $\varepsilon > 0$, *existe una* N *tal que* $n \geq N$ *implica que*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \varepsilon$$

para toda $z \in A$ *y toda* $p = 1, 2, \ldots$

El siguiente resultado establece una propiedad básica de la convergencia uniforme.

Proposición 3.1.6. *Si la sucesión* f_n *consiste de funciones continuas definidas en A y si* $f_n \to f$ *uniformemente, entonces* f *es continua en* A. *Similarmente, si las funciones* $g_k(z)$ *son continuas y* $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente en* A, *entonces* g *es continua en* A.

(Los resultados 3.1.5 y 3.1.6 también son demostrados al final de la sección.)

En otras palabras, un límite uniforme de funciones continuas es continuo. Si la convergencia no es uniforme, entonces el límite puede ser discontinuo. Por ejemplo, sea

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } x \leq -1/n \\ nx & \text{para } -1/n < x < 1/n \\ 1 & \text{para } 1/n \leq x \end{cases}$$

y

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\infty < x < 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ 1 & \text{para } 0 < x < \infty \end{cases}$$

como se ilustra en la figura 3.1.13. Las funciones f_n convergen puntualmente a f en toda la línea, pero la convergencia no es uniforme en cualquier intervalo que contenga al 0, ya que para valores de x distintos de 0 y muy pequeños, n tendría que ser muy grande para llevar a $f_n(x)$ dentro de una distancia específica de $f(x)$. Cada una de las funciones f_n es continua, pero la función límite no lo es.

El criterio M de Weierstrass

El criterio *M* de Weierstrass es una de las herramientas teóricas y prácticas más útiles para mostrar que una serie converge uniformemente. Éste no siempre funciona, pero es efectivo en muchos casos.

El criterio M de Weierstrass 3.1.7. *Sea* g_n *una sucesión de funciones definidas en un conjunto* $A \subset C$. *Suponga que existe una sucesión de constantes reales* $M_n \geq 0$ *tal que*

(i) $|g_n(z)| \leq M_n$ *para toda* $z \in A$.
y
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge.*

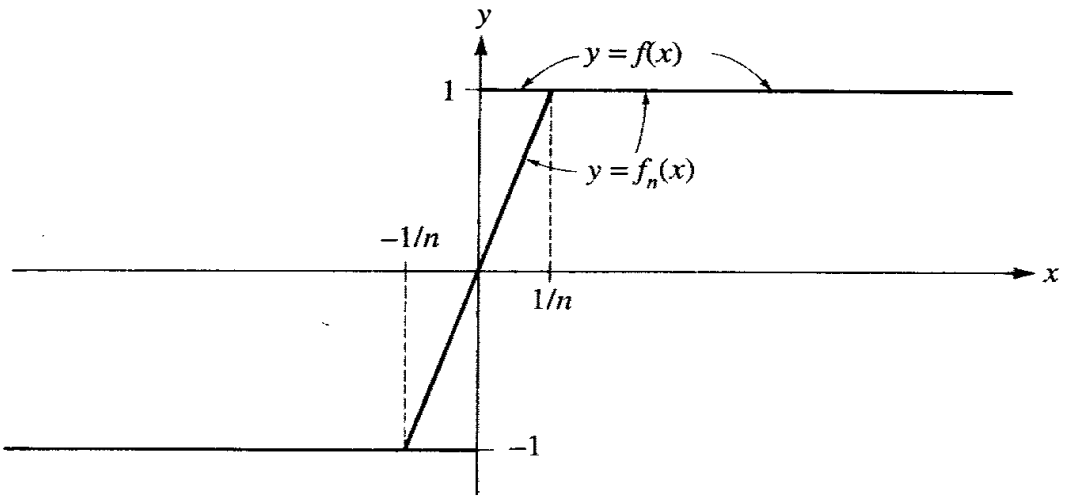


Figura 3.1.3. Un límite no uniforme de funciones continuas, no necesariamente es continuo.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *converge absoluta y uniformemente en* A.

Demostración. Puesto que ΣM_n converge, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$ para toda $p = 1, 2, 3, \ldots$. (Las barras del valor absoluto no se necesitan en $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k$, pues $M_n \geq 0$.) Así $n \geq N$ implica

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |g_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

y, por lo tanto, por el criterio de Cauchy, tenemos el resultado deseado. ■

Por ejemplo, considere la serie $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$. Se demostrará que esta serie converge uniformemente en los conjuntos $A_r = \{z \text{ tal que } |z| \leq r\}$ para cada $0 \leq r < 1$. (No podemos hacer $r = 1$.) Aquí $g_n(z) = z^n/n$ y $|g_n(z)| = |z|^n/n \leq r^n/n$ ya que $|z| \leq r$. Por lo tanto, hacemos $M_n = r^n/n$. Pero $r^n/n \leq r^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge para $0 \leq r < 1$. Así, ΣM_n converge y, por el criterio M de Weierstrass, la serie dada converge uniformemente en A_r. Ésta converge puntualmente en $A = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$, ya que cada $z \in A$ está en alguna A_r, para r suficientemente cerca de 1 (véase la figura 3.1.4).

Sin embargo, esta serie no converge uniformemente en A. En efecto, si lo hiciera, $\Sigma\, x^n/n$ convergería uniformemente en $[0,1[$. Suponga que esto fuera cierto, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existiría una N tal que $n \geq N$ implicaría que

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \varepsilon$$

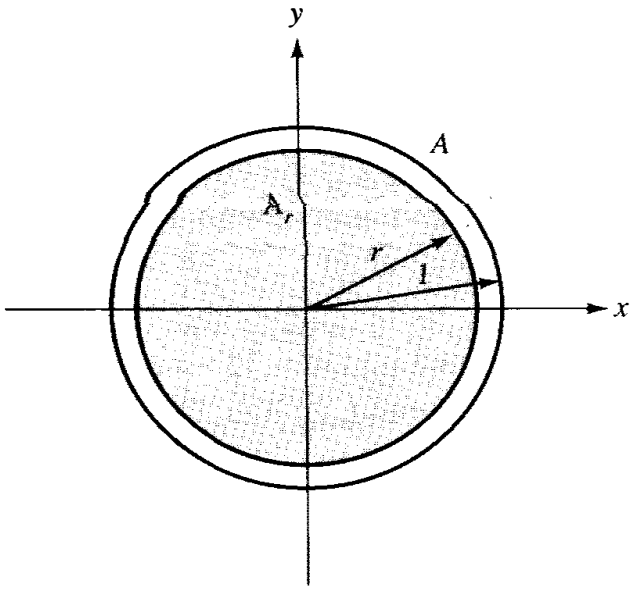


Figura 3.1.4. Región de convergencia de $\Sigma\ (z^n/n)$: uniformemente en A_r, puntualmente en A.

para toda $x \in [0,1[$ y $p = 0, 1, 2, \ldots$. Pero la serie de tipo armónico

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots$$

diverge a infinito (esto es, las sumas parciales $\to \infty$) y, por tanto, podemos escoger p tal que

$$\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N+p} > 2\varepsilon$$

Enseguida, escogemos x tan cerca de 1 que $x^{N+p} > \frac{1}{2}$. Entonces

$$\frac{x^N}{N} + \cdots + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p}\left(\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N+p}\right) > \varepsilon$$

lo cual es una contradicción. Sin embargo, nótese que $g(z)$ es, no obstante, continua en A pues es continua en cada z, ya que cada z está en alguna A_r, en la cual tenemos convergencia uniforme.

Series de funciones analíticas

El siguiente resultado es uno de los principales teoremas concernientes a la convergencia de funciones analíticas. El teorema fue formulado por Karl Weierstrass en 1860, aproximadamente.

Teorema de convergencia analítica 3.1.8

(i) *Sea* A *una región en* C *y sea* f_n *una sucesión de funciones analíticas definidas en* A. *Si* $f_n \to f$ *uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en* A, *entonces* f *es analítica. Más aún,* $f'_n \to f'$ *puntualmente en* A *y uniformemente en cualquier disco cerrado en* A (véase la figura 3.1.5).

(ii) *Si* g_k *es una sucesión de funciones analíticas definidas en una región* A *en* C y $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente en cualquier disco cerrado en* A, entonces g *es analítica en* A *y* $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k(z)$ *converge puntualmente en* A *y también uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en* A.

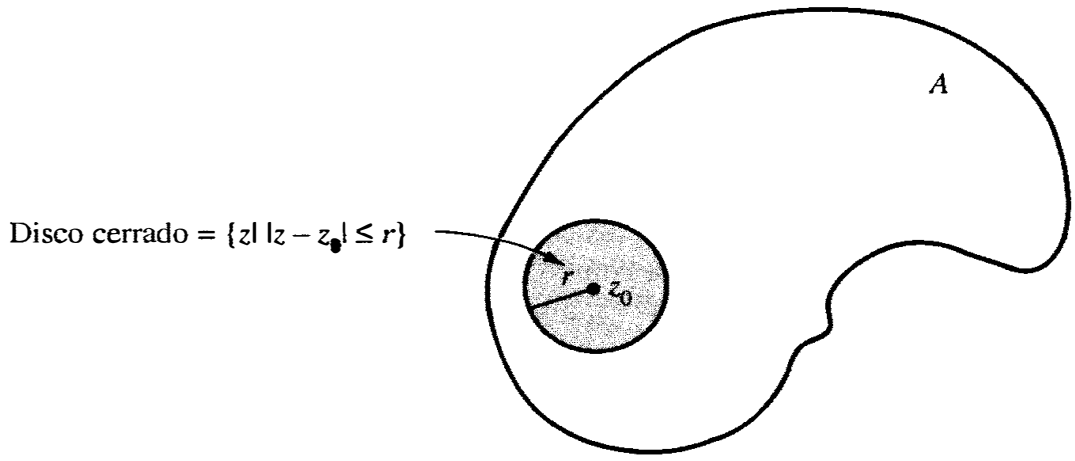


Figura 3.1.5. Convergencia de funciones analíticas.

Este teorema revela además otra remarcable propiedad de las funciones analíticas, que no es compartida por las funciones de variable real (compare la sección 2.4). La convergencia uniforme usualmente no es suficiente para justificar la diferenciación de una serie término a término, pero para las funciones analíticas, esto es suficiente.

Observación opcional. Se necesita realmente cierto tipo de suposiciones acerca de la uniformidad. El ejemplo ilustrado en la figura 3.1.3 muestra, al menos para funciones de variables reales, que un límite puntual de funciones continuas no necesariamente es continuo, mucho menos diferenciable. El ejemplo resuelto 3.1.11 muestra que esto puede aun pasar, incluso si todas las funciones de la serie son infinitamente diferenciables. Con la experiencia de las últimas secciones sobre el buen comportamiento de las funciones analíticas, uno esperaría que la convergencia

puntual de funciones analíticas debería ser suficiente, pero no lo es. Por ejemplo, hay una sucesión de polinomios que converge puntualmente en el disco unitario a la rama de la función raíz cuadrada definida por $(re^{i\theta})^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ con $-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$. La función límite no es diferenciable en el disco unitario. En efecto, ésta tiene una discontinuidad de brinco a través del eje real negativo. La existencia de tal sucesión no es obvia, pero puede demostrarse con la ayuda de un teorema de aproximación, conocido como el teorema de Runge, o teorema de Mergelyan véase W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Nueva York, McGraw-Hill, pp. 255 y 386.

La demostración del teorema de convergencia analítica, depende del teorema de Morera y de la fórmula integral de Cauchy, que fueron estudiados en la sección 2.4. Para prepararnos para este resultado, vamos primero a analizar un resultado concerniente a la integración de sucesiones y series.

Proposición 3.1.9. *Sea* γ: [a, b] $\to$ A *una curva en una región* A *y sea* f_n *una sucesión de funciones continuas definidas en* γ ([a, b]), *las cuales convergen uniformemente a* f *en* γ ([a, b]). *Entonces*

$$\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$$

Similarmente, si $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformemente en γ, entonces

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma g_n(z)\, dz$$

Demostración. La función f es continua, por la proposición 3.1.6 y, por tanto, es integrable. Dada $\varepsilon > 0$, podemos escoger n tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para toda z en γ. Entonces, por la proposición 2.1.6,

$$\left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| = \left| \int_\gamma f_n - f \right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)| \, |dz| < \varepsilon l(\gamma)$$

a partir de la cual se sigue la primera afirmación. La segunda afirmación se obtiene aplicando la primera a las sumas parciales. (El estudiante debe escribir los detalles.) ■

Demostración del teorema de convergencia analítica (3.1.8). Como es usual, es suficiente con demostrar (i). Sea $z_0 \in A$ y sea $\{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq r\}$ un disco cerrado alrededor de z_0, completamente contenido en A (¿por qué existe tal disco?). Considere $D(z_0, r) = \{z \text{ tal que } |z - z_0| < r\}$, que es una región simplemente conexa puesto que es convexa. Ya que $f_n \to f$ uniformemente en $\{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq r\}$ es claro que $f_n \to f$ uniformemente en $D(z_0; r)$. Queremos mostrar que f es analítica en $D(z_0, r)$. Para hacer esto, usamos el teorema de Morera (2.4.10). Por la proposición 3.1.6, f es continua en $D(z_0; r)$. Sea γ cualquier curva cerrada en $D(z_0; r)$. Ya que f_n es analítica, $\int_\gamma f_n = 0$, por el teorema de Cauchy y por el hecho de que $D(z_0; r)$ es simplemente conexo. Pero, por la proposición 3.1.9, $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ y, por tanto, $\int_\gamma f = 0$. Así, por el teorema de Morera, f es analítica en $D(z_0, r)$.

Debemos mostrar aun que $f'_n \to f'$ uniformemente en discos cerrados. Para hacer esto, usamos la fórmula integral de Cauchy. Sea $B = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq r\}$ un disco cerrado en A. Podemos dibujar un círculo γ de radio $\rho > r$ centrado en z_0, que contiene completamente a B en su interior (véase el ejemplo resuelto 1.4.28 y la figura 3.1.6).

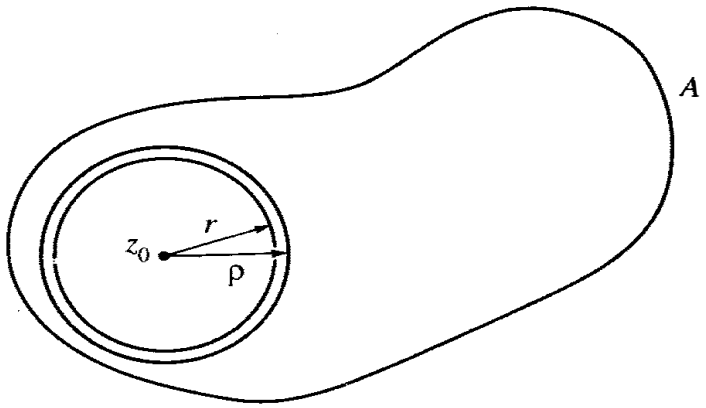


Figura 3.1.6. Un disco cerrado en un conjunto abierto puede ser ligeramente agrandado.

Para cualquier $z \in B$,

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \quad \text{y} \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

por la fórmula integral de Cauchy. Por hipótesis, $f_n \to f$ uniformemente en el disco cerrado $\{z \text{ tal que } |z - z_0 \leq \rho\}$, el cual está completamente dentro de A. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, tomamos N tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para toda z en este disco (lo cual puede ser hecho por hipótesis). Puesto que γ es la frontera de este disco, $n \geq N$ implica que $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$ en γ. Notemos que

$$|f'_n(z) - f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \right|$$

y obsérvese que para ζ y γ, y $z \in B$, $|\zeta - z| \geq \rho - r$. Por lo tanto, $n \geq N$ implica que

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{(\rho - r)^2} \cdot l(\gamma) = \frac{\varepsilon\rho}{(\rho - r)^2}$$

Puesto que ρ y r son constantes fijas que son independientes de $z \in B$, obtenemos el resultado deseado. ■

Aplicando repetidamente el teorema de convergencia analítica, vemos que las k-ésimas derivadas $f_n^{(k)}$ convergen uniformemente a $f^{(k)}$ en discos cerrados en A. Note también que este teorema no supone la convergencia uniforme en todo A. Por

ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ en $A = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ converge uniformemente en los conjuntos $A_r = \{z \text{ tal que } |z| \le r\}$ para $0 \le r < 1$ (como vimos en el ejemplo precedente) y, por lo tanto, converge uniformemente en todos los discos cerrados en A. Así podemos concluir que $\Sigma z^n/n$ es analítica en A, y que su derivada es Σz^{n-1}, que también converge en A. Sin embargo, como lo demostró aquel ejemplo, tenemos convergencia puntual pero no convergencia uniforme en A; la convergencia es uniforme únicamente en cada subdisco cerrado en A.

Demostraciones técnicas

Proposición 3.1.2. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. Por el criterio de Cauchy, dada $\varepsilon > 0$ existe una N tal que $n \ge N$ implica

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \qquad p = 1, 2, \ldots$$

Pero

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$$

por la desigualdad del triángulo (véase la sección 1.2). Así, por el criterio de Cauchy, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. ■

Proposición 3.1.3

(i) ***Serie geométrica:*** *Si* $|r| < 1$, *entonces* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *converge a* $1/(1-r)$, *y diverge si* $|r| \ge 1$.

(ii) ***Criterio de comparación:*** *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *converge y* $0 \le a_k \le b_k$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge. Si* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *diverge y* $0 \le c_k \le d_k$, *entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *diverge.*

(iii) ***Criterio de la p-serie:*** $\sum_{k=1}^{\infty} n^{-p}$ *converge si* $p > 1$, *y diverge a* ∞ (*esto es, las sumas parciales crecen sin cota*) *si* $p \le 1$.

(iv) ***Criterio de la razón:*** *Suponga que* $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ *existe y es estrictamente menor que* 1. *Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente. Si el límite es estrictamente mayor que* 1, *la serie diverge. Si el límite es igual a* 1, *el criterio falla.*

(v) ***Criterio de la raíz:*** *Suponga que* $\lim_{n\to\infty} (|a_n|)^{1/n}$, *existe y es estrictamente menor que* 1. *Entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente. Si el límite es estrictamente mayor que* 1, *la serie diverge. Si el límite es igual a* 1, *el criterio falla.*

Demostración

(i) Por álgebra elemental.

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

si $r \neq 1$. Ya que $r^{n+1} \to 0$ conforme $n \to \infty$ si $|r| < 1$, y puesto que $|r|^{n+1} \to \infty$ si $|r| > 1$, tenemos la convergencia si $|r| < 1$, y la divergencia si $|r| > 1$. Obviamente, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge si $|r| = 1$, ya que $r^n \not\to 0$.

(ii) Las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ forman una sucesión de Cauchy y así las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también forman una sucesión de Cauchy, pues para cualquier k y p, tenemos $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p} \leq b_k + b_{k+1} + \cdots + b_{k+p}$. Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Una serie positiva puede diverger únicamente a $+\infty$ y, por tanto, dada $M > 0$, podemos encontrar k_0 tal que $k \geq k_0$ implica que $c_1 + c_2 + \cdots + c_k \geq M$. Por lo tanto, para $k \geq k_0$, $d_1 + d_2 + \cdots + d_k \geq M$ y así $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ también diverge a ∞.

(iii) Primero suponga que $p \leq 1$; en este caso $1/n^p \geq 1/n$ para toda $n = 1, 2, \ldots$ En consecuencia, por (ii), $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ divergirá si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. Recordemos ahora la demostración de esto del cálculo.[2] Si $s_k = 1/1 + 1/2 + \cdots + 1/k$, entonces s_k es una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos. Escribamos s_{2^k} como sigue:

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1} + 1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{k}{2}$$

Por tanto, s_k puede hacerse arbitrariamente grande, si k es suficientemente grande; así $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge.

[2] También podemos demostrar (iii) usando el criterio de la integral para series positivas (véase cualquier libro de cálculo). La demostración que se da aquí, también demuestra el *criterio de condensación de Cauchy:* Sea $\Sigma\, a_n$ una serie de términos positivos con $a_{n+1} \leq a_n$. Entonces $\Sigma\, a_n$ converge si $\sum_{j=1}^{\infty} 2^j a_{2^j}$ converge (véase G. J. Porter, "An Alternative to the Integral Test for Infinite Series", *American Mathematical Monthly*, vol. 79, 1972, p. 634).

Supóngase ahora que $p > 1$. Si hacemos

$$s_k = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{k^p}$$

entonces s_k es una sucesión creciente de números reales positivos. Por el otro lado,

$$s_{2^k-1} = \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{(2^{k-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^p}\right) \leq \frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^p}$$

$$= \frac{1}{1^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{k-1})^{p-1}} < \frac{1}{1 - 1/2^{p-1}}$$

(¿Por qué?) Así, la sucesión $\{s_k\}$ es acotada, de lo anterior, por $1/(1 - 1/2^{p-1})$; por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n_p$ converge.

(iv) Suponga que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$. Escoja r' tal que $r < r' < 1$ y sea N tal que $n \geq N$ implica

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r'$$

Entonces $|a_{N+p}| < |a_N|\,(r')^p$. Considere la serie $|a_1| + \cdots + |a_N| + |a_N|\,r' + |a_N|\,(r')^2 + |a_N|\,(r')^3 + \cdots$. Esto converge a

$$|a_1| + \cdots + |a_{N-1}| + \frac{|a_N|}{1 - r'}$$

Por (ii) podemos concluir que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge. Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1$, escogemos r' tal que $1 < r' < r$ y sea N tal que $n \geq N$ implica que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r'$. Por tanto, $|a_{N+p}| > (r')^p\,|a_N|$, y así el $\lim_{n\to\infty} |a_N| = \infty$, mientras que el límite tendría que ser 0 si la suma converge (véase el ejercicio 10). Así $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. Para ver que el criterio falla si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ considere las series $1 + 1 + 1 + \cdots$, y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ para $p > 1$. En ambos casos, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, pero la primera serie diverge y la segunda converge.

(v) Suponga que $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = r < 1$. Escoja r' tal que $r < r' < 1$ y N tal que $n \geq N$

implica que $|a_n|^{1/n} < r'$; en otras palabras, que $|a_n| < (r')^n$. La serie $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N-1}| + (r')^N + (r')^{N+1} + \cdots$ converge a $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N-1}| + (r')^N/(1 - r')$, y así, por (ii), $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = r > 1$, escójase $1 < r' < r$ y N tal que $n \geq N$ implica que $|a_n|^{1/n} > r'$ o, en otras palabras, que $|a_n| > (r')^n$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Por consiguiente $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. Para mostrar que el criterio falla cuando $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$, usamos estos límites del cálculo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = 1$$

(tome logaritmos y use la regla de L'Hôpital para mostrar que $(\log x)/x \to 0$ conforme $x \to \infty$). Pero $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge. ■

Criterio de Cauchy 3.1.5

(i) *Una sucesión* $f_n(z)$ *converge uniformemente en* A *si para cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe una* N *tal que* $n \geq N$ *implica que* $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$ *para toda* $z \in A$ y toda $p = 1, 2, 3, \ldots$.

(ii) *Una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente en* A *si para toda* $\varepsilon > 0$, existe una N *tal que* $n \geq N$ *implica*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \varepsilon$$

para toda $z \in A$ *y* $p = 1, 2, \ldots$

Demostración

(i) Primero demostraremos el "si". Sea $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, el cual existe porque para cada z, $f_n(z)$ es una sucesión de Cauchy. Queremos mostrar que $f_n \to f$ uniformemente en A. Dada $\varepsilon > 0$, escogemos N tal que $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon/2$, para $n \geq N$ y $p \geq 1$. El primer paso es mostrar que para cualquier z y cualquier $n \geq N$, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Para $z \in A$, escójase p suficientemente grande, tal que $|f_{n+p}(z) - f(z)| < \varepsilon/2$, lo cual es posible por la convergencia puntual. Entonces, por la desigualdad del triángulo, $|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z) - f_{n+p}(z)| + |f_{n+p}(z) - f(z)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. (Nótese que aun cuando p depende de z, N no.) Recíprocamente, si $f_n \to f$ uniformemente, dada $\varepsilon > 0$ escogemos N tal que $n \geq N$ implica $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/2$ para toda z. Ya que $n + p \geq N$, $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

(ii) Aplicando (i) a las sumas parciales, deducimos (ii). ■

Proposición 3.1.6. *Si las funciones* f_n *son continuas en* A, *y* $f_n \to f$ *uniformemente, entonces* f *es continua. Similarmente, si las funciones* $g_k(z)$ *son continuas y* $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente en A, entonces* g *es continua en* A.

Demostración. Es suficiente con demostrar la afirmación para sucesiones (¿por qué?). Queremos mostrar que para $z_0 \in A$, dada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Escójase N tal que $|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ para toda $z \in A$. Puesto que f_N es continua, existe una $\delta > 0$ tal que $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3$ si $|z - z_0| < \delta$. Así, $|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. ■

Note que en el último paso, necesitamos una N que sea independiente de z para concluir que tanto $|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ como $|f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3$.

Ejemplos resueltos

3.1.10. *Muestre que la sucesión de funciones* $f_n(x) = \text{sen}\,(x/n)$ *converge uniformemente a la función constante* $f(x) = 0$ *para x en el intervalo* $[0, \pi]$.

Solución. Del cálculo, sen θ es creciente y sen θ ≤ θ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Así, si $x \in [0, \pi]$ y $n \geq 2$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = |\text{sen}\,(x/n)| \leq \text{sen}\,(\pi/n) \leq \pi/n$ (véase la figura 3.1.7). Por lo tanto, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ siempre que $n >$ máx $(2, 2/\varepsilon)$. La misma n funciona para toda x en el intervalo, y así la convergencia es uniforme en $[0, \pi]$.

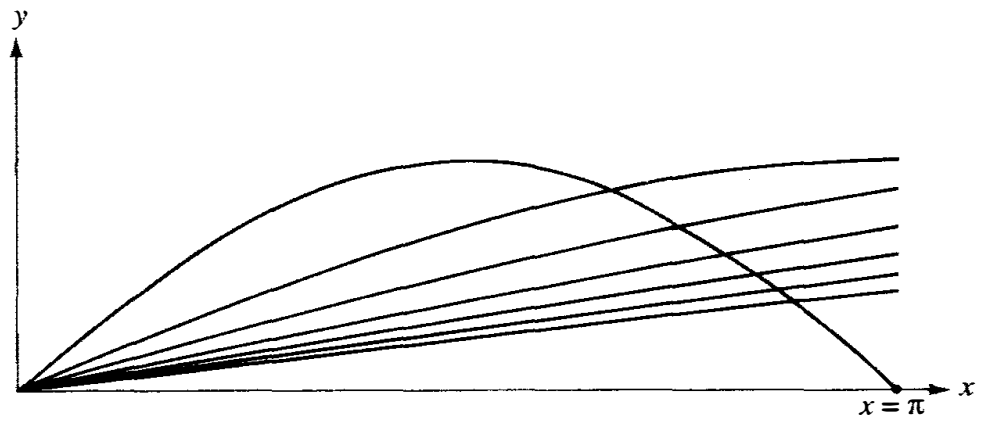


Figura 3.1.7. $y = \text{sen}\,(x/n)$ para n de 1 a 7.

3.1.11. *Muestre que la sucesión de funciones* $f_n(x) = \arctan(nx)$ *converge para* x *en el intervalo* $[-5, 5]$, *a la función*

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ \pi/2 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

pero que la convergencia no es uniforme. (Véase la figura 3.1.8.)

Solución. Si $x > 0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = |\arctan(nx) - \pi/2|$. Sabemos que $\arctan(nx)$ es una función creciente de x cuyo límite es $\pi/2$ conforme $x \to \infty$. Por lo tanto, $|\arctan(nx) - \pi/2| < \varepsilon$ si y sólo si $nx > \tan(\pi/2 - \varepsilon)$. Para cualquier valor particular de x, funcionarán valores de n suficientemente grandes, pero al tomar x cerca del 0, podemos forzar a la n requerida a ser muy grande. Así, tenemos convergencia pero no convergencia uniforme. (Discusiones similares se aplican para el caso $x \leq 0$.) Uno puede ver indirectamente que la convergencia no debe ser uniforme. Si esto fuera, entonces la función límite sería continua, por la proposición 3.1.6, pero esto no es así.

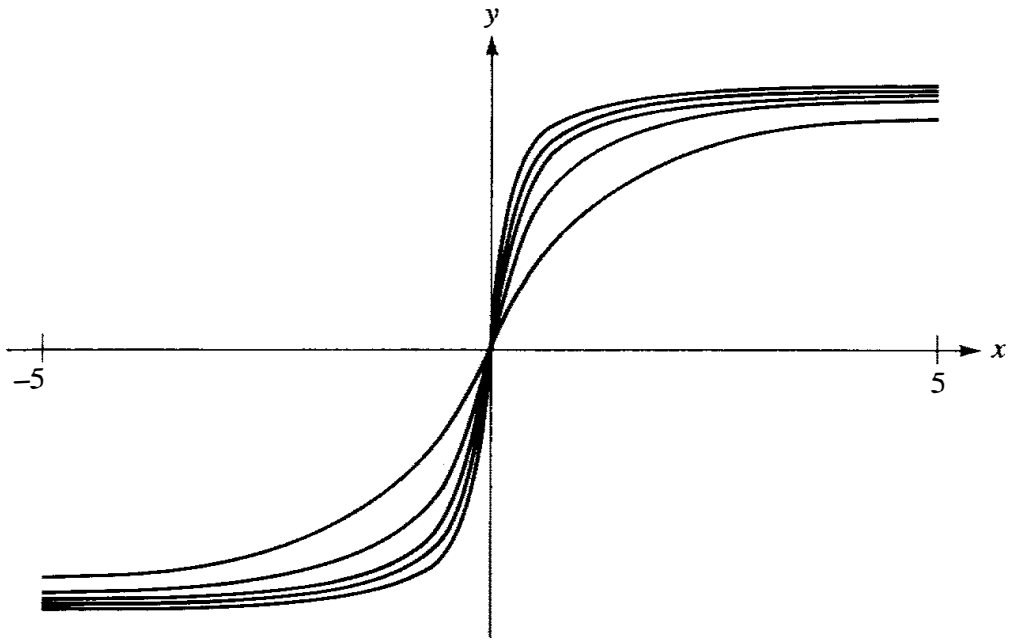


Figura 3.1.8. $y = \arctan(nx)$ para n de 1 a 5.

Los siguientes tres ejemplos desarrollan el importante caso especial de las series geométricas, y muestran cómo las herramientas de esta sección pueden aplicarse para obtener algunos resultados interesantes. El desarrollo de estos ejemplos es típico de las series de potencias más generales, estudiadas en la siguiente sección.

3.1.12. *Muestre que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *converge en el disco unitario abierto* $D = D(0; 1)$ *a la función analítica* $f(z) = 1/(1 - z)$. *Demuestre que la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado* $D_r = \{z \text{ tal que } |z| \leq r\}$ con $r < 1$.

Solución. Si $z \in D$, entonces $z \in D_r$ siempre que $|z| \leq r < 1$. Así, la convergencia en z se sigue del segundo enunciado. Para demostrarlo, suponga que z está en D_r, entonces $|z^n| < r^n$. Ya que Σr^n converge (proposición 3.1.13 (i)), se aplica el criterio M de Weierstrass, con $M_n = r^n$ y nuestra serie converge uniforme y absolutamente en D_r. Nos hemos internado en uno de los inconvenientes de herramientas tales como el criterio M de Weierstrass: hemos mostrado que la serie converge pero no hemos identificado el límite. Para hacer esto, note que

$$1 - z^{n+1} = (1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)$$

así que

$$\left| \frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Ya que $r < 1$, esto tiende a 0 conforme $n \to \infty$, y obtenemos nuestro resultado.

3.1.13. *Muestre que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ *converge en el disco unitario abierto* D, *a* $g(z) = 1/(1-z)^2$. *La convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado contenido en* D.

Solución. Si B es cualquier disco cerrado contenido en D, entonces $B \subset D_r$, para algún disco cerrado D_r, como en el último ejemplo. La serie Σz^n converge uniforme y absolutamente a $f(z) = 1/(1-z)$ en D_r y, por tanto, en B. Por el teorema de la convergencia analítica (3.1.8(ii)), la serie de las derivadas converge uniformemente en cualquier disco cerrado D a $f'(z)$. Esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = f'(z) = 1/(1-z)^2$, como se quería.

La convergencia es absoluta por comparación. Si $|z| \leq r < 1$, entonces $|nz^{n-1}| < nr^{n-1}$, pero Σnr^{n-1} converge, por el argumento que se acaba de dar.

3.1.14. *Muestre que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n/n$ *converge uniforme y absolutamente a* $\log(1+z)$ *en el disco unitario abierto, donde* $\log(\rho e^{i\theta}) = \log \rho + i\theta$ *con* $-\pi < \theta < \pi$.

Solución. Sabemos que la fórmula dada para el log, define una rama del logaritmo en el disco $D(1;1)$. En efecto, ésta es la misma que se describió en la construcción de $\log w = \int_\gamma (1/\zeta)\, d\zeta$, donde γ es la trayectoria rectilínea de 1 a w. Por la independencia con respecto de la trayectoria, garantizada por el teorema de Cauchy, podemos integrar primero a lo largo del arco circular ($r = 1$ constante) y luego a lo largo de un rayo a partir del origen (θ constante), para llegar a 1 a $w = \rho e^{i\theta}$ (véase la figura 3.1.9). Esto da

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\, d\zeta = \int_0^\theta e^{-i\phi} ie^{i\phi}\, d\phi + \int_1^\rho \frac{1}{re^{i\theta}} e^{i\theta}\, dr = i\theta + \log \rho$$

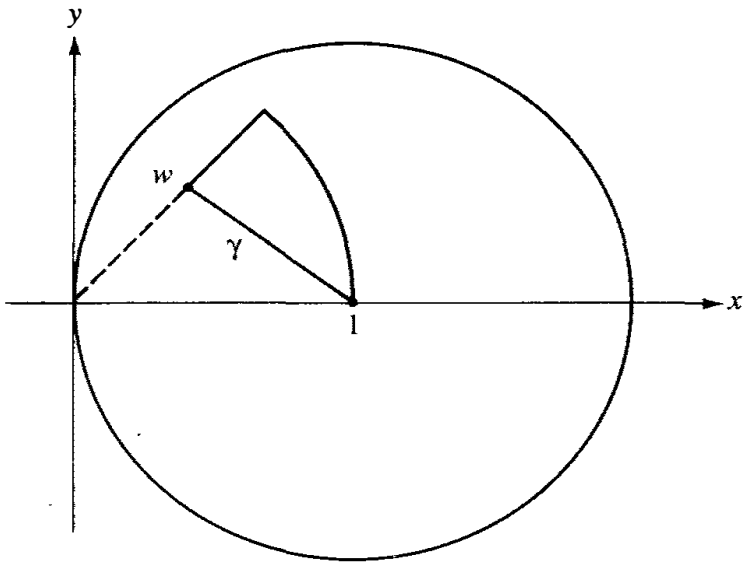


Figura 3.1.9. Trayectorias para calcular $\log w$ en $D(1;1)$.

Al cambiar las variables a $\xi = \zeta - 1$ nos da $\log w = \int_\mu 1/(\xi + 1)\, d\xi = \int_\mu 1/[1 - (-\xi)]\, d\xi$, siendo la trayectoria μ una línea recta de 1 a $z = w - 1$ en el disco unitario abierto $D = D(0; 1)$. Por el ejemplo resuelto 3.1.12, el integrando puede ser expandido en una serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n$, la cual converge uniformemente en μ. El teorema de convergencia analítica nos permite integrar término a término para obtener

$$\log w = \int_\mu \left[\sum (-\xi)^n\right] d\xi = \sum \left[\int_\mu (-\xi)^n\, d\xi\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (w-1)^{n+1}}{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (w-1)^n}{n}$$

Esto funciona para toda w en $D(1; 1)$. Haciendo $z = w - 1$ nos da $\log(z + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n/n$ para toda z en $D(0; 1)$. Nuevamente, la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier D_r, con $r < 1$. En efecto, ya que $|z| \le r$ implica que $|(-1)^n z^n/n| \le r^n/n \le r^n$ y Σr^n converge, el criterio M de Weierstrass es aplicable con $M_n = r^n$.

3.1.15. *Muestre que la* ***función*** ζ ***de Riemann****, definida como*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

es analítica en la región $A = \{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$. *Calcule* $\zeta'(z)$ *en ese conjunto.*

Solución. Usamos el teorema de convergencia analítica (3.1.8). Debemos tener cuidado de tratar de demostrar la convergencia uniforme únicamente en discos cerrados en A y no en todo A. En efecto, en este ejemplo no tenemos convergencia uniforme en todo A (véase el ejercicio 8).
Sea B un disco cerrado en A y sea δ su distancia de la línea $\operatorname{Re} z = 1$ (figura 3.1.10). Mostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente en B. Aquí $n^{-z} = e^{-z \log n}$, donde $\log n$ significa el log usual de números reales. Ahora $|n^{-z}| = |e^{-z \log n}| = e^{-x \log n} = n^{-x}$. Pero $x \ge 1 + \delta$ si $z \in B$ y, por tanto, $|n^{-z}| \le n^{-(1+\delta)}$ para toda $z \in B$. Escojamos, por lo tanto, $M_n = n^{-(1+\delta)}$.
Por la proposición 3.13(iii). $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Así, por el criterio M de Weierstrass, nuestra serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente en B. Así ζ es analítica en A. También por el teorema de convergencia analítica, podemos diferenciar término a término para obtener

$$\zeta'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) n^{-z}$$

la cual sabemos también debe converger en A (y uniformemente en discos cerrados de A).

3.1.16. *Muestre que*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

es analítica en $A = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$. *Escriba una serie para* $f'(z)$.

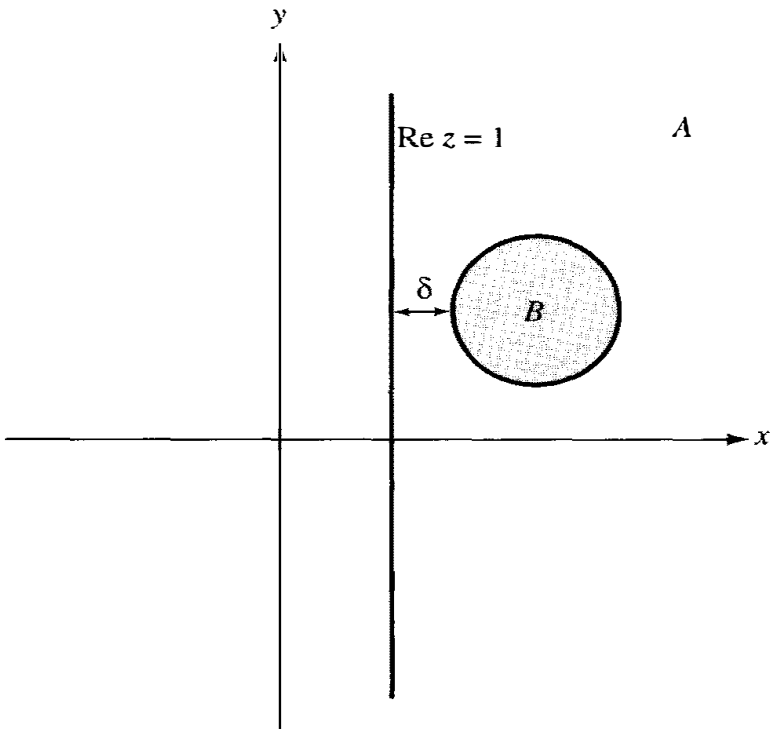


Figura 3.1.10. El dominio de analiticidad de la función zeta de Riemann.

Solución. Usamos otra vez el teorema de convergencia analítica. (Nótese que ésta es una serie de potencias que puede ser abordada de modo alternativo, después que el estudiante haya leído la sección 3.2).
En este caso tenemos realmente la convergencia uniforme en todo A. Sea $M_n = 1/n^2$. Claramente, ΣM_n converge y $|z^n/n^2| < 1/n^2 = M_n$ para toda $z \in A$. Así, por el criterio M de Weierstrass, $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge uniformemente en A; por lo tanto, la serie converge en cualquier disco cerrado de A. Así, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ es una función analítica en A. Más aún.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

(Esta serie, para $f'(z)$, no converge para $z = 1$, por lo que f no puede ser extendida analíticamente en ninguna región que contenga al disco unitario cerrado.)

3.1.17. *Calcule*

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz$$

donde γ es un círculo de radio $\frac{1}{2}$.

Solución. Sea B un disco cerrado en $A = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ a una distancia δ del círculo $|z| = 1$. Para $z \in B$, $|z^n| = |z|^n \leq (1 - \delta)^n$ con $n \geq 0$. Escogemos $M_n = (1 - \delta)^n$ y notamos que ΣM_n es convergente. Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es uniformemente convergente

en B, así, por el teorema de convergencia analítica, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es analítica en A. Por lo tanto,

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz = \int_\gamma \frac{1}{z} dz + \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = 2\pi i$$

por el ejemplo 2.1.12 y el teorema de Cauchy.

3.1.18. *Este ejemplo y el siguiente, ilustran cómo la fórmula integral de Cauchy, puede a menudo ser usada para obtener uniformidad donde podría no ser esperada.*

Definición. *Una familia de funciones* $\mathcal{F}$ *definida en un conjunto* G, *se dice que es* ***uniformemente acotada en los discos cerrados de*** G *si para cada disco cerrado* B $\subset$ G, *existe un número* M(B) *tal que* $|f(z)| \leq M(B)$ *para toda* z *en* B *y para toda* f en $\mathcal{F}$.

Demuestre lo siguiente: Si $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *es una sucesión de funciones analíticas en una región* G, *la cual es uniformemente acotada en los discos cerrados de* G, *entonces la sucesión de las derivadas* $f_1', f_2', f_3', \ldots$ *es también uniformemente acotada en los discos cerrados de* G.

Solución. Suponga que $B = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq r\}$ es un disco cerrado de G. Puesto que B es cerrado y G es abierto, el ejemplo resuelto 1.4.28 muestra que existe un número ρ con $B \subset D(z_0; \rho) \subset G$. Sea $R = (r + \rho)/2$ y $D = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq R\}$. Por hipótesis, existe un número $N(D)$ tal que $|f_n(z)| \leq N(D)$ para toda n y toda z en D. Γ es el círculo frontera de D, la fórmula integral de Cauchy para derivadas nos da, para cualquier z en B,

$$|f_n'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{N(D)}{(R - r)^2} \right] 2\pi r$$

Así, si ponemos $M(B) = N(D)R/(R - r)^2$, tendremos $|f_n'(z)| \leq M(B)$ para toda n y para toda z en B, como se quería.

Definición 3.1.19. *Una familia* $\mathcal{F}$ *de funciones definidas en un conjunto* B *es llamada* ***uniformemente equicontinua*** *en* B, *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que* $|f(\zeta) - f(\xi)| < \varepsilon$ *para toda* f *en* $\mathcal{F}$, *siempre que* ζ *y* ξ *estén en* B, *y* $|\zeta - \xi| < \delta$.

Esto es, para cada $\varepsilon > 0$, la misma δ funciona para todas las funciones en la familia $\mathcal{F}$, y en todo el conjunto B.

Demuestre: Si $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *es una sucesión de funciones analíticas en una región* G, *que es uniformemente acotada en los discos cerrados de* G, *entonces, esta familia de funciones es uniformemente equicontinua en todo disco cerrado de* G.

Solución. Sea B un disco cerrado en G. Por el último ejemplo, existe un número $M(B)$ tal que $|f_n'(z)| \leq M(B)$ para cada n y para toda z en B. Sea γ una línea recta de ζ a ξ en B. Ya que la línea recta está contenida en B, tenemos $|f_n(\zeta) - f_n(\xi)| = |\int_\gamma f_n'(z)\, dz| \leq \int_\gamma |f_n'(z)|\, |dz| \leq M(B)\, |\zeta - \xi|$. Así, dada $\varepsilon > 0$, podemos satisfacer la definición de equicontinuidad uniforme en B haciendo $\delta = \varepsilon/M(B)$.

Ejercicios

1. ¿Convergen las siguientes sucesiones? Si lo hacen, ¿cuáles son sus límites?

$$a)\ z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1} \qquad b)\ z_n = \frac{n!}{n^n}\, i^n$$

2. Sea c una constante compleja. Sean $z_0 = 0$ y $z_1 = c$ y defina una sucesión haciendo $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

a) Muestre que si $|c| > 2$, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. (*Sugerencia:* Haga $r = |c| - 1$ y use inducción para mostrar que $|z_n| > |c|\, r^{n-1}$ para toda n.)

b) Muestre que si $|c| \leq 2$ y existe un valor de k con $|z_k| > 2$, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. (*Sugerencia:* Haga $r = |z_k| - 1$, y muestre que $|z_{k+p}| \geq |z_k|\, r^p$ para toda $p \geq 0$.)

Observación: Aquellos valores de c para los cuales la sucesión z_n, definida en este problema, permanece acotada, forman un conjunto muy interesante con varios patrones agradables, llamado el *conjunto de Mandelbrot.* Véase A. K. Dewdney, "Computer Recreations", *Scientific American,* agosto de 1985. Véase también la figura 6.S.B.1.

3. ¿Cuál es el límite de la sucesión $f_n(x) = (1+x)^{1/n}$, $x \geq 0$? ¿Converge uniformemente?

4. *a)* Muestre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n^2 + z)$ converge en el conjunto $\mathbf{C}\backslash\{z = ni \mid n \text{ es un entero}\}$.

b) Muestre que la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado contenido en esta región.

5. *a)* Muestre que la sucesión de funciones $f_n(z) = z^n$ converge uniformemente a la función $0\, f(z) = 0$ en cualquier disco cerrado $D_r = \{z \text{ tal que } |z| \leq r\}$ con $r < 1$.

b) ¿La convergencia es uniforme en el disco unitario abierto $D(0; 1)$?

6. *a)* Muestre que la sucesión de funciones $f_n(z) = \cos(x/n)$ converge uniformemente a la función constante $f(x) = 1$ para $x \in [0, \pi]$.

b) Muestre que converge puntualmente a 1 en todo $\mathbf{R}$.

c) ¿La convergencia es uniforme en todo $\mathbf{R}$?

7. Examine la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series.

$$a)\ \sum_{2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n} \qquad b)\ \sum_{1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

8. Demuestre que

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

no converge uniformemente en $A = \{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$.

9. Si $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ es una serie de funciones continuas que converge uniformemente y si $z_n \to z$, muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z_n) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$$

10. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, demuestre que $a_k \to 0$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente, muestre que $g_k(z) \to 0$ uniformemente.

11. Muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

es analítica en $A = \{z \text{ tal que } |z| > 1\}$.

12. Muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Calcule su integral alrededor del círculo unitario.

13. Muestre que $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \operatorname{sen} nz$ es analítica en la región $A = \{z \mid -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

14. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

converge tanto en el interior como en el exterior del círculo unitario y representa una función analítica en cada región.

15. Muestre que $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^k n^{-z}$ es analítica en $\{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$. (*Sugerencia*: utilice el resultado tado del ejemplo resuelto 3.1.15.)

16. Sea f una función analítica en el disco $D(0; 2)$ tal que $|f(z)| \leq 7$ para toda $z \in D(0; 2)$. Demuestre que existe una $\delta > 0$ tal que si $z_1, z_2 \in D(0; 1)$ y si $|z_1 - z_2| < \delta$, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| < 1/10$. Encuentre un valor numérico de δ independiente de f, que tenga esta propiedad. (*Sugerencia:* use la fórmula integral de Cauchy.)

17. Si $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente en una región A, y si f_n es analítica en A, ¿es cierto que $f_n'(z) \to f'(z)$ uniformemente en A? (*Sugerencia:* vea el ejemplo resuelto 3.1.16.)

18. Demuestre: $f_n \to f$ uniformemente en cualquier disco cerrado en una región A si $f_n \to f$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto (cerrado y acotado) de A.

19. Encuentre una región apropiada en la cual

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{n}$$

sea analítica.

20. Sea f_n analítica en una región acotada A y continua en cl (A), $n = 1, 2, 3, \ldots$ Suponga que las funciones f_n convergen uniformemente en fr (A). Entonces demuestre que las funciones f_n convergen uniformemente a una función analítica en A. (*Sugerencia:* utilice el teorema del módulo máximo.)

3.2. SERIES DE POTENCIAS Y EL TEOREMA DE TAYLOR

En esta sección se considerará una clase especial de series, llamadas series de potencias, las cuales tienen la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Vamos a examinar sus propiedades de convergencia y a mostrar que una función es analítica si es representable localmente como una serie de potencias convergente. Para obtener esta representación, primero necesitamos establecer el teorema de Taylor, el cual establece que si f es analítica en un disco abierto centrado en z_0, entonces la *serie de Taylor* de f,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge en el disco y es igual a $f(z)$ en todo ese disco.

Para demostrar los resultados de esta sección, usaremos las técnicas desarrolladas en la sección 3.1 y la fórmula integral de Cauchy.

Convergencia de series de potencias

Una *serie de potencias* es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. (Aquí a_n y $z_0 \in \mathbf{C}$ son números complejos fijos.) Cada término $a_n(z - z_0)^n$ es entero y, por tanto, para demostrar que la suma es analítica en una región, podemos usar el teorema de convergencia analítica (3.1.8). El hecho básico a ser recordado acerca de las series de potencias, es que el dominio apropiado de analiticidad, es el interior de un círculo centrado en z_0. Esto se establece en el primer teorema.

Teorema de convergencia de series de potencias 3.2.1. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *una serie de potencias. Existe un único número* $R \geq 0$, *posiblemente* $+\infty$; *llamado el* ***radio de convergencia****, tal que si* $|z - z_0| < R$, *la serie converge y si* $|z - z_0| > R$, *la serie diverge. Más aun, la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado en* $A = \{z \in \mathbf{C}$ *tal que* $|z - z_0| < R\}$. *No se puede hacer un enunciado general acerca de la convergencia si* $|z - z_0| = R$. (Véase la figura 3.2.1.)

Así, en la región $A = \{z \in \mathbf{C}$ tal que $|z - z_0| < R\}$ la serie converge y tenemos divergencia en z, si $|z - z_0| > R$. El círculo $|z - z_0| = R$ es llamado el *círculo de convergencia* de la serie de potencias dada. Los métodos prácticos para calcular R utilizan los criterios de la razón y de la raíz (3.2.5).

Demostración. Sea $R = \sup \{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge$\}$, donde sup significa la más chica de las cotas superiores de ese conjunto de números reales. Vamos a mostrar que R tiene las propiedades deseadas. El siguiente lema es útil a este respecto.

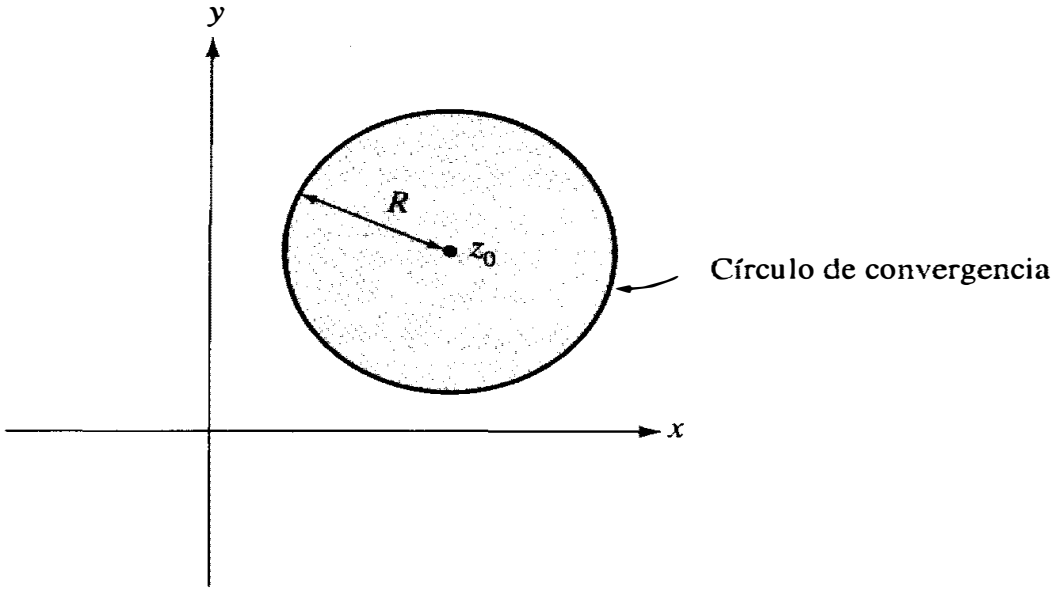


Figura 3.2.1. Convergencia de series de potencias. Las series convergen dentro de un círculo, las series divergen fuera del círculo.

Lema de Abel-Weierstrass 3.2.2. *Suponga que* $r_0 \geq 0$ *y que* $|a_n| r_0^n \leq M$ *para toda* n, *donde* M *es alguna constante. Entonces, para* $r < r_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge uniforme y absolutamente en el disco cerrado* $A_r = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq r\}$.

Demostración. Para $z \in A_r$, tenemos

$$|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n \leq M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

Sea

$$M_n = M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

Ya que $r/r_0 < 1$, ΣM_n converge. Así, por el criterio M de Weierstrass (3.1.7), la serie converge uniforme y absolutamente en A_r. ▼

Podemos ahora demostrar la primera parte del teorema de convergencia de series de potencias. Sea $r_0 < R$. Por la definición de R, existe una r_1 con $r_0 < r_1 \leq R$ tal que $\Sigma |a_n| r_1^n$ converge. Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_0^n$ converge, por el criterio de comparación. Los términos $|a_n| r_0^n$ están acotados (de hecho $\to 0$) y, por tanto, por el lema de Abel-Weierstrass, la serie converge uniforme y absolutamente en A_r para cualquier $r < r_0$. Ya que cualquier z con $|z - z_0| < R$ está en alguna A_r y puesto que siempre podemos escoger r_0 tal que $r < r_0 < R$, tenemos la convergencia en z.

Supongamos ahora que $|z_1 - z_0| > R$ y $\Sigma a_n(z_1 - z_0)^n$ converge. Vamos a deducir una contradicción. Los términos $a_n(z_1 - z_0)^n$ están acotados en valor absoluto porque éstos se aproximan al 0. Así, por el lema de Abel-Weierstrass, si $R < r < |z_1 - z_0|$, en-

tonces $\Sigma a_n(z_1 - z_0)^n$ converge absolutamente si $z_1 \in A_r$. Por lo tanto. $\Sigma |a_n| r^n$ converge. Pero esto significaría, por la definición de R, que $R < R$.

Hemos demostrado que la convergencia es uniforme y absoluta en cada disco cerrado A_r *estrictamente menor* y, por tanto, en cualquier disco cerrado en A. ■

Combinando los teoremas de convergencia analítica y de convergencia de series de potencias, podemos deducir lo siguiente:

Analiticidad de las series de potencias 3.2.3. *Una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *es una función analítica en el interior de su círculo de convergencia.*

Sabemos también que podemos diferenciar término a término. Así:

Diferenciación de series de potencias 3.2.4. *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *la función analítica definida en el interior del círculo de convergencia de la serie de potencias dada. Entonces* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$, *y esta serie tiene el mismo círculo de convergencia que* $\Sigma a_n(z - z_0)^n$. *Más aún, los coeficientes* a_n *están dados por* $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Demostración. Sabemos, del teorema de convergencia analítica, que la derivada $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ converge en $A = D(z_0; R) = \{z \in \mathbf{C}$ tal que $|z - z_0| < R\}$.

Para mostrar que la serie de las derivadas tiene el mismo círculo de convergencia que la serie original, necesitamos únicamente mostrar que ésta diverge para $|z - z_0| > R$. Si ésta convergiera a algún punto z_1, con $|z_1 - z_0| = r_0 > R$, entonces $n a_n r_0^{n-1}$ sería acotada. Así $a_n r_0^n = (n a_n r_0^{n-1})(r_0/n)$ sería también acotada y, por tanto, $\Sigma a_n (z - z_0)^n$ convergería para $R \leq |z - z_0| < r_0$, por el lema de Abel-Weierstrass. Pero esto contradice la propiedad máxima de R, del teorema de convergencia de las series de potencias (3.2.1). Esto establece el enunciado acerca del radio de convergencia.

Para identificar a los coeficientes, hágase $z = z_0$ en la fórmula que define $f(z)$, para encontrar $f(z_0) = a_0$. Procediendo inductivamente, encontramos

$$f^{(n)}(z) = n!a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(z - z_0)^{k-n}$$

y al hacer $z = z_0$, obtenemos $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$. ■

Es importante reparar en lo que se acaba de hacer en el último enunciado de este teorema. Los coeficientes de una serie de potencias alrededor de un centro en particular, están completamente determinados por la función que esta serie representa. Así, si dos series aparentemente diferentes se han obtenido de la misma función alrededor del mismo centro, ellas deben ser, en efecto, la misma serie.

Unicidad de la serie de potencias 3.2.5. *Las expansiones en series de potencias alrededor de un mismo centro, son únicas. Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ *para toda* z *en algún disco no trivial* $D(z_0; r)$ *con* $r > 0$, *entonces* $a_n = b_n$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$

Demostración. La última afirmación del teorema de diferenciación de series de potencias dice que $a_n = f^{(n)}(z_0)/n! = b_n$. ■

Esta observación puede ser usada de varias maneras. En particular, ésta dice que sin importar los trucos que podamos usar para encontrar una serie de potencias convergente que represente a una función, ésta debe ser la serie de Taylor. El uso de las series de potencias nos puede ayudar también en la solución de ecuaciones diferenciales y en otros problemas. Varios de estos trucos e ideas para el manejo y aplicación de las series de potencias, se demuestran en los ejemplos resueltos.

Vamos ahora a obtener algunos métodos prácticos para calcular el radio de convergencia R. (El método para encontrar R, dado en la demostración del teorema 3.2.1, no es útil para calcular R en ejemplos específicos.

Proposición 3.2.6. *Considere una serie de potencias*

(i) ***Criterio de la razón:*** *Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_n + 1|}$$

existe, entonces es igual a R, *el radio de convergencia de la serie.*

(ii) ***Criterio de la raíz:*** *Si* $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *existe, entonces* $R = 1/\rho$ *es el radio de convergencia. (Hágase* $R = \infty$ *si* $\rho = 0$; *hágase* $R = 0$ *si* $\rho = \infty$.)

Demostración. Para demostrar ambos casos, mostramos que $R = \sup\{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$.

(i) Por el criterio de la razón (proposición 3.1.3), sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge o diverge conforme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}\, r^{n+1}|}{|a_n\, r^n|} < 1 \quad \text{o} \quad > 1$$

esto es, de acuerdo a si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > r \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} < r$$

Así, por la caracterización de R en el teorema de convergencia de series de potencias (3.2.1), el límite es igual a R.

(ii) Por el criterio de la razón (proposición 3.1.3) sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge o diverge conforme $\lim_{n\to\infty} (|a_n|\, r^n)^{1/n} < 1$ o > 1; esto es, de acuerdo a si

$$r < 1/\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \quad \text{o} \quad r > 1/\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

El resultado se sigue como en (i). ■

Por ejemplo:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tiene radio de convergencia 1, pues $a_n = 1$ y, por tanto, tenemos $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = 1$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ tiene radio de convergencia $R = +\infty$ (esto es, la función es entera), ya que $a_n = 1/n!$ y, por tanto, $|a_n/a_{n+1}| = n + 1 \to \infty$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ tiene radio de convergencia $R = 0$ pues $|a_n/a_{n+1}| = 1/(n+1) \to 0$. (Esta función no tiene una región no trivial de analiticidad.)

Observación. Al refinar el criterio de la raíz, es posible mostrar que $R = 1/\rho$, donde $\rho = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$, el cual siempre existe ($\lim_{n\to\infty} \sup c_n = \lim_{n\to\infty} (\sup \{C_n, C_{n+1}, \ldots\})$, por definición. Ésta es conocida como la fórmula de Hadamard para el radio de convergencia.) No existe un refinamiento análogo para el criterio de la razón (conocido por nosotros.)

Teorema de Taylor

Es obvio, a partir de los cálculos precedentes, que si $f : A \to \mathbf{C}$ es igual, en un disco pequeño alrededor de cada $z_0 \in A$, a una serie de potencias convergente, entonces f es analítica. El inverso es también cierto: Si f es analítica, es igual, en cualquier disco de su dominio, a una serie de potencias convergente. Esto se hace explícito en el siguiente teorema.

Teorema de Taylor 3.2.7. *Sea* f *analítica en una región* A. *Sea* $z_0 \in$ A *y sea* $A_r = \{z$ *tal que* $|z - z_0| < r\}$ *contenida en* A *(usualmente se usa el disco más grande posible: si* $r = \infty$, $A_r = A = \mathbf{C}$) (véase la figura 3.2.2). *Entonces, para cada* $z \in A_r$, *la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge en A_r *(esto es, tiene un radio de convergencia* $\geq r$*), y tenemos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \qquad (1)$$

(Usamos la convención de que $0! = 1$.*) La serie de la ecuación* (1) *es llamada la* ***serie de Taylor*** *de* f *alrededor del punto* z_0.

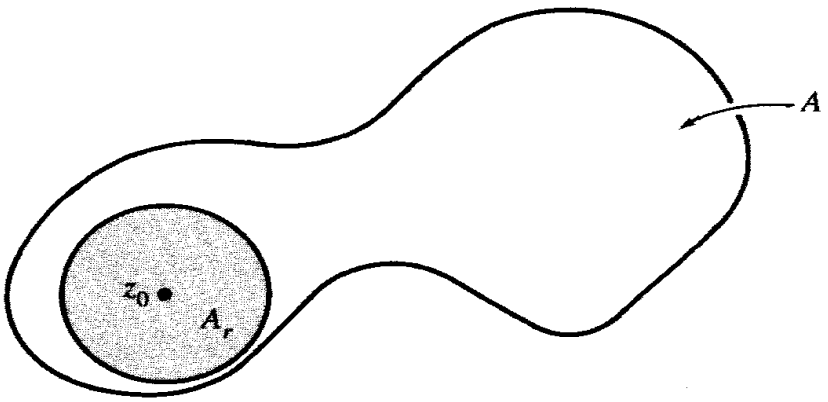


Figura 3.2.2. Teorema de Taylor.

Antes de demostrar este resultado, vamos a estudiar un ejemplo que ilustre su utilidad. Considere $f(z) = e^z$. Aquí f es analítica y $f^{(n)}(z) = e^z$ para toda n, así que $f^{(n)}(0) = 1$ y, por tanto,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{2}$$

la cual es válida para toda $z \in \mathbf{C}$. ya que e^z es entera. La tabla 3.2.1 registra las series de Taylor de algunas funciones elementales comunes. La serie de Taylor alrededor del punto $z_0 = 0$ es algunas veces llamada la *serie de Maclaurin.*

Todas las series de la tabla 3.2.1 son importantes y útiles. Éstas pueden establecerse tomando las derivadas sucesivas y usando el teorema de Taylor. Las series

Tabla 3.2.1. Algunas expansiones comunes.

Función	*Series de Taylor alrededor de* 0	*Donde es válida*
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (serie geométrica)	$\|z\| < 1$
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	todo z
sen z	$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$	todo z
cos z	$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	todo z
log (1 + z) (rama principal)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$	$\|z\| < 1$
$(1+z)^{\alpha}$ (rama principal con $\alpha \in \mathbf{C}$ fija)	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ (serie binomial), donde $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ $\left(\text{sea } \binom{\alpha}{n} \text{ cero si } \alpha \text{ es un entero} < n \text{ y sea } \binom{\alpha}{0} = 1\right)$	

binomiales pueden ser familiares a partir del álgebra. Las series de Taylor de algunas funciones pueden encontrarse por otros medios, si se usan las propiedades especiales de las series de potencias que nos permiten su manipulación. Algunas de éstas se presentan en los ejemplos resueltos. Ya hemos encontrado la serie geométrica para $1/(1-z)$ y la serie para $\log(1+z)$ en los ejemplos resueltos 3.1.12 y 3.1.14. Es particularmente importante advertir que hemos hecho esto para la serie geométrica, ya que la usaremos en la demostración del teorema de Taylor que sigue.

Demostración del teorema de Taylor. Sea $0 < \sigma < r$ y sea γ el círculo $\gamma(t) = z_0 + \sigma e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, de radio σ centrado en z_0. Si z es cualquier punto en el interior de γ, la fórmula integral de Cauchy nos da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

El plan es usar las series geométricas para expander el integrando como una serie de potencias en $z - z_0$ y entonces, usar la proposición 3.1.9, para integrar término a término. Finalmente, los coeficientes de la serie integrada resultante, son reconocidos como aquellos de la serie de Taylor, por la fórmula integral de Cauchy para derivadas. Puesto que z está dentro del círculo γ, y ζ está sobre su frontera, tenemos $|(z - z_0)/(\zeta - z_0)| < 1$. La serie geométrica del ejemplo resuelto 3.1.12 nos permite la siguiente expansión:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

así que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z - z_0)}{\zeta - z_0} \right)^n \right] d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)\,(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta$$

Más aún, puesto que g está lejos de la frontera del disco de convergencia, el ejemplo resuelto 3.1.12 también muestra que la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

es uniforme en ζ conforme ζ corre alrededor del círculo γ, con z fija. También, $f(\zeta)/(\zeta - z_0)$ es una función continua de ζ alrededor del círculo γ, así que es acotada allí. Se sigue que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)\,(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

converge uniformemente en γ a $f(\zeta) / (\zeta - z)$. (La primera serie satisface el criterio de Cauchy uniformemente en ζ, por lo tanto, lo sigue satisfaciendo después de ser multiplicado por algo que permanezca acotado. Se le pide al estudiante que proporcione los detalles en el ejercicio 21.) Por la proposición 3.1.9, tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\,(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right]$$

como se quería. La última igualdad es justamente la fórmula integral de Cauchy para derivadas. Puesto que el radio del círculo γ fue arbitrario, en tanto éste permanezca dentro de la región de analiticidad, esta representación de $f(z)$ es válida en el disco abierto más grande centrado en z_0 que esté contenido en la región A. ■

La siguiente consecuencia de este teorema fue mencionada informalmente al principio de esta sección.

Corolario 3.2.8. *Sea* A *una región en* C *y sea* f *una función con valores complejos, definida en* A. *Entonces,* f *es analítica en* A *si y sólo si, para cada* z_0 *en* A, *existe un número* $r > 0$ *tal que el disco* $D(z_0; r) \subset A$ *y* f *es igual a una serie de potencias convergente en* $D(z_0; r)$.

Demostración. El teorema de Taylor muestra que cualquier función analítica es igual a una serie de potencias, en efecto, a su serie de Taylor, en cualquier disco en A. Por otro lado, si $f(z)$ es igual a una serie de potencias convergente en $D(z_0; r)$, entonces $D(z_0; r)$ debe estar en el interior del círculo de convergencia de la serie y, por lo tanto, f debe ser analítica en $D(z_0; r)$. Puesto que existe tal disco y tal serie de potencias convergente para cada z_0 en A se sigue, de la analiticidad para series de potencias (3.2.3), que f es analítica en A. ■

La condición de este corolario, debe entonces ser tomada como una definición alternativa de "analítica". Hemos mostrado que las nociones de diferenciabilidad en una región y analiticidad en una región coinciden para funciones de variable compleja. (*Cuidado:* recuerde que éstas *no* coinciden para variables reales.) El teorema de Cauchy, las fórmulas integrales de Cauchy y el teorema de Taylor, están entre los teoremas fundamentales del análisis complejo.

En los ejemplos específicos, las derivadas de f pueden ser muy complicadas y encontrar la serie de Taylor puede hacerse más fácilmente buscando directamente una serie convergente que represente a f, en lugar de calcular las derivadas. Por el corolario 3.2.5, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ y la serie converge, entonces ésta debe ser la

serie de Taylor. De hecho, algunas veces podemos usar el teorema de Taylor para obtener las fórmulas para las derivadas, luego de haber encontrado la serie por otros medios. En los ejemplos resueltos, se encuentran algunos trucos para manipular estas series y sus aplicaciones.

Ejemplos resueltos

3.2.9. *Use la expansión de series, dadas en la tabla* 3.2.1, *para confirmar la identidad* $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ *para toda* z.

Solución.

$$\cos z + i \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)i^{2n} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = e^{iz}$$

como se quería.

3.2.10. *¿Puede una serie de potencias* $\Sigma a_n(z-2)^n$ *converger en* $z = 0$ *pero diverger en* $z = 3$?

Solución. No. Si converge en $z = 0$, esto implica que, por el teorema de convergencia de series de potencias (3.2.1), que el radio de convergencia R satisface $R \geq 2$. Pero $z = 3$ está dentro de este círculo, así que la serie debe converger allí (véase la figura 3.2.3).

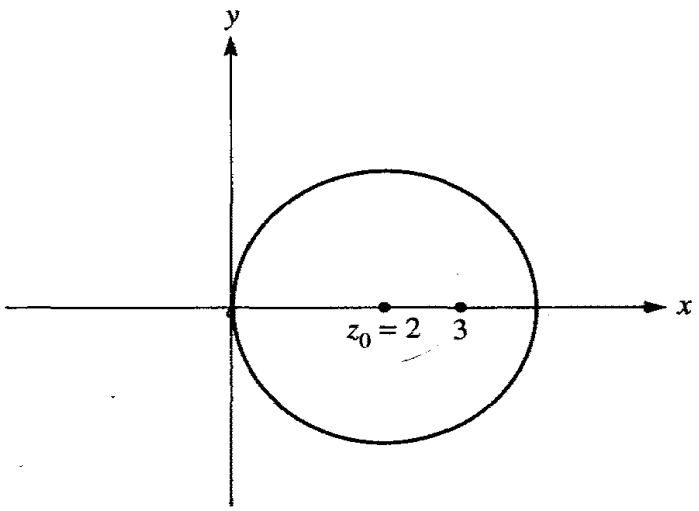


Figura 3.2.3. El círculo de convergencia para la serie de potencias del ejemplo resuelto 3.2.10, debe ser al menos así de grande.

3.2.11. *Encuentre la serie de Taylor alrededor de* $z_0 = 0$, *para* $f(z) = 1/(4 + z^2)$ *y calcule el radio de convergencia.*

Solución. Escriba $f(z) = \frac{1}{4}\{1/[1 - (-z^2/4)]\}$. Sabemos que mientras que $|w| < 1$, entonces $1/(1 - w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$. Reemplazando w por $-z^2/4$ nos da

$$f(z) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^{-(n+1)}z^{2n}$$

mientras que $|-z^2/4| < 1$; esto es, mientras que $|z| < 2$. Por lo tanto, el radio de convergencia es 2. Observe que éste es el disco más grande alrededor del z_0 en el cual f es analítica, ya que la analiticidad falla en $z = \pm 2i$.

3.2.12. *Encuentre la serie de Taylor de* $\log(1 + z)$ *alrededor de* $z = 0$ *y de su radio de convergencia* (véase la tabla 3.2.1).

Primera solución: Ya hemos hecho este problema como el ejemplo resuelto 3.1.14, usando la serie geométrica y la integración término a término.

Segunda solución: Usamos la rama principal del log, de tal manera que la función $f(z) = \log(1 + z)$ esté definida en $z = 0$. Ya que f es analítica en la región $A = \mathbb{C}\backslash\{x + iy \mid y = 0, x \leq -1\}$, mostrada en la figura 3.2.4, el radio de convergencia de la serie de Taylor será ≥ 1, por el teorema de Taylor (3.2.7). Que esto es *exactamente* 1, puede mostrarse como sigue. Sabemos que

$$f(0) = \log 1 = 0$$

$$f'(z) = \frac{1}{z+1} \text{ y, por tanto, } f'(0) = 1$$

$$f''(z) = -\frac{1}{(z+1)^2} \text{ y, por tanto, } f''(0) = -1$$

y

$$f'''(z) = \frac{2}{(z+1)^3} \text{ y, por tanto, } f'''(0) = 2$$

Inductivamente, vemos que

$$f^{(n)}(z) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{(z+1)^n}$$

así que $f^{(n)}(0) = (n-1)!\,(-1)^{n-1}$. De este modo, la serie de Taylor es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$$

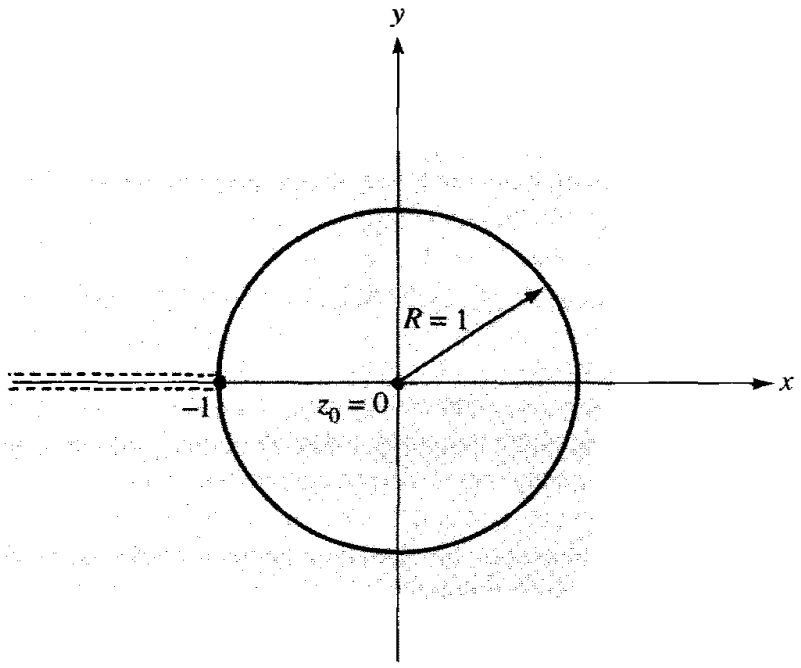


Figura 3.2.4. La serie de Taylor de log(1 + *z*).

(de acuerdo con la tabla 3.2.1). Cuando $z = -1$, ésta es la serie armónica, la cual diverge: así, el radio de convergencia es ≤ 1 y, por lo tanto, es exactamente 1. (Un procedimiento general a seguir para determinar el radio exacto de convergencia sin calcular la serie, se encuentra en el ejercicio 19.)

3.2.13. *Suponga que* $\Sigma a_n z^n$ y $\Sigma b_n z^n$ *tienen radios de convergencia* $a \geq r_0$. *Defina* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Demuestre que* $\Sigma c_n z^n$ *tiene radio de convergencia* $\geq r_0$ *y que dentro de este círculo de radio* r_0, *tenemos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$$

Solución. Esta manera de multiplicar dos series de potencias, es una generalización de la manera en que se multiplican los polinomios. Se puede dar una demostración directa, pero sería un poco largo. Si usamos el teorema de Taylor, la demostración es bastante simple. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ y sea $A = \{z \text{ tal que } |z| < r_0\}$. Entonces, f y g son analíticas en A: así que fg es también analítica en A. Por el teorema de Taylor, podemos escribir

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

para toda z en A. Es un ejercicio simple (como en el cálculo), mostrar por inducción, que la n-ésima derivada del producto $f(z)g(z)$ está dada por

$$(f \cdot g)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z)$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

En consecuencia

$$\frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Así $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge en A (y en consecuencia, por el teorema de Taylor, el radio de convergencia es $\geq r_0$) y en A

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (f \cdot g)(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$$

3.2.14. *Calcule la serie de Taylor alrededor de* $z = 0$ *y dé los radios de convergencia para*

a) $z/(z-1)$
b) $e^z/(1-z)$ (*Calcule los primeros términos únicamente*).

Solución

a) A partir de la expansión binomial (tabla 3.2.1), tenemos que $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots$ es válido para $|z| < 1$. Por tanto, para $|z| < 1$, $z/(z-1) = -z(1 + z + z^2 + \cdots) = -z - z^2 - z^3 - z^4 - \cdots$. Por la unicidad de la representación en series de potencias, ésta es la serie de Taylor de $z/(z-1)$ alrededor del 0. Al observar que $z/(z-1)$ es analítica en el disco abierto $|z| < 1$, sabemos, por el teorema de Taylor, que la serie de Taylor debe tener un radio de convergencia ≥ 1. Por supuesto, un análisis más detallado de la serie $-z - z^2 - z^3 - z^4 - \cdots$, usando el criterio de la razón o el criterio de la raíz, muestra que el radio de convergencia es exactamente 1.

b) $1/(1-z) = 1 + z + z^2 + \cdots$ para $|z| < 1$ y $e^z = 1 + z + z^2/2 + \cdots$ para toda z. Así, por el ejemplo resuelto 3.2.13, obtenemos la serie para el producto, multiplicando formalmente las dos series como si fueran polinomios; el resultado debe converger aun para $|z| < 1$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{e^z}{1-z} &= (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= 1 + (z + z) + \left(\frac{z^2}{2} + z^2 + z^2\right) + \left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2} + z^3 + z^3\right) + \cdots \\ &= 1 + 2z + \frac{5z^2}{2} + \frac{8z^3}{3} + \cdots\end{aligned}$$

En esta última serie, el término general no tiene una forma simple. Observe que este método es más rápido que calcular $f^{(k)}(0)$ para k moderadamente grande.

3.2.15. *Encuentre la serie de Taylor alrededor de* $z_0 = 0$ *para* $f(z) = 1/(z^2 - 5z + 6)$ *y determine el radio de convergencia.*

Primera solución: Factorice el denominador, use la serie geométrica dos veces y multiplique la serie de potencias resultante:

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-z/3}\right)\left(\frac{1}{1-z/2}\right)$$

Si $|z| < 2$, entonces cada uno de los dos últimos términos puede ser expandido en la serie geométrica:

$$f(z) = \frac{1}{6}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-k}\right]z^n$$

En general, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$, así que la última ecuación se convierte

$$f(z) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}\right]z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right]z^n$$

Todas estas expansiones y operaciones son válidas si $|z| < 2$ y así el radio de convergencia debe ser 2. En efecto, la analiticidad falla únicamente en $z = 2$ y $z = 3$. El más cercano de éstos a z_0 es 2. Por lo tanto, el radio de convergencia es 2.

Segunda solución: En lugar de usar la identidad algebraica empleada anteriormente y la multiplicación de series, podemos usar fracciones parciales y adición de series:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z/2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z/3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right]z^n \end{aligned}$$

como antes.

3.2.16. *Calcule los primeros términos de la serie de Taylor para* f(z) = sec z *alrededor de* $z_0 = 0$. *¿Cuál es el radio de convergencia?*

Solución. Suponga que $f(z) = \sec z = 1/\cos z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$. Si se multiplica por cos z.

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots\right)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots) \\ &= a_0 + a_1 z + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right)z^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right)z^3 + \left(a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24}\right)z^4 + \cdots \end{aligned}$$

En consecuencia (ya que sólo puede haber una expansión en series para la función constante $g(z) = 1$), tenemos

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{a_1}{2} = 0 \quad a_4 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{24} = \frac{5}{24}$$

El radio de convergencia debe ser $\pi/2$, ya que los puntos más cercanos a 0 en los cuales la analiticidad falla, son $z = \pm\pi/2$, los puntos donde $\cos z = 0$.

3.2.17. *Aplicación a ecuaciones diferenciales: Encuentre una función* f(z) tal que f(0) = 0 y f'(x) = 3f(x) + 2 *para toda* x.

Solución. Suponga que existe una solución f, la cual es la restricción al eje real de una función que es analítica en **C**. Por lo tanto, ésta tendrá una expansión en series de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Ya que $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, debemos tener,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) + 2$$

o

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n = (2 + 3a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} 3a_n z^n$$

Así

$$0 = (2 + 3a_0 - a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [3a_n - (n+1)a_{n+1}] z^n$$

Sabemos que $a_0 = f(0) = 0$. Por lo tanto, $a_1 = 2$. Para $n \geq 1$, $a_{n+1} = 3a_n/(n+1)$ y, por tanto, $a_2 = 3a_1/2$, $a_3 = 3^2 a_1/(3)(2)$, $a_4 = 3^3 a_1/(4)(3)(2)$, ..., $a_n = 3^{n-1} a_1/n! = \left(\frac{2}{3}\right)3^n/n!$. (Observe que esta fórmula también nos da $a_1 = 2$.) Así, si existe una serie de potencias que represente una solución, ésta debe ser

$$f(z) = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^n$$

Al tomar las derivadas término a término, se confirma que ésta es una solución. En este caso, podemos reconocer aun a la función que la serie representa:

$$f(z) = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n!} = \frac{2}{3}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n!}\right) - 1\right] = \frac{2}{3}(e^{3z} - 1)$$

El lector debe verificar que esta función resuelve el problema original[3]

[3] Para aplicaciones adicionales de las series de potencias a las ecuaciones diferenciales, véase, por ejemplo, J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus II*, Nueva York, Springer-Verlag, 1985, sec. 12.6, o virtualmente, cualquier texto de ecuaciones diferenciales.

3.2.18. *Función generadora para los polinomios de Hermite: La función* $f(z) = e^{2xz - z^2}$ *es analítica en todas partes y, por tanto, tiene una expansión en series de potencias de* z, *cuyos coeficientes dependen de* x. *Si hacemos* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)z^n/n!$, *entonces las funciones* $H_n(x)$ *son llamadas los* ***polinomios de Hermite.*** (*Uno necesita verificar que éstos son, en efecto, polinomios de* x.) *La función* f *es llamada* ***función generadora.*** *Calcule* $H_0(x)$, $H_1(x)$, *y* $H_2(x)$.

Solución

$$H_0(x) = f(0) = 1$$
$$H_1(x) = f'(0) = (2x - 2z)e^{2xz - z^2}|_{z=0} = 2x$$
$$H_2(x) = f''(0) = [-2e^{2xz - z^2} + (2x - 2z)^2 e^{2xz - z^2}]_{z=0} = 4x^2 - 2$$

Procediendo inductivamente, vemos que $f^{(k)}(z)$ siempre es un polinomio de x y z, multiplicado por $e^{2xz - z^2}$, y por tanto la evaluación en $z = 0$, siempre producirá un polinomio de x.

Ejercicios

1. Encuentre el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ *b)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{z^n}{n^n}$ *d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

2. Encuentre el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ *b)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ *d)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + 2^n}$

3. Calcule las series de Taylor de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados y determine el conjunto en el cual la serie converge:

a) e^z, $z_0 = 1$ *b)* $1/z$, $z_0 = 1$

4. Establezca la serie de Taylor para sen z, cos z, y $(1 + z)^{\alpha}$ en la tabla 3.2.1.

5. Calcule las series de Taylor de lo siguiente. (Dé unicamente los primeros términos, donde sea apropiado.)

a) (sen z)/z, $z_0 = 1$ *b)* $z^2 e^z$; $z_0 = 0$
c) e^z sen z, $z_0 = 0$

6. Calcule los primeros cuatro términos de la serie de Taylor de $1/(1 + e^z)$ alrededor de $z_0 = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

7. Calcule la serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados:

a) $e^{z^2}, z_0 = 0$ *b)* $1/(z-1)(z-2), z_0 = 0$

8. Calcule la serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados:

a) sen $z^2, z_0 = 0$ *b)* $e^{2z}, z_0 = 0$

9. Calcule los primeros términos en la expansión de Taylor de $\sqrt{z^2-1}$ alrededor del 0.

10. Sean $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergentes para $|z| < R$. Sea γ un círculo de radio $r < R$ y defina

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, g\left(\frac{z}{\zeta}\right) d\zeta$$

Muestre que $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$. (*Sugerencia*: use el ejemplo resuelto 2.4.15.)

11. Establezca lo siguiente:

$$\text{senh } z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{y} \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

12. ¿Cuál es la falla del siguiente razonamiento? Ya que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, obtenemos que $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(n!z^n)$. Dado que esto converge (pues e^z es entera) y ya que la expansión de Taylor es única, la expansión de Taylor de $f(z) = e^{1/z}$ alrededor de $z = 0$ es $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}/n!$.

13. Diferencie las series para $1/(1-z)$, para obtener las expansiones de

$$\frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{(1-z)^3}$$

Dé el radio de convergencia.

14. Suponga que $f(z) = \Sigma\, a_n z^n$ tiene radio de convergencia R y sea $A = \{z \text{ tal que } |z| < R\}$. Sea $z_0 \in A$ y sea $\tilde{R}$ el radio de convergencia de la serie de Taylor de f alrededor de z_0. Demuestre que $R - |z_0| \leq \tilde{R} \leq R + |z_0|$.

15. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia R, muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} (\text{Re } a_n) z^n$ tiene radio de convergencia $\geq R$.

16. Sea $f(z) = \Sigma\, a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Para cualquier curva cerrada γ en $A = \{z \text{ tal que } |z| < R\}$ muestre que $\int_\gamma f = 0$

a) Usando el teorema de Cauchy.
b) Justificando la integración término a término.

17. ¿En qué región representa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nz}{2^n}$$

una función analítica ¿Qué hay acerca de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2} \; ?$$

18. Encuentre los primeros términos de la expansión de Taylor de $\tan z = (\operatorname{sen} z)/(\cos z)$ alrededor de $z = 0$. (*Sugerencia*: sabemos que tal expansión existe. Escriba

$$\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Multiplique por

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

y use el ejemplo resuelto 3.2.13 para encontrar a_0, a_1, a_2.)

19. Sea f analítica en una región A, sea $z_0 \in A$ y sea D el disco abierto más grande, con centro en z_0 y contenido en A.

a) Si f no es acotada en D, entonces muestre que el radio de D es igual al radio de convergencia de la serie de Taylor para f en z_0.

b) Si no existe una extensión analítica de f (esto es, si no existen $\tilde{f}$ y A' tal que $\tilde{f}$ es analítica en A', $A' \supset A$, $A' \neq A$, y $f = \tilde{f}|A$), entonces muestre, mediante un ejemplo, que el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en z_0, puede ser aún mayor que el radio de D. (*Sugerencia*; use la rama principal de $\log(1 + z)$ con $z_0 = -2 + i$.)

20. Demuestre: Una serie de potencias converge absolutamente en todo su círculo de convergencia, o en ningún lugar de éste. Dé un ejemplo para mostrar que cada uno de los casos puede ocurrir.

21. Si $\Sigma\, g_n(z)$ converge uniformemente en un conjunto $B \subset \mathbb{C}$, y $h(z)$ es una función acotada en B, demuestre que $\Sigma[h(z)g_n(z)]$ converge uniformemente en B a $h(z)$ $[\Sigma\, g_n(z)]$.

22. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente para $|z| < R$. Si $0 < r < R$, muestre que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$, donde $z = re^{i\theta}$ y

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta \tag{3}$$

y que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \tag{4}$$

La ecuación (4) es referida como el *teorema de Parseval* y decimos que la ecuación (3) expresa a la serie de Taylor como una *serie de Fourier*. (*Sugerencia*: use la fórmula integral de Cauchy par a_n y expanda en una serie a $f\bar{f}$ y luego integre término a término.)

23. Sea $H_n(x)$ el polinomio de Hermite, introducido en el ejemplo resuelto 3.2.18. Muestre que $H_1(x) = 2xH_0(x)$ y que para $n \geq 1$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

24. Calcule la expansión de Taylor de $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ alrededor de $z = 2$ (véase el ejemplo resuelto 3.1.15.)

25. Encuentre una función tal que $f(0) = 1$ y $f'(x) = x + 2f(x)$ para toda x (véase el ejemplo resuelto 3.2.17.)

26. Encuentre una función f tal que $f(0) = 1$ y $f'(x) = xf(x)$ para toda x.

3.3. SERIES DE LAURENT Y CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

Las series de Taylor nos permiten encontrar una expansión en series de potencias convergentes, alrededor de z_0, para $f(z)$ cuando f es analítica en todo un disco alrededor de z_0. Así, la expansión de Taylor alrededor de $z_0 = 0$ no se aplica a funciones como $f(z) = 1/z$ o e^z/z^2, las cuales no son analíticas en $z = 0$. Para tales funciones, existe otra expansión, llamada *expansión de Laurent* (formulada aproximadamente en 1840), que utiliza las potencias inversas de z en vez de las potencias de z. Esta expansión es particularmente importante en el estudio de puntos singulares de una función y nos conduce a otro resultado fundamental del análisis complejo, el teorema del residuo, que se estudia en el próximo capítulo.

Teorema de Laurent

Teorema de expansión de Laurent 3.3.1. *Sea* $r_1 \geq 0$, $r_2 > r_1$ y $z_0 \in \mathbf{C}$ *y considere la región* $A = \{z \in \mathbf{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ (véase la figura 3.3.1). *Se admite que* $r_i = 0$ *o* $r_2 = \infty$ (*o ambos*). *Sea* f *analítica en la región* A. *Entonces, podemos escribir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{1}$$

donde ambas series en el lado derecho de la ecuación, convergen absolutamente en A *y uniformemente en cualquier conjunto de la forma* $B_{\rho 1, \rho 2} = \{z \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$ *donde* $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. *Si* γ *es un círculo alrededor de* z_0 *con radio* r, *con* $r_1 < r < r_2$, *entonces los coeficientes están dados por*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}\, d\zeta \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

(*Si hacemos* $b_n = a_{-n}$, *entonces la primera fórmula cubre ambos casos.*) *La serie para* f *en la ecuación* (1), *es llamada la* ***serie de Laurent*** *o* ***expansión de Laurent*** *alrededor de* z_0 *en el anillo* A. *Cualquier expansión convergente puntualmente de* f *de esta forma, es igual a la expansión de Laurent; en otras palabras, la expansión de Laurent es única.*

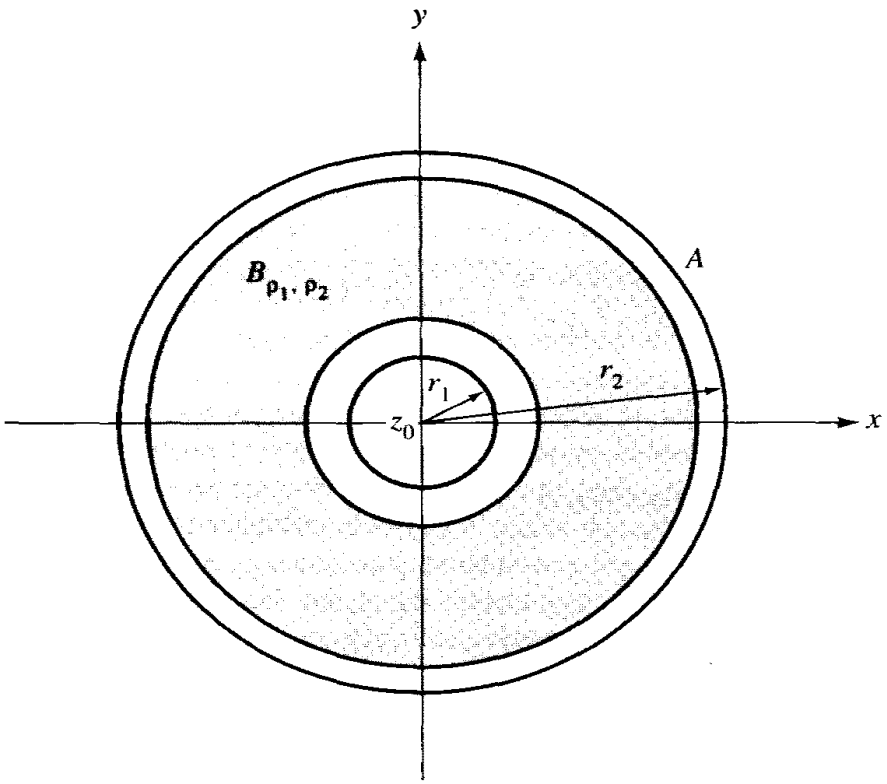


Figura 3.3.1. La serie de Laurent, con $z_0 = 0$.

NOTA. *No podemos* hacer $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, como lo hicimos con la expansión de Taylor. En efecto, $f^{(n)}(z_0)$ no está siquiera definida, ya que $z_0 \notin A$.

Las ecuaciones (2) para a_n y b_n, no son muy prácticas para calcular la serie de Laurent de una función dada f. Se pueden usar trucos para obtener algunas expansiones de la forma deseada y la unicidad de la expansión, garantizará que ésta es la forma deseada. En la siguiente parte del texto se dan algunas técnicas, así como en los ejemplos resueltos.

En la siguiente demostración veremos que la parte en series de potencias de f, esto es,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

converge y, por tanto, es analítica en el *interior* del círculo $|z - z_0| = r^2$, mientras que la parte singular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

converge *fuera* de $|z - z_0| = r_1$. La suma, por tanto, converge *entre* estos círculos.

Se previene al estudiante que la unicidad depende de la elección de A. Por ejemplo, si $A = \{z \text{ tal que } |z| > 1\}$, entonces $f(z) = 1/[z(z-1)]$ tiene la expansión de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}\right] = \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\cdots\right) = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

(válida si $|z| > 1$), mientras que en $A = \{z \text{ tal que } 0 < |z| < 1\}$, tiene la expansión

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\left(1+z+z^2+\cdots\right) = -\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots\right)$$

(válida para $0 < |z| < 1$). Por la unicidad, éstas son *las* expansiones de Laurent para las regiones apropiadas.

Demostración del teorema de la expansión de Laurent. Como con la demostración del teorema de Taylor, empezamos con la fórmula integral de Cauchy. Primero mostraremos la convergencia uniforme de las series establecidas en $B_{\rho 1,\rho 2}$, donde a_n y b_n están definidos por el par de ecuaciones (2). Puesto que todos los círculos γ de radio r, son homotópicos uno con respecto a otro en A, mientras que $r_1 < r < r_2$ (¿por qué?, los números a_n y b_n son independientes de r y así

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}\,d\zeta$$

donde γ_1 es un círculo de radio $\tilde{\rho}_1$ y γ_2 es un círculo de radio $\tilde{\rho}_2$, y donde $r_1 < \tilde{\rho}_1 < \rho_1 < \tilde{\rho}_2 < \rho_2 < r_2$ (véase la figura 3.3.2).

Para $z \in B_{\rho_1,\rho_2}$, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

por la fórmula integral de Cauchy (véase el ejercicio 5).

Como en el teorema de Taylor, para ζ en γ_2 (y z fijo dentro de γ_2),

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0}+\frac{z-z_0}{(\zeta-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(\zeta-z_0)^3}+\cdots$$

la cual converge uniformemente en ζ sobre γ_2.

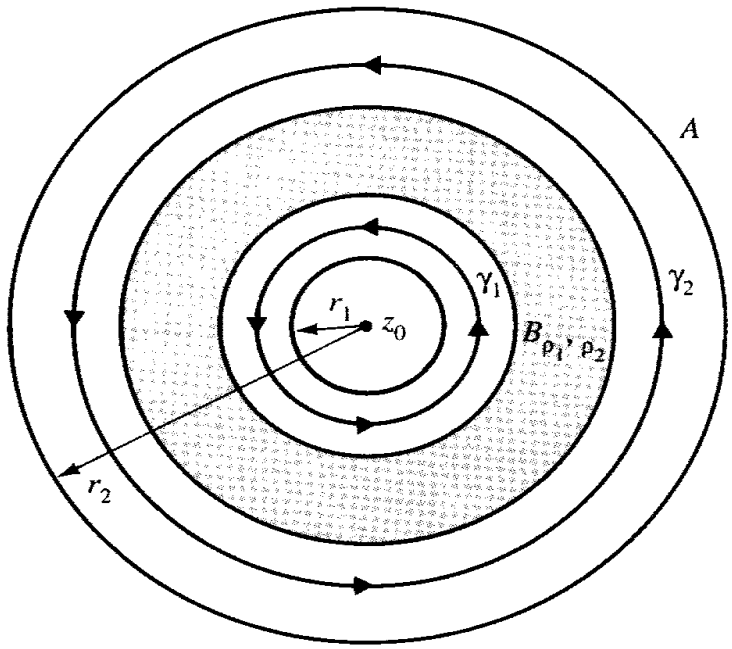


Figura 3.3.2. Construcción de las curvas γ_1 y γ_2.

Podemos integrar término a término (por la proposición 3.1.9, y por el hecho de que $f(\zeta)$ es acotada (véase el ejercicio 21, sección 3.2) y obtener así

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right](z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Puesto que esta serie de potencias converge para z en el interior de γ_2, converge uniformemente en discos estrictamente más pequeños (en particular en B_{ρ_1,ρ_2}).

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - z_0)\left(1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{\zeta - z_0}{(z - z_0)^2} + \frac{(\zeta - z_0)^2}{(z - z_0)^3} + \cdots$$

converge uniformemente con respecto de ζ en γ_1. Así

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2} f(\zeta)\cdot(\zeta - z_0)^{n-1}\,d\zeta\right]\cdot\frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

Esta serie converge para z, en el exterior de γ_1, así que la convergencia es uniforme fuera de cualquier círculo estrictamente mayor. Este hecho puede demostrarse de la misma manera que el hecho análogo para series de potencias, usando el lema de Abel Weierstrass de la sección 3.2. (Otro método consiste en hacer la transformación $w = 1/(z - z_0)$ y aplicar el resultado de series de potencias a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$.) Se le pide al estudiante hacer esto en el ejercicio 15.

Hemos demostrado ahora la existencia de la expansión de Laurent. Para demostrar la unicidad, vamos a suponer que tenemos una expansión para f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Si ésta converge en A, esta convergencia será, por las observaciones precedentes, uniforme en el círculo γ, así que podemos formar

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^{n+k+1}}$$

la cual también converge uniformemente. Podemos entonces integrar término a término. Por el ejemplo resuelto 2.1.12, tenemos

$$\int_\gamma (z-z_0)^m \, dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

Así, si $k \geq 0$, la integral alrededor de γ_1 de cada término de la segunda serie y todos los de la primera, excepto aquel para el que $n = k$, es 0. Por lo tanto

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz = 2\pi i a_k$$

Similarmente, si $k \leq -1$, la integral de todos los términos es 0, excepto aquel de la segunda serie con $n = -k$ y, por tanto

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz = 2\pi i b_{-k}$$

Esto es,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-z_0)^{n-1} \, dz \qquad \text{para } n \geq 1$$

Así, los coeficientes a_n, b_n están determinados en forma única por f y, por tanto, la demostración está completa. ■

Singularidades aisladas: clasificación de puntos singulares

Queremos examinar con más detalle el caso especial del teorema de la expansión de Laurent cuando $r_1 = 0$. En este caso, f es analítica en $\{z \mid 0 < |z - z_0| < r_2\}$, que es la r_2-vecindad agujerada de z_0 (véase la figura 3.3.3) y decimos que z_0 es una *singularidad aislada* de f. Así, podemos expander f en una serie de Laurent, como sigue:

$$f(z) = \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \quad (3)$$

(válido para $0 < |z - z_0| < r_2$).

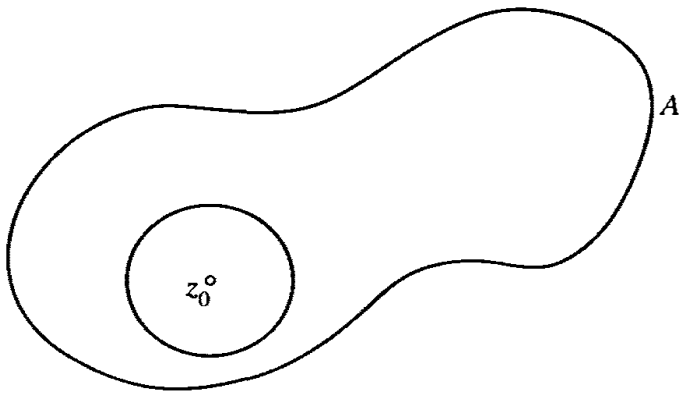


Figura 3.3.3. Singularidad aislada.

Definición 3.3.2. *Si* f *es analítica en una región* A *que contiene alguna* ε*-vecindad agujerada de* z_0*, entonces* z_0 *es llamada una* ***singularidad aislada****. (Así, la expansión de Laurent precedente (ecuación* (3)*) es válida en tal* ε*-vecindad agujerada.)*

Si z_0 *es una singularidad aislada de* f *y si todos los* b_n*, excepto un número finito, en la ecuación* (3) *son cero, entonces* z_0 *es llamado un* ***polo*** *de* f*. Si* k *es el mayor entero tal que* $b_k \neq 0$, z_0 *es llamado un* ***polo de orden*** k*. (Para enfatizar que* $k \neq \infty$*, algunas veces decimos "un polo de orden finito* k*".) Si* z_0 *es un polo de primer orden, también decimos que es un* ***polo simple****. Si un número infinito de* b_k *es distinto de cero,* z_0 *es llamada una* ***singularidad esencial****. (Algunas veces esta* z_0 *es llamada un polo de orden infinito.) "Polo", significará siempre un polo de orden finito.*

Llamaremos a b_1*, el* ***residuo*** *de* f *en* z_0.

Si todos los b_k *son cero, decimos que* z_0 *es una* ***singularidad removible****.*

Una función que es analítica en una región A*, excepto para los polos en* A*, es llamada* ***meromorfa en*** A*. La frase "*f *es una función meromorfa" significa que* f *es meromorfa en* **C**.

Por lo tanto, f tiene un polo de orden k si su expansión de Laurent tiene la forma

$$\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

La parte

$$\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

que es llamada a menudo la *parte principal* de f en z_0, nos dice justamente "que tan singular" es f en z_0.

Si f tiene una singularidad removible, entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

es una serie de potencias convergente. Así, si hacemos $f(z_0) = a_0$, f será analítica en z_0. En otras palabras, *f tiene una singularidad removible en z_0* si *f puede definirse en z_0, de tal forma que f resulte analítica en z_0*.

Como veremos en el capítulo 4, encontrar la expansión de Laurent no es tan importante como poder calcular el residuo b_1, y este cálculo puede hacerse a menudo sin calcular la serie de Laurent. Las técnicas para hacer esto serán estudiadas en la sección 4.1. La importante propiedad de b_1, no compartida con los otros coeficientes, se establece en el siguiente resultado.

Proposición 3.3.3. *Sea* f *analítica en una región* A *que tiene una singularidad aislada en* z_0, *con residuo* b_1 *en* z_0. *Si* γ *es cualquier círculo alrededor de* z_0 *en* A *cuyo interior, excepto para el punto* z_0, *está en* A, *entonces*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = b_1 \cdot 2\pi i \tag{4}$$

Esta conclusión se sigue a partir de la fórmula para b_1 en el teorema de expansión de Laurent. El punto es que podemos calcular b_1 por otros métodos que la ecuación (4) y, por lo tanto, podemos usar la ecuación (4) para calcular $\int_\gamma f$. Por ejemplo, si $z \neq 0$, entonces

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

(¿por qué?) y así $e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y $b_1 = 1$. Por tanto, $\int_\gamma e^{1/z} dz = 2\pi i$ para cualquier círculo γ alrededor del 0.

La siguiente proposición caracteriza los diferentes tipos de singularidades.

Proposición 3.3.4. *Sea* f *analítica en una región* A *con una singularidad aislada en* z_0.

(i) z_0 *es una singularidad removible si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1) f *es acotada en una vecindad agujerada de* z_0.
2) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existe*

   o

3) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

(ii) z_0 *es un polo simple si* $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$ *existe y es diferente de 0. Este límite es igual al residuo de* f *en* z_0.

(iii) z_0 *es un polo de orden* $\leq k$ (*o posiblemente una singularidad removible*) *si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1) *Existen una constante* $M > 0$ *y un entero* $k \geq 1$ *tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^k}$$

en una vecindad agujerada de z_0

2) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$

3) $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ *existe*

(iv) z_0 *es un polo de orden* ≥ 1 *si existe una función analítica* ϕ, *definida en una vecindad* U *de* z_0, *tal que* $U \setminus \{z_0\} \subset A$, $\phi(z_0) \neq 0$, *y* $f(z) = \phi(z)/(z - z_0)^k$ *para toda* $z \in U$, $z \neq z_0$.

Demostración

(i) Si z_0 es una singularidad removible, tenemos entonces que en una vecindad agujerada de z_0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Ya que esta serie representa una función analítica en una vecindad no agujerada de z_0, obviamente se satisfacen las condiciones 1, 2 y 3. Cada una de las condiciones 1 y 2, implican obviamente la condición 3 y, por tanto, sólo resta mostrar que la condición 3 implica que z_0 es una singularidad removible para f. Debemos demostrar que cada b_k en la expansión de Laurent alrededor de z_0 es 0. Ahora bien

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k-1} \, d\zeta$$

donde γ_r es un círculo en A cuyo interior está en A (excepto por z_0). Sea $\varepsilon > 0$ dada. Por la condición 3, podemos escoger $r > 0$ con $r < 1$, tal que en γ_r, tenemos la estimación $|f(\zeta)| < \varepsilon / |\zeta - z_0| = \varepsilon / r$. Entonces

$$\begin{aligned} |b_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} |f(\zeta)| |\zeta - z_0|^{k-1} |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{r} r^{k-1} \int_{\gamma_r} |d\zeta| = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{r} r^{k-1} 2\pi r \\ &= \varepsilon r^{k-1} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $|b_k| \leq \varepsilon$. Ya que ε fue arbitrario, $b_k = 0$. Usaremos (iii) para demostrar (ii), así que (iii) se demuestra en seguida.

(iii) Esta afirmación se sigue al aplicar (i) a la función $(z - z_0)^k f(z)$, la cual es analítica en A. (El estudiante debe escribir los detalles.)

(ii) Si z_0 es un polo simple, entonces, en una vecindad agujerada de z_0,

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{b_1}{z - z_0} + h(z)$$

donde h es analítica en z_0 y donde $b_1 \neq 0$, por la expansión de Laurent. Así, $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} [b_1 + (z - z_0)h(z)] = b_1$. Por otro lado, suponga que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z)$ existe y es diferente de 0. Por lo tanto, $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^2 f(z) = 0$. Por el resultado obtenido en (iii), esto muestra que

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \frac{b_1}{z - z_0} + h(z)$$

para alguna constante b_1 y una función analítica h, donde b_1 puede ser o no ser 0. Pero entonces $(z - z_0)f(z) = b_1 + (z - z_0)h(z)$ y en consecuencia $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = b_1$. Así, en efecto, $b_1 \neq 0$ y, por lo tanto, f tiene un polo simple en z_0.

(iv) Por definición, z_0 es un polo de orden $k \geq 1$ si

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

$$= \frac{1}{(z - z_0)^k}\left[b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+k}\right]$$

(donde $b_k \neq 0$). Esta expansión es válida en una vecindad agujerada de z_0. Sea $\phi(z) = b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \cdots + b(z - z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+k}$. Entonces $\phi(z)$ es analítica en la correspondiente vecindad agujerada (ya que es una serie de potencias convergente) y $\phi(z_0) = b_k \neq 0$. Recíprocamente, dada tal ϕ, podemos desandar este camino para mostrar que z_0 es un polo de orden $k \geq 1$. ■

Ceros de orden k

Sea f analítica en una región A y sea $z_0 \in A$. Decimos que f tiene un 0 *de orden* k en z_0 si $f(z_0) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

De la expansión de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

vemos que f tiene un 0 de orden k si, en una vecindad de z_0, podemos escribir $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) = f^{(k)}(z_0)/k! \neq 0$. De la proposición 3.3.4 (iv), haciendo $\phi(z) = g(z)^{-1}$, obtenemos lo siguiente.

Proposición 3.3.5. *Si* f *es analítica en una vecindad de* z_0, *entonces* f *tiene un* 0 *de orden* k *en* z_0 *si* 1/f(z) *tiene un polo de orden* k *en* z_0. *Si* h *es analítica y* $h(z_0) \neq 0$, *entonces* h(z)/f(z) *también tiene un polo de orden* k *en* z_0.

Obviamente, si z_0 es un 0 de f y f no es idénticamente igual a cero en una vecindad de z_0, entonces z_0 tiene orden finito k. (De otra manera, la serie de Taylor sería idénticamente 0.)

Singularidades esenciales

En los ejemplos prácticos, muchas singularidades son polos. No es difícil mostrar que si $f(z)$ tiene un polo en z_0 (de orden finito k) entonces $|f(z)| \to \infty$ conforme $z \to z_0$ (véase el ejercicio 7). Sin embargo, en el caso de una singularidad esencial, $|f|$ no se aproximará, en general, a ∞ conforme $z \to z_0$. De hecho, existe el siguiente resultado, demostrado por C. E. Picard en 1879.

Teorema de Picard 3.3.6. *Sea* f *con una singularidad esencial en* z_0 *y sea* U *cualquier vecindad agujerada de* z_0 *(arbitrariamente pequeña). Entonces, para toda* $w \in \mathbf{C}$, *excepto quizá en algún valor, la ecuación* $f(z) = w$ *tiene una infinidad de soluciones* z *en* U.

Este teorema corresponde en realidad a un curso más avanzado.[4] Sin embargo, podemos fácilmente demostrar una versión más simple.

Teorema de Casorati-Weierstrass 3.3.7. *Sea* f *con una singularidad esencial en* z_0 *y sea* $w \in \mathbf{C}$. *Entonces, existen* $z_1, z_2, z_3, \ldots$ *tales que* $z_n \to z_0$ y $f(z_n) \to w$.

Demostración. Si la afirmación fuera falsa, habría una vecindad agujerada U de z_0 y una $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ para toda $z \in U$ (¿por qué?). Sea $g(z) = 1/[f(z) - w]$. De modo que g es analítica y acotada en U, así que z_0 es una singularidad removible, por la proposición 3.3.4(i). Sea k el orden del 0 de g en z_0 (hágase $k = 0$ si $g(z_0) \neq 0$.) (El orden debe ser finito porque, de otra manera, como se mencionó previamente, por el teorema de Taylor, g debería ser 0 en una vecindad de z_0, mientras que g nunca es cero en U.) Así, $f(z) = w + 1/g(z)$, o es analítica (si $k = 0$), o tiene un polo de orden k, por la proposición 3.3.5. Esta conclusión contradice nuestra suposición de que f tiene una singularidad esencial. ■

Para otra interpretación de este resultado, véase el ejercicio 20.

Ejemplos resueltos

3.3.8. *Encuentre la expansión de Laurent de las siguientes funciones (con* z_0, r_1 y r_2 *como se indican*):

a) $(z + 1)/z$; $z_0 = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$
b) $z/(z^2 + 1)$; $z_0 = i$, $r_1 = 0$, $r_2 = 2$

[4] Véase E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Nueva York, Oxford University Press, 1939, página 283.

Solución

a) $$\frac{z+1}{z} = \frac{1}{z} + 1$$

Esta ecuación está en la forma de la expansión de Laurent y, por lo tanto, por la unicidad, es igual a ella; esto es, $b_k = 0$ para $k > 1$, $b_1 = 1$, $a_0 = 1$, $a_k = 0$ para $k \geq 1$.

b) Una expansión en fracciones parciales nos da

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z+i}$$

Puesto que $1/(z+i)$ es analítica cerca de $z = i$, puede ser expandida como una serie de potencias en $z - i$, usando la serie geométrica (véase la figura 3.3.4):

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i+(z-i)} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-i}{2i}\right)}$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}2^{-n-1}(z-i)^n$$

Así, la expansión de Laurent es

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}(z-i)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}2^{-n-2}(z-i)^n$$

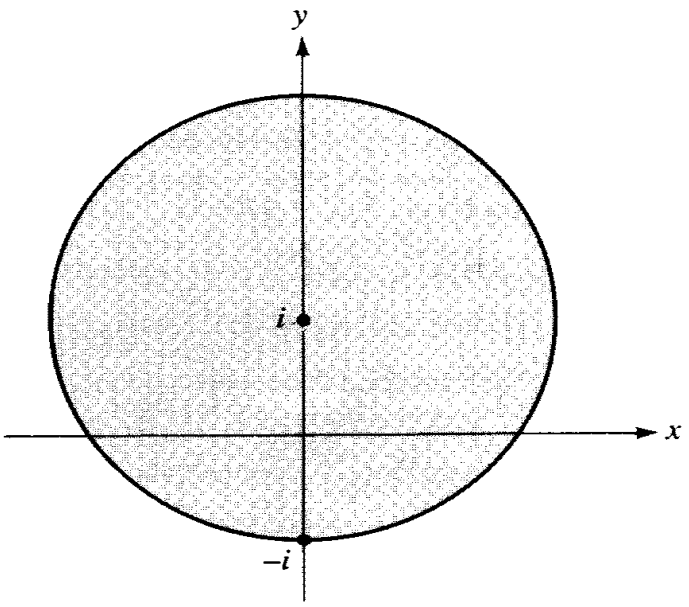


Figura 3.3.4. Región de convergencia para la expansión de $1/(z+i)$.

3.3.9. *Determine el orden de los polos de cada una de las siguientes funciones en las singularidades indicadas:*

a) $(\cos z)/z^2$, $z_0 = 0$ *b*) $(e^z - 1)/z^2$, $z_0 = 0$
c) $(z + 1)/(z - 1)$, $z_0 = 0$

Solución

a) z^2 tiene un 0 de orden 2 y $\cos 0 = 1$, así que $(\cos z)/z^2$ tiene un polo de orden 2, por la proposición 3.3.5.
Alternativamente,

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \cdots$$

y, por lo tanto, otra vez el polo es de orden 2.
b) El numerador se anula en 0 y, por tanto, no se aplica la proposición 3.3.5. Pero

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right) - 1\right] = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$$

y, en consecuencia, el polo es simple.
c) No hay ningún polo pues la función es analítica en 0.

3.3.10. *Determine cuáles de las siguientes funciones tienen singularidades removibles en* $z_0 = 0$:

a) $(\operatorname{sen} z)/z$ *b*) e^z/z
c) $(e^z - 1)^2/z^2$ *d*) $z/(e^z - 1)$

Solución

a) $\lim_{z \to 0} z \cdot (\operatorname{sen} z)/z = \lim_{z \to 0} \operatorname{sen} z = 0$ y, por lo tanto, la singularidad es removible (por la proposición 3.3.4(i).
Alternativamente,

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

b) $\lim_{z \to 0} z \cdot e^z/z = 1$, así que el polo es simple (la singularidad no es removible).
c) $(e^z - 1)/z$ tiene una singularidad removible, ya que $\lim_{z \to 0} z \cdot (e^z - 1)/z = 0$, y, por tanto, $[(e^z - 1)/z]^2$ también tiene una singularidad removible.
d) $\lim_{z \to 0} z/(e^z - 1) = 1$, pues $(e^z - 1)/z = 1 + z/2 + z^2/3! + \cdots \to 1$ conforme $z \to 0$.
Por lo tanto, $z/(e^z - 1)$ tiene una singularidad removible.

3.3.11. *Muestre que si* f *y* g *son analíticas en* z_0, *y* g *tiene un* 0 *de orden* n *y* f *tiene un* 0 *de orden* k, *con* $k \geq n$, *entonces* g/f *tiene un polo de orden* $k - n$. *¿Qué pasa si* $k < n$?

Solución. Podemos factorizar la serie de Taylor para f y g centradas en z_0, y obtener funciones analíticas F y G tales que $f(z) = (z - z_0)^K F(z)$ y $g(z) = (z - z_0)^n G(z)$ para

puntos z cercanos a z_0, y con $F(z_0) \neq 0$ y $G(z_0) \neq 0$. Así, $f(z)/g(z) = (z - z_0)^{k-n}F(z)/G(z)$. La primera derivada de f/g que no tiene un factor de $(z - z_0)$ es $(f/g)^{(k-n)}$, y

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(k-n)}(z_0) = (k-n)!\ \frac{F(z_0)}{G(z_0)} \neq 0$$

Por lo tanto, f/g tiene un cero de orden $k - n$ en z_0, por 3.3.5. Si $k < n$ entonces un argumento similar muestra que g/f tiene un cero de orden $n - k$.

Ejercicios

1. Encuentre la expansión de Laurent de las siguientes funciones, alrededor de $z_0 = 0$, en las regiones indicadas:

a) $\operatorname{sen}(1/z)$, $0 < |z| < \infty$ *b)* $1/z(z+1)$, $0 < |z| < 1$
c) $z/(z+1)$, $0 < |z| < 1$ *d)* e^z/z^2, $0 < |z| < \infty$

2. Encuentre la expansión en series de Laurent de $1/z(z+1)$ alrededor de $z_0 = 0$, válida en la región $1 < |z| < \infty$.

3. Encuentre la expansión en series de Laurent de $z/(z+1)$ alrededor de $z_0 = 0$, válida en la región $1 < |z| < \infty$.

4. Expanda $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en una serie de Laurent, en las siguientes regiones:

a) $0 < |z| < 1$ *b)* $1 < |z| < 2$

5. Sean γ_1 y γ_2 dos círculos concéntricos alrededor de z_0 de radios R_1 y R_2, $R_1 < R_2$. Si z está entre los círculos y f es analítica en una región que contiene a γ_1, γ_2, y a la región comprendida entre ellas, muestre que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

6. Suponga que la serie de Laurent de $f(z) = e^{1/z}/(1-z)$, válida para $0 < |z| < 1$, es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Calcule c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1 y c_2.

7. Sea f con un polo en z_0 de orden $k \geq 1$. Demuestre que $f(z) \to \infty$ conforme $z \to z_0$. (*Sugerencia*: use la parte (iv) de la proposición 3.3.4.)

8. Demuestre, usando series de Taylor, la siguiente versión compleja de la *regla de l'Hôpital*: Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas, ambas con ceros de orden k en z_0. Entonces $f(z)/g(z)$ tiene una singularidad removible, y

$$\lim_{z \to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$$

9. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen singularidades removibles en los puntos indicados:

a) $\dfrac{\cos(z-1)}{z^2}$, $z_0 = 0$ *b)* $z/(z-1)$, $z_0 = 1$
c) $f(z)/(z - z_0)^k$ si f tiene un 0 de orden k en z_0.

10. Si f es analítica en una región que contiene a un círculo γ y a su interior, y tiene un 0 de orden 1 únicamente en z_0 en el interior o sobre γ, muestre que

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}\, dz$$

(*Sugerencia*: haga $f(z) = (z - z_0)\,\phi(z)$ y aplique la fórmula integral de Cauchy.)

11. Encuentre los primeros términos en la expansión de Laurent de $1/(e^z - 1)$ alrededor de $z = 0$. (*Sugerencia*: muestre que, puesto que $1/(e^z - 1)$ tiene un polo simple

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Luego multiplique en cruz (usando el ejemplo resuelto 3.2.13) y resuelva para b_1, a_0, a_1.)

12. Para f como en el teorema de expansión de Laurent 3.3.1, muestre que si $r_1 < r < r_2$, entonces

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2\, d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 r^{-2n}$$

13. Use la sugerencia del ejercicio 11, para encontrar los primeros términos en la expansión de Laurent de $\cot z = (\cos z)/(\operatorname{sen} z)$ alrededor de $z = 0$.

14. Defina una rama de $\sqrt{z^2 - 1}$ que sea analítica, excepto para el segmento $[-1,1]$ en el eje real. Determine los primeros términos en la expansión de Laurent, que es válida para $|z| > 1$.

15. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

converge para $|z - z_0| > R$, demuestre que esta serie necesariamente converge *uniformemente* en el conjunto $F_r = \{z \text{ tal que } |z - z_0| > r\}$ para $r > R$. (*Sugerencia*: adapte el lema de Abel Weierstrass y el criterio M de Weierstrass a este caso.)

16. Suponga que f tiene un 0 en z_0 de multiplicidad k. Muestre que el residuo de f'/f en z_0, es k.

17. Discuta las singularidades de $1/\cos(1/z)$.

18. Evalúe $\int_\gamma z^n e^{1/z}\, dz$, donde γ es el círculo de radio 1 centrado en 0 y recorrido una vez en la dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj.

19. Encuentre los residuos de las siguientes funciones, en los puntos indicados:

a) $1/(z^2 - 1), z = 1$
b) $z/(z^2 - 1), z = 1$
c) $(e^z - 1)/z^2, z = 0$
d) $(e^z - 1)/z, z = 0$

20. *a*) Sea z_0 una singularidad esencial de f y sea U una vecindad agujerada de z_0. Demuestre que la cerradura de $f(U)$ es $\mathbf{C}$.

b) Suponga el teorema de Picard (3.3.6) y derive el "teoremita de Picard": La imagen de una función entera no constante, es todo $\mathbf{C}$, excepto posiblemente por a lo más un punto.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. Encuentre la expansión de Taylor de $\log z$ (la rama principal del logaritmo) alrededor de $z = 1$.
2. ¿Dónde están los polos de $1/\cos z$ y cuáles son sus órdenes?
3. Encuentre la expansión de Laurent de $1/(z^2 + z^3)$ alrededor de $z = 0$.
4. La $2n$-ésima derivada de $f(z) = e^{z^2}$ en $z = 0$, está dada por $(2n)!/n!$. Demuestre esto sin calcular realmente la $2n$-ésima derivada.
5. Expanda $z^2 \operatorname{sen} z^2$ en una serie de Taylor, alrededor de $z = 0$.
6. Si f es analítica y no constante en cualquier conjunto abierto en una región A, demuestre que los ceros de f son *aislados*. (En otras palabras, demuestre que si z_0 es un 0, existe una vecindad de z_0 en la cual no hay otros ceros.)
7. Verifique el teorema de Picard (3.3.6), para la función $e^{1/z}$.
8. Sea $\exp[t(z - 1/z)/2] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)z^n$ la expansión de Laurent para cada $t \in \mathbf{R}$ fija. $J_n(t)$ es llamada la *función de Bessel* de orden n. Muestre que

   $$a)\ J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t \operatorname{sen}\theta - n\theta)\, d\theta \qquad b)\ J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$$

9. Encuentre los radios de convergencia de

   $$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

10. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Si $0 < r < R$, muestre que existe una constante M tal que $|a_n| \le Mr^{-n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
11. Sea f analítica en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Muestre que las expansiones de Laurent de f, válidas en las regiones $\{z \text{ tal que } |z| > 0\}$ y $\{z \text{ tal que } |z| > 1\}$, son la misma.
12. Suponga que f es analítica en el disco unitario abierto $|z| < 1$ y que existe una constante M tal que $|f^{(k)}(0)| \le M^k$ para toda k. Muestre que f puede ser extendida a una función entera.
13. Suponga que f es analítica en una región que contiene el disco unitario $|z| \le 1$, que $f(0) = 0$ y que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Muestre que no existe $z \neq 0$, con $|z| < 1$ y $f(z) = z$. (*Sugerencia*: utilice el lema de Schwarz.)
14. ¿Cuál es el radio de convergencia de la expansión de Taylor de

    $$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+1)(z-2)(z-3)}$$

    cuando se expande alrededor de $z = i$?
15. Evalúe

    $$\int_\gamma \frac{z^2 + e^z}{z(z-3)}\, dz$$

    donde γ es el círculo unitario.
16. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, pero que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge. Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene un

radio de convergencia igual a 1. Responda a la misma pregunta, pero suponga ahora que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y que $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|$ diverge.

17. Encuentre la expansión de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 1)}$$

que es válida para

a) $0 < |z| < 1$ *b*) $1 < |z|$

18. Encuentre la expansión de Laurent de $f(z) = 1/(1 + z^2) + 1/(3 - z)$, válida en cada una de las siguientes regiones:

a) $\{z$ tal que $|z| < 1\}$ *b*) $\{z$ tal que $1 < |z| < 3\}$
c) $\{z$ tal que $|z| > 3\}$

19. Sea f entera y sea $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con radio de convergencia R. ¿Puede usted encontrar otra serie de potencias $\Sigma\, b_n z^n$ con radio de convergencia $\geq R$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)$$

20. Sea f entera y suponga que $f(z) \to \infty$ conforme $z \to \infty$. Muestre que f es un polinomio. (*Sugerencia*: muestre que $f(1/z)$ tiene un polo de orden finito en $z = 0$.

21. Suponga que f tiene una singularidad aislada en z_0. Muestre que si $f(z)$ es acotada en una vecindad agujerada de z_0, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe.

22. Sea f analítica en $|z| < 1$. Muestre que la desigualdad $|f^{(k)}(0)| \geq k!5^k$ no es válida para toda k.

23. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\, d\theta$$

24. Sea $f(z)$ una función entera que satisface estas dos condiciones:

a) $f'(z) = f(z)$ *b*) $f(0) = 1$

Muestre que $f(z) = e^z$. Si se remplaza (a) por $f(z_1 + z_2) = f(z_1)\, f(z_2)$, muestre que $f(z) = e^{az}$ para alguna constante a.

25. Determine el orden de los polos de las siguientes funciones en sus singularidades:

a) $\dfrac{e^z(z-3)}{(z-1)(z-5)}$ *b*) $(e^z - 1)/z$
c) $(e^z - 2)/z$ *d*) $(\cos z)/(1 - z)$

26. Identifique las singularidades de $f(z) = z/(e^z - 1)\,(e^z - 2)$ y clasifique a cada una como removible, esencial, o un polo de algún orden específico.

27. Evalúe $\int_\gamma e^z/z^2\, dz$ donde γ es el círculo unitario.

28. *a*) Muestre mediante un ejemplo, que el teorema del valor medio para funciones analíticas no es verdadero. En otras palabras, sea f definida en una región A y sea $z_1, z_2 \in A$

tales que la línea recta que une z_1 y z_2, está en A. Demuestre que no necesariamente existe z_0 en esta línea recta tal que

$$f'(z_0) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}$$

b) Sin embargo, si $|f'(z_0)| \leq M$ en esta línea, demuestre que $|f(z_1) - f(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|$; en general, que si $|f'(z_0)| \leq M$ sobre una curva γ que une z_1 con z_2, entonces $|f(z_1) - f(z_2)| \leq Ml(\gamma)$.

29. Suponga que $f(z) = (z^2 - 1)/[\cos(\pi z) + 1]$ tiene la expansión en series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cerca de $z = 0$.

a) Calcule a_0, a_1 y a_2.
b) Identifique las singularidades de f y clasifíquelas de acuerdo a si son esenciales o un polo de algún orden específico.
c) ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie?

30. Si $f(z) = f(-z)$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es convergente en un disco $|z| < R$, $R > 0$, muestre que $a_n = 0$ para $n = 1, 3, 5, 7$.

31. Si f es entera y acotada en el eje real, entonces f es constante. Demuestre o dé un contraejemplo.

32. Sea f analítica en una región A que contiene $\{z \text{ tal que } |z - z_0| < R\}$ de tal manera que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!}$$

Sea $R_n(z)$ igual a $f(z)$ menos la n-ésima suma parcial. (R_n es, por tanto, el residuo.) Sea $\rho < R$ y sea M el máximo de f en $\{z \text{ tal que } |z - z_0| = R\}$. Muestre $|z - z_0| \leq \rho$ implica que

$$|R_n(z)| \leq M\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \rho/R}$$

33. Los *números de Bernoulli* B_n, están relacionados con los coeficientes de la serie de potencias de $z/(e^z - 1)$, por medio de la fórmula

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

a) Determine el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

b) Usando la fórmula integral de Cauchy y el contorno $|z| = 1$, encuentre, para B_n, una expresión integral de la forma

$$B_n = \int_0^{2\pi} g_n(\theta)\, d\theta$$

(para funciones apropiadas $g_n(\theta)$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

34. Los *polinomios de Legendre* $P_n(\alpha)$ se definen como los coeficientes de z_n en el desarrollo de Taylor

$$(1 - 2\alpha z + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\alpha) z^n$$

Demuestre que $P_n(\alpha)$ es un polinomio de grado n y encuentre P_1, P_2, P_3, P_4.

35. Encuentre el radio de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$.

36. Demuestre

a) $\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{z^n e^{zt}}{n! t^n} \frac{dt}{1}$ donde γ es el círculo unitario.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2z \cos\theta} d\theta$

37. Encuentre una serie de potencias que resuelve la ecuación funcional $f(z) = z + f(z^2)$ y muestre que existe sólo una serie de potencias que resuelve la ecuación con $f(0) = 0$.

38. ¿Cuál es el error en el siguiente argumento? Considere

$$f(z) = \cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots$$

Note que

$$z + z^2 + \cdots = \frac{z}{1 - z}$$

siempre que

$$1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{-z}{1 - z}$$

Por lo tanto, $f(z) = 0$. ¿Es f, en efecto, la función 0?

39. Suponga que f es una función entera y que $|f^{(k)}(0)| \leq 1$ para toda $k \geq 0$. Muestre que $|f(z)| \leq e^{|z|}$ para toda $z \in \mathbf{C}$.

40. Sea

$$f(z) = \frac{(z-1)^2 (z+3)}{1 - \operatorname{sen}(\pi z/2)}$$

a) Encuentre todas las singularidades de f e identifique cada una de acuerdo a si es una singularidad removible, un polo (dé el orden) o una singularidad esencial.

b) Si $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ es la expansión de Taylor de f centrada en 0, encuentre a_0, a_1 y a_2.

c) ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie en *b*?

4

Cálculo de residuos

Este capítulo se centra en el teorema del residuo, el cual establece que la integral de una función analítica f alrededor de un contorno cerrado, es igual a $2\pi i$ veces la suma de los residuos de f dentro del contorno. Vamos a usar este teorema en nuestra primera aplicación importante del análisis complejo, la evaluación de integrales definidas. A fin de que el estudiante gane una amplia facilidad en el manejo de los residuos, el capítulo empieza con las técnicas para calcular residuos de funciones en singularidades aisladas.

4.1. CÁLCULO DE RESIDUOS

Recordemos, de la sección 3.3, que si f tiene una singularidad aislada en z_0, entonces f admite una expansión de Laurent que es válida en una vecindad agujerada de z_0:

$$f(z) = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

donde b_1 es llamado el *residuo* de f en z_0. Esto se escribe

$$b_1 = \text{Res}\,(f, z_0)$$

Queremos desarrollar técnicas para calcular el residuo sin tener que encontrar la expansión de Laurent. Por supuesto, si se conoce la serie de Laurent, no hay problema. Por ejemplo, ya que

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

$f(z) = e^{1/z}$ tiene residuo 1 en $z_0 = 0$.

El lector debe tener en mente lo siguiente, cuando trate con residuos: el residuo en z_0 es simplemente el coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent de la función, para una región anular $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ cerca de z_0. Cualquiera de los trucos aprendidos en el capítulo anterior para calcular esto, nos puede ayudar. Esta sección se concentra en obtener fórmulas mecánicas que siempre funcionarán pero algunas veces un poco de reflexión producirá un truco que sea más fácil. (Esto se ilustra en algunos de los ejemplos resueltos.) Es particularmente importante el caso de un polo (en contraste a una singularidad esencial). Para este caso, tenemos bastantes técnicas directas que son fáciles de aplicar si el orden del polo no es demasiado grande.

Si tenemos una función f definida en una región A con una singularidad aislada en z_0, entonces procedemos de la siguiente manera para encontrar el residuo. Primero decidimos si podemos encontrar fácilmente los primeros términos en la expansión de Laurent. En tal caso, el residuo de f en z_0, será el coeficiente de $1/(z - z_0)$ en la expansión. Si no es así, entonces propondremos un orden para la singularidad, verificándolo de acuerdo a las reglas que serán desarrolladas en esta sección (algunas reglas ya se desarrollaron en la proposición 3.3.4) y calculamos el residuo de acuerdo a esas reglas. (Las reglas se resumen en la tabla 4.1.1, véase la página 269.) Si tenemos alguna duda acerca del orden que propusimos, debemos proceder sistemáticamente, proponiendo primero una singularidad removible, luego un polo simple, y así sucesivamente, corroborando en la tabla 4.1.1, hasta que obtengamos una respuesta verificada.

Singularidades removibles

Sea f analítica en una vecindad agujerada $U\backslash\{z_0\}$ de z_0. Se mostró en la sección 3.3, que f tiene una singularidad removible si $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$. El siguiente teorema cubre muchos casos importantes y es, algunas veces, el más fácil de usar.

Proposición 4.1.1. *Si* g(z) *y* h(z) *son analíticas y tienen ceros en* z_0 *del mismo orden, entonces* f(z) = g(z)/h(z) *tiene una singularidad removible en* z_0.

Demostración. Por la proposición 3.3.5, podemos escribir $g(z) = (z - z_0)^k \tilde{g}(z)$ donde $\tilde{g}(z_0) \neq 0$; y $h(z) = (z - z_0)^k \tilde{h}$, (z) donde $\tilde{h},(z_0) \neq 0$ y $\tilde{g}$ y $\tilde{h}$ son analíticas y distintas de 0 en z_0. Por lo tanto, $f(z) = \tilde{g}(z)/\tilde{h}(z)$ es analítica en z_0. ■

Del mismo modo si g tiene un 0 en z_0 de orden mayor que h, entonces g/h tiene una singularidad removible en z_0.

Ejemplos

(i) $e^z/(z - 1)$ no tiene una singularidad en $z_0 = 0$.
(ii) $(e^z - 1)/z$ tiene una singularidad removible en 0, porque $e^z - 1$ y z tienen ceros de orden 1. (Ellas se anulan pero sus derivadas no.)
(iii) $z^2/\text{sen}^2 z$ tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$, porque tanto el numerador como el denominador tienen ceros de orden 2. ▼

La discusión precedente se resume en las líneas 1 y 2 de la tabla 4.1.1.

Polos simples

Por la proposición 3.3.4, si $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$ existe y es distinto de 0, entonces f tiene un polo simple en z_0 y este límite es igual al residuo. Vamos a aplicar este resultado para obtener un método útil para calcular residuos.

Proposición 4.1.2. *Sean* g *y* h *analíticas en* z_0 *y suponga que* $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ *y* $h'(z_0) \neq 0$. *Entonces* $f(z) = g(z)/h(z)$ *tiene un polo simple en* z_0, *y*

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \tag{1}$$

Demostración. Sabemos que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{z - z_0} = h'(z_0) \neq 0$$

por lo tanto

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{h(z)} = \frac{1}{h'(z_0)}$$

Así

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

existe y, en consecuencia es igual al residuo. ■

Demostración alternativa. $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$ implican que $h(z) = \tilde{h}(z)(z - z_0)$ donde $\tilde{h}(z)$ es analítica en z_0 y que $\tilde{h}(z_0) = h'(z_0) \neq 0$. Por lo tanto, podemos escribir $g(z)/h(z) = g(z)/\tilde{h}(z)(z - z_0)$ y $g(z)/\tilde{h}(z)$ es analítica en z_0. Así, existe una serie de Taylor $g(z)/\tilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, donde $a_0 = g(z_0)/\tilde{h}(z_0)$. Por lo tanto $g(z)/\tilde{h}(z)(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1}$ es la expansión de Laurent y $a_0 = g(z_0)/\tilde{h}(z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$ es el residuo. ■

En general, si $g(z)$ tiene un 0 de orden k, y h tiene un 0 de orden l con $l > k$, entonces $g(z)/h(z)$ tiene un polo de orden $l - k$. Para ver esto, escriba $g(z) = (z - z_0)^k \tilde{g}(z)$ y $h(z) = (z - z_0)^l \tilde{h}(z)$, donde $\tilde{g}(z_0) \neq 0$ y $\tilde{h}(z_0) \neq 0$. Así

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^{l-k}}$$

donde $\phi(z) = \tilde{g}(z)/\tilde{h}(z)$, la cual es analítica en z_0 porque $\tilde{h}(z_0) \neq 0$ (y, por tanto, $\tilde{h}(z) \neq 0$

en una vecindad de z_0). De modo que nuestra aseveración se sigue de la proposición 3.3.4. Si $l = k + 1$, tenemos un polo simple y podemos obtener el residuo a partir de la siguiente proposición. Ésta generaliza el resultado precedente.

Proposición 4.1.3. *Suponga que* g(z) *tiene un* 0 *de orden* k *en* z_0, *y que* h(z) *tiene un* 0 *de orden* k + 1. *Entonces,* g(z)/h(z) *tiene un polo simple cuyo residuo está dado por*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = (k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

Demostración. Por el teorema de Taylor y el hecho que $g(z_0) = 0, \ldots, g^{(k-1)}(z_0) \neq 0$, podemos escribir

$$g(z) = \frac{(z-z_0)^k}{k!} g^{(k)}(z_0) + (z-z_0)^{k+1}\,\tilde{g}(z)$$

donde $\tilde{g}$ es analítica. Similarmente,

$$h(z) = \frac{(z-z_0)^{k+1}}{(k+1)!} h^{(k+1)}(z_0) + (z-z_0)^{k+2}\,\tilde{h}(z)$$

Así

$$(z-z_0)\,\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g^{(k)}(z_0)/k! + (z-z_0)\tilde{g}(z)}{h^{(k+1)}(z_0)/(k+1)! + (z-z_0)\tilde{h}(z)}$$

Conforme $z \to z_0$, esto converge (por el teorema del cociente para límites) a

$$(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

lo cual demuestra nuestra aseveración. ■

También pudimos haber demostrado que

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = (k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

usando la regla de l'Hôpital (véase el ejercicio 8, sección 3.3) y observando que tanto $(z-z_0)\,g(z)$ como $h(z)$, son analíticas en z_0, con z_0 un 0 de orden $(k+1)$.

Ejemplos

(i) e^z/z en $z = 0$. En este caso, el 0 no es un 0 de e^z, pero es un 0 de primer orden de z, así que el residuo en 0 es $1 \cdot e^0/1 = 1$. Claramente, también se aplica la proposición 4.1.2.

(ii) $e^z/$ sen z en 0, e^z no es diferente de 0 en el punto $z = 0$, y dado que cos 0 = 1, 0 es un 0 de primer orden de sen z. Por lo tanto, el residuo es $e^0/\cos 0 = 1$.

(iii) $z/(z^2 + 1)$ en $z = i$. Aquí, $g(z) = z$, $h(z) = z^2 + 1$. Por lo tanto, $g(i) = i \neq 0$, y $h(i) = 0$, $h'(i) = 2i \neq 0$. Así que el residuo en i es $g(i)/h'(i) = \frac{1}{2}$.

(iv) $z/(z^4 - 1)$ en $z = 1$. Aquí $g(z) = z$ y $h(z) = z^4 - 1$. Así $g(1) = 1 \neq 0$ y $h(1) = 0$, $h'(1) = 4 \neq 0$ y, por lo tanto, el residuo es $\frac{1}{4}$.

(v) $z/(1 - \cos z)$ en $z = 0$. Aquí $g(0) = 0$ y $g'(z) = 1 \neq 0$, por lo tanto, el 0 es un 0 simple de g. También $h(0) = 0$, $h'(0) = \text{sen } 0 = 0$ y $h''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$, así que el 0 es un cero doble de h. Por ende, de la ecuación (2) (véase también la línea 5 de la tabla 4.1.1), el residuo en 0 es

$$2 \cdot \frac{g'(0)}{h''(0)} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2 \quad \blacktriangledown$$

Polos dobles

Conforme el orden de los polos crece, las fórmulas resultan más complicadas y se vuelve más laborioso obtener los residuos. Sin embargo, para polos de segundo orden, la situación es aún relativamente simple. Probablemente, la fórmula más útil para encontrar el residuo en este caso, es la ecuación (3) en el siguiente resultado.

Proposición 4.1.4. *Sean* g *y* h *analíticas en* z_0 *y sean* $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$ *y* $h''(z_0) \neq 0$. *Entonces* g(z)/h(z) *tiene un polo de segundo orden en* z_0 *y el residuo es*

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2} \tag{3}$$

Demostración. Ya que g no tiene ceros y h tiene un 0 de segundo orden, sabemos que el polo es de segundo orden (véase la observación precedente a la proposición 4.1.3). Así que podemos escribir la serie de Laurent en la forma

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

y nosotros queremos calcular b_1. Podemos escribir

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots$$

y

$$h(z) = \frac{h''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{h'''(z_0)}{6}(z - z_0)^3 + \cdots$$

Por lo tanto,

$$g(z) = h(z)\left[\frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\right]$$

$$= \left[\frac{h''(z_0)}{2} + \frac{h'''(z_0)}{6}(z-z_0) + \cdots\right] \cdot [b_2 + b_1(z-z_0) + a_0(z-z_0)^2 + \cdots]$$

Podemos multiplicar estas dos series de potencias convergentes como si fueran polinomios (véase el ejemplo resuelto 3.2.13). El resultado es

$$g(z) = \frac{b_2 h''(z_0)}{2} + \left[\frac{b_2 h'''(z_0)}{6} + \frac{b_1 h''(z_0)}{2}\right](z-z_0) + \cdots$$

Ya que estas dos series de potencias son iguales, podemos concluir que los coeficientes son iguales. Por lo tanto,

$$g(z_0) = \frac{b_2 h''(z_0)}{2} \quad \text{y} \quad g'(z_0) = \frac{b_2 h'''(z_0)}{6} + \frac{b_1 h''(z_0)}{2}$$

Resolviendo para b_1 se produce el resultado.■

NOTA. Para un polo de segundo orden de la forma $g(z)/(z-z_0)^2$, donde $g(z_0) \neq 0$, la ecuación (3) se simplifica a $g'(z_0)$.

El siguiente resultado puede demostrarse de una forma análoga.

Proposición 4.1.5. *Sean* g *y* h *analíticas en* z_0 *y sean* $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) = 0$, *y* $h'''(z_0) \neq 0$. *Entonces* g/h *tiene un polo de segundo orden en* z_0 *con residuo*

$$\frac{3g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3}{2}\frac{g'(z_0)\, h^{(iv)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2} \tag{4}$$

La demostración se le deja al estudiante en el ejercicio 4.

Ejemplos

(i) $e^z/(z-1)^2$ tiene un polo de segundo orden en $z_0 = 1$; aquí, escogemos $g(z) = e^z$, $h(z) = (z-1)^2$ y observamos que $g(1) = e \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 2(z_0 - 1) = 0$, $h''(z_0) = 2 \neq 0$. Por lo tanto, por la ecuación (3), el residuo en 1 es $(2 \cdot e)/2 - \frac{2}{3} \cdot (e \cdot 0)/2^2 = e$.

(ii) $2(e^z - 1)/\text{sen}^3 z$ con $z_0 = 0$. Aquí, escogemos $g(z) = e^z - 1$, $h(z) = \text{sen}^3 z$ y obsérvese entonces que $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$, $h(0) = 0$, $h'(0) = 3\,\text{sen}^2 0 \cdot \cos 0 = 0$,

$h''(z) = 6 \operatorname{sen} z \cdot \cos^2 z - 3 \operatorname{sen}^3 z$ (que es igual a cero en 0) y finalmente $h'''(z) = 6 \cos^3 z - 12 \operatorname{sen}^2 z \cdot \cos z - 9 \operatorname{sen}^2 z \cdot \cos z$ (que es 6 en $z = 0$). Calculamos también $h^{(iv)}(0) = 0$. Así, por la ecuación (4), el residuo es $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. ▼

Polos de orden superior

Para polos de orden mayor que 2, podemos desarrollar fórmulas de la misma manera en que desarrollamos las precedentes, pero serán mucho más complicadas. En lugar de eso, se pueden usar dos métodos generales. El primero de ellos se describe en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.6. *Suponga que f tiene una singularidad aislada en* z_0 *y sea* k *el más pequeño entero* ≥ 0, *tal que* $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ *existe. Entonces* $f(z)$ *tiene un polo de orden* k *en* z_0 *y si hacemos* $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$ *entonces* ϕ *puede ser definida en forma única en* z_0, *de modo que* ϕ *sea analítica en* z_0 *y*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \tag{5}$$

Demostración. Ya que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ existe, $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0, por la proposición 3.3.4. Así, en una vecindad de z_0, $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z) = b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \cdots$ y, por tanto

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

Si $b_k = 0$ entonces $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k-1} f(z)$ existe, lo cual contradice la hipótesis acerca de k. Así, z_0 es un polo de orden k. Finalmente, considere la expansión para $\phi(z)$ y diferénciela $k - 1$ veces en z_0, para obtener $\phi^{(k-1)}(z_0) = (k - 1)!\, b_1$. ■

En este teorema, es la ecuación (5) la que es importante en vez del criterio para el orden. Usualmente, es más fácil probar el orden escribiendo (si es posible) $f = g/h$ y mostrando que h tiene un cero de orden igual al del cero de g más k. Entonces tenemos un polo de orden k (como se explicó en el texto precedente a la proposición 4.1.3).

Vamos ahora a suponer que la forma de f hace inconveniente la aplicación de la proposición 4.1.6. (Por ejemplo, considere $e^z/\operatorname{sen}^4 z$ con $z_0 = 0$. Aquí, $k = 4$, ya que el numerador no tiene ceros y el denominador tiene un cero de orden 4.) Existe un método alternativo que generaliza la proposición 4.1.4. Suponga que $f(z) = g(z)/h(z)$ y que $h(z)$ tiene un cero de orden k más que el de g en z_0; por lo tanto, f tiene un polo de orden k. Podemos escribir.

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \rho(z)$$

donde ρ es analítica. Suponga también que z_0 es un cero de orden m para $g(z)$ y un cero de orden $m + k$ para $h(z)$. Entonces

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!}$$

y

$$h(z) = \sum_{n=m+k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!}$$

Así, podemos escribir

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)\,(z - z_0)^n}{n!} = \left[\sum_{n=m+k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}{n!} \right] \cdot \left[\frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \rho(z) \right]$$

Podemos entonces multiplicar el lado derecho de la ecuación como si los factores fueran polinomios (debido al ejemplo resuelto 3.2.13) y comparar los coeficientes de $(z - z_0)^m$, $(z - z_0)^{m+1}$, . . . , $(z - z_0)^{m+k-1}$ para obtener k ecuaciones de $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Finalmente, podemos resolver estas ecuaciones para b_1. Este método puede ser algunas veces más práctico que el de la proposición 4.1.6. Cuando $m = 0$ (esto es, cuando $g(z_0) \neq 0$), puede usarse la fórmula explícita, contenida en la siguiente proposición. (El estudiante debe demostrar este resultado usando el procedimiento que se acaba de describir.)

Proposición 4.1.7. *Sean* g *y* h *analíticas en* z_0, *con* $g(z_0) \neq 0$ *y asuma que* $h(z_0) = 0 = \cdots = h^{(k-1)}(z_0)$ *y* $h^{(k)}(z_0) \neq 0$. *Entonces,* g/h *tiene un polo de orden* k, *y el residuo en* z_0, Res (g/h, z_0) *está dado por*

$$\text{Res}\,(g/h, z_0) = \left[\frac{k!}{h^{(k)}(z_0)} \right]^k \cdot \begin{vmatrix} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & g(z_0) \\ \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & \cdots & 0 & g^{(1)}(z_0) \\ \frac{h^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & \cdots & 0 & \frac{g^{(2)}(z_0)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{h^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!} & \frac{h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!} & \frac{h^{(2k-3)}(z_0)}{(2k-3)!} & \cdots & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \end{vmatrix} \quad (6)$$

donde las barras verticales denotan el determinante de la matriz k × k. *Contenida entre dichas barras.*

Aquí hay algunos ejemplos:

(i) $z^2/[(z-1)^3(z+1)]$ en $z_0 = 1$. El polo es de orden 3. Usamos la ecuación (5). En este caso,

$$\phi(z) = \frac{z^2}{z+1}$$

y por lo tanto,

$$\phi'(z) = \frac{(z+1)\cdot 2z - z^2}{(z+1)^2} = \frac{z^2+2z}{(z+1)^2} = 1 - \frac{1}{(z+1)^2}$$

y

$$\phi''(z) = \frac{2}{(z+1)^3} \quad \text{así que} \quad \phi''(1) = \frac{1}{4}$$

Así, ya que $k = 3$, el residuo es $(1/2)(1/2^2) = 1/8$.

(ii) $e^z/\text{sen}^3 z$ en $z = 0$. Aquí, $k = 3$ y usaremos la ecuación (6), con $g(z) = e^z$ y $h(z) = \text{sen}^3 z$. Necesitamos calcular $h'''(0)$, $h^{(\text{iv})}(0)$ y $h^{(\text{v})}(0)$. Éstas son, mediante el cálculo directo (pero laborioso), $h'''(0) = 6$, $h^{(\text{iv})}(0) = 0$, y $h^{(\text{v})}(0) = -60$; así, $h'''/3! = 1$, $h^{(\text{iv})}/4! = 0$, y $h^{(\text{v})}/5! = -\frac{1}{2}$. También $g^{(l)}(0)/l! = 1/l!$, así que el residuo es, por la ecuación (6),

$$\left(\frac{3!}{6}\right)^3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$$

(La última columna es sustraída de la primera.)

Tabla 4.1.1. Técnicas para encontrar residuos.
En esta tabla g y h son analíticas en z_0 y f tiene una singularidad aislada. Las técnicas más útiles y comunes se indican con un asterisco.

Función	*Criterio*	*Tipo de singularidad*	*Residuo en* z_0
1. $f(z)$	$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$	removible	0
*2. $\frac{g(z)}{h(z)}$	g y h tienen ceros del mismo orden	removible	0

Tabla 4.1.1. (*Continuación.*)

Función	*Criterio*	*Tipo de singularidad*	*Residuo en* z_0
*3. $f(z)$	$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ existe y es $\neq 0$	polo simple	$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
*4. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$	polo simple	$\dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$
5. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	g tiene un cero de orden k, h tiene un cero de orden $k+1$	polo simple	$(k+1)\dfrac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$
*6. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0$ $h(z_0)=0=h'(z_0)$ $h''(z_0)\neq 0$	polo de segundo orden	$2\dfrac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\dfrac{2}{3}\dfrac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}$
*7. $\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$	$g(z_0)\neq 0$	polo de segundo orden	$g'(z_0)$
8. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0=h'(z_0)$ $=h''(z_0)$, $h'''(z_0)\neq 0$	polo de segundo orden	$3\dfrac{g''(z_0)}{h'''(z_0)}-\dfrac{3}{2}\dfrac{g'(z_0)h^{(iv)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2}$
9. $f(z)$	k es el entero más pequeño tal que $\lim_{z\to z_0}\phi(z_0)$ existe, donde $\phi(z)=(z-z_0)^k f(z)$	polo de orden k	$\lim_{z\to z_0}\dfrac{\phi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$
*10. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	g tiene un cero de orden l, h tiene un cero de orden $k+l$	polo de orden k	$\lim_{z\to z_0}\dfrac{\phi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$ donde $\phi(z)=(z-z_0)^k\dfrac{g}{h}$
11. $\dfrac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=$ $\cdots=h^{k-1}(z_0)$ $=0$, $h^k(z_0)\neq 0$	polo de orden k	véase la ecuación (6) en la proposición 4.1.7

Singularidades esenciales

En el caso de una singularidad esencial, no hay fórmulas simples como las precedentes, así que debemos confiar en nuestra habilidad para encontrar la expansión de Laurent. Por ejemplo, considere

$$f(z)=e^{(z+1/z)}=e^z\cdot e^{1/z}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

Al reunir los términos que involucran a $1/z$, obtenemos

$$\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\cdots\right)$$

(Multiplicamos como en el procedimiento del ejemplo resuelto 3.2.13, un método que se justifica por un resultado más general que se bosqueja en el ejercicio 12.) El residuo es entonces

$$\text{Res}\,(f, 0) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{3!4!} + \cdots$$

No podemos sumar la serie explícitamente.

Ejemplos resueltos

4.1.8. *Calcule el residuo de* $z^2/\text{sen}^2 z$ *en* $z = 0$.

Solución. Ya que tanto el numerador como el denominador tienen un cero de orden 2, la singularidad es removible y, por lo tanto, el residuo es cero.

4.1.9. *Encuentre los residuos en todas las singularidades de*

$$\tan z = \frac{\text{sen } z}{\cos z}$$

Solución. Las singularidades de tan z ocurren cuando $\cos z = 0$. Los ceros de $\cos z$ ocurren en

$$z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \cdots$$

El estudiante debe recordar que estos puntos son los únicos ceros de $\cos z$. Concluimos que las singularidades de tan z ocurren en los puntos $z_n = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero. Escogemos $g(z) = \text{sen } z$ y $h(z) = \cos z$. En cualquier z_n, $h'(z_n) = \pm 1 \neq 0$ y, por tanto, cada z_n es un polo simple de tan z. Así, podemos usar la fórmula 4 de la tabla 4.1.1 para obtener.

$$\text{Res}\,(\tan z, z_n) = \frac{g(z_n)}{h'(z_n)} = -1$$

Segunda solución. Sabemos que

$$\text{sen } z = (-1)^n \text{ sen } (z - \pi n) = (-1)^{n+1} \cos\left(z - \pi n - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1} \cos(z - z_n)$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (z - z_n)^{2k}$$

y

$$\cos z = (-1)^n \cos (z - \pi n) = (-1)^n \text{ sen}\left(z - \pi n - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \text{ sen } (z - z_n)$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (z - z_n)^{2k+1}$$

Como antes, los polos son simples, así la serie para la tan z es de la forma $\tan z = b_1/(z-z_n)+\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_n)^k$, así que sen z = tan z cos z se convierte en

$$(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-z_n)^{2k}=\left[\frac{b_1}{z-z_n}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_n)^k\right]\left[(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-z_n)^{2k+1}\right]$$

esto es,

$$-\left[1-\frac{(z-z_n)^2}{2}+\cdots\right]=\left[\frac{b_1}{z-z_n}+a_0+a_1(z-z_n)+\cdots\right]$$
$$\times\left[(z-z_n)-\frac{(z-z_n)^3}{6}+\cdots\right]$$
$$=b_1+a_0(z-z_n)+(a_1-\tfrac{1}{6})(z-z_n)^2+\cdots$$

Necesitamos únicamente comparar los primeros términos para obtener $b_1 = -1$.

4.1.10. *Evalúe el residuo de* $(z^2-1)/(z^2+1)^2$ *en* z = i.

Solución. (z^2+1) tiene un cero de orden 2 en i, e $i^2-1 \neq 0$, por lo tanto, $(z^2-1)/(z^2+1)^2$ tiene un polo de orden 2; así, para encontrar el residuo, usamos la fórmula 6 de la tabla 4.1.1. Escogemos $g(z) = z^2-1$, que satisface $g(i) = -2$ y $g'(i) = 2i$. Tomamos también $h(z) = (z^2+1)^2$ y observamos que $h'(z) = 4z(z^2+1)$, así que $h(i) = h'(i) = 0$. También, $h''(z) = 4(z^2+1)+8z^2 = 12z^2+4$, por lo que $h''(i) = -8$ y $h'''(z) = 24z$: por lo tanto, $h'''(i) = 24i$. En consecuencia, el residuo es

$$\frac{2\cdot 2i}{-8}-\frac{2}{3}\cdot\frac{(-2)\cdot 24i}{64}=0$$

Segunda solución. Sabemos del álgebra (o de la integración en cálculo) que $(z^2-1)/(z^2+1)^2$ tiene una expansión en fracciones parciales de la forma

$$\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}=\frac{Az+B}{(z-i)^2}+\frac{a}{(z-i)}+\frac{Cz+D}{(z+i)^2}+\frac{b}{(z+i)}$$

Al resolver para los coeficientes, da la identidad

$$\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(z+i)^2}$$

El segundo término es analítico en $z = i$ y, por lo tanto, la serie de Laurent es de la forma

$$\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-i)^n$$

El residuo es el coeficiente de $(z-i)^{-1}$, el cual es 0.

Ejercicios

1. Encuentre los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $\dfrac{e^z - 1}{\operatorname{sen} z}, z_0 = 0$ *b)* $\dfrac{1}{e^z - 1}, z_0 = 0$

c) $\dfrac{z+2}{z^2 - 2z}, z_0 = 0$ *d)* $\dfrac{1 + e^z}{z^4}, z_0 = 0$

e) $\dfrac{e^z}{(z^2-1)^2}, z_0 = 1$

2. Encuentre los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $\dfrac{e^{z^2}}{z-1}, z_0 = 1$ *b)* $\dfrac{e^{z^2}}{(z-1)^2}, z_0 = 0$

c) $\left(\dfrac{\cos z - 1}{z}\right)^2, z_0 = 0$ *d)* $\dfrac{z^2}{z^4 - 1}, z_0 = e^{i\pi/2}$

3. Si $f(z)$ tiene residuo b_1 en $z = z_0$, muestre mediante un ejemplo que $[f(z)]^2$ no necesariamente tiene residuo b_1^2 en $z = z_0$.

4. Deduzca la proposición 4.1.5 a partir de la proposición 4.1.4.

5. Explique cuál es el error con el siguiente razonamiento. Sea

$$f(z) = \frac{1 + e^z}{z^2} + \frac{1}{z}$$

$f(z)$ tiene un polo en $z = 0$ y el residuo en ese punto es el coeficiente de $1/z$, a saber, el 1. Calcule correctamente el residuo.

6. Complete la demostración de la proposición 4.1.7.

7. Encuentre todos los puntos singulares de las siguientes funciones y calcule los residuos en esos puntos:

a) $\dfrac{1}{z^3(z+4)}$ *b)* $\dfrac{1}{z^2 + 2z + 1}$

c) $\dfrac{1}{z^3 - 3}$

8. Encuentre todos los puntos singulares de las siguientes funciones y calcule los residuos en esos puntos:

a) $\dfrac{1}{e^z - 1}$ *b)* $\operatorname{sen} \dfrac{1}{z}$

9. Encuentre el residuo de $1/(z^2 \operatorname{sen} z)$ en $z = 0$

10. Si f_1 y f_2 tienen residuos r_1 y r_2 en z_0, muestre que el residuo de $f_1 + f_2$ en z_0 es $r_1 + r_2$.

11. Si f_1 y f_2 tienen polos simples en z_0, muestre que $f_1 f_2$ tiene un polo de segundo orden en z_0. Deduzca una fórmula para el residuo.

12. Sean

$$f(z) = \cdots + \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots$$

y

$$g(z) = \cdots + \frac{d_k}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{d_1}{(z - z_0)} + c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots$$

las expansiones de Laurent para f y g válidas para $0 < |z - z_0| < r$. Muestre que la expansión de Laurent para fg se obtiene mediante la multiplicación formal de estas series. Haga esto demostrando el siguiente resultado: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes, entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

donde $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$; más aún, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente. (*Sugerencia*: muestre que

$$\sum_{j=0}^{n} |c_j| \le \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} |a_j|\,|b_{k-j}| \le \left(\sum_{j=0}^{n} |a_j|\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|\right)$$

y use esto para deducir que Σ_{c_n} converge absolutamente. Estime el error entre $\sum_{k=0}^{n} c_k$ $(\sum_{j=0}^{n} a_j)(\sum_{k=0}^{n} b_k)$ y $(\sum_{j=0}^{\infty} a_j)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$).

13. Calcule los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades:

a) $\dfrac{1}{(1 - z)^3}$ *b)* $\dfrac{e^z}{(1 - z)^3}$

c) $\dfrac{1}{z(1 - z)^3}$ *d)* $\dfrac{e^z}{z(1 - z)^3}$

14. Encuentre los residuos de $(z^2 - 1)/[\cos(\pi z) + 1)]$ en cada una de sus singularidades. (Véase el ejercicio de repaso 29 del capítulo 3.)

4.2. EL TEOREMA DEL RESIDUO

El teorema del residuo, que se demuestra en esta sección, incluye al teorema de Cauchy y a la fórmula integral de Cauchy como casos especiales. Es uno de los prin-

cipales resultados del análisis complejo y nos conduce inmediatamente a interesantes aplicaciones, algunas de las cuales son consideradas en la siguiente sección. Las principales herramientas que se necesitan para demostrar el teorema, son el teorema de Cauchy (2.2.1 y 2.3.14) y el teorema de la expansión de Laurent (3.3.1).

La demostración precisa del teorema del residuo es precedida por dos demostraciones intuitivas que se basan únicamente en el material de la sección 2.2, y la siguiente propiedad del residuo en z_0:

$$2\pi i \ \text{Res}\,(f, z_0) = \int_\gamma f$$

donde γ es un círculo pequeño alrededor de z_0 (véase la proposición 3.3.3). Para la mayoría de los ejemplos prácticos, las demostraciones intuitivas son, en efecto, perfectamente adecuadas pero, como fue evidente en la sección 2.2, es difícil formular un teorema general para el cual se aplique rigurosamente el argumento.

Teorema del residuo

Teorema del residuo 4.2.1. *Sea* A *una región y sean* $z_1, \ldots, z_n \in$ A, n *puntos distintos de* A. *Sea* f *analítica en* $A\backslash\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$; *esto es, sea* f *analítica en* A, *excepto para singularidades aisladas en* $z_1, \ldots, z_n$. *Sea* γ *una curva cerrada en* A, *homotópica a un punto de* A. *Suponga que ningún* z_i *está sobre* γ. *Entonces*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} [\text{Res}\,(f, z_i)]I\,(\gamma, z_i) \tag{1}$$

donde Res (f, z_i) *es el residuo de* f en z_i (véase la sección precedente) *e* $I(\gamma, z_i)$ *es el índice (o número de vueltas) de* γ *con respecto a* z_i (véase la sección 2.4).

En la mayoría de los ejemplos prácticos, γ será una curva simple cerrada, recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj y entonces $I(g, z_i)$ será 1 o 0, de acuerdo a si z_i está dentro de γ o fuera de γ. (Esto se ilustra en la figura 4.2.1) La misma política en relación al cálculo del índice $I(\gamma, z)$ que se usó en la sección 2.4, se seguirá en esta sección. Una demostración intuitiva es aceptable mientras que tales afirmaciones puedan justificarse con argumentos homotópicos, cuando se pidan. Por ejemplo, $I(\gamma, z_0) = +1$ si se puede demostrar que γ es homotópica en $\mathbf{C}\backslash\{z_0\}$ a $\gamma(t) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Suponiendo que aceptamos el teorema de la curva de Jordan, una formulación general del teorema del residuo para curvas cerradas simples se puede enunciar como sigue: *Si* γ *es una curva cerrada simple en una región* A *cuyo interior está en* A, *y si* f *es analítica en* $A\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$ entonces $\int_\gamma f$ *es* $2\pi i$ *veces la suma de los residuos de* f *dentro de* γ, *cuando* γ *es recorrida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj*. Ésta es una manera clásica de formular el teorema del residuo, pero es preferible nuestra afirmación original (4.2.1) porque no nos restringe a curvas cerrada simples y no se atiene al difícil teorema de Jordan.

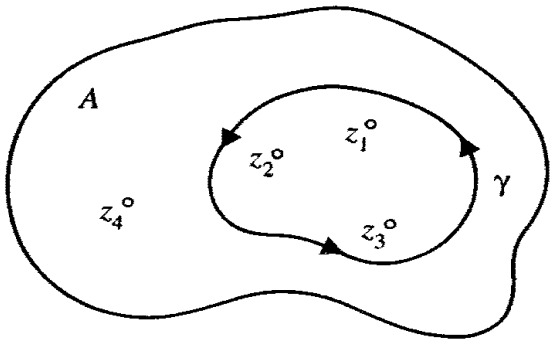


Figura 4.2.1. Teorema del residuo: $\int_\gamma f = 2\pi i[\text{Res}\,(f, z_1) + \text{Res}\,(f, z_2) + \text{Res}\,(f, z_3)]$.

Se dan ahora dos demostraciones cortas e intuitivas del teorema del residuo para curvas cerradas simples. Serán ilustradas mediante un ejemplo que muestre que, en los casos prácticos, tales demostraciones pueden hacerse muy precisas.

Primera demostración intuitiva del teorema del residuo para curvas cerradas simples. Ya que γ es contraíble en A a un punto de A, el interior de γ está en A. Supóngase que cada z_i está en el interior de g. Alrededor de cada z_i dibuje un círculo γ_i que también esté dentro de γ. Aplicamos el ejemplo resuelto 2.2.10 (el teorema de deformación generalizado) para obtener $\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$, ya que f es analítica en $\gamma, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ y en la región entre ellas (figura 4.2.2). Suponga que $\gamma, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ son todas recorridas en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Como se demostró en la proposición 3.3.3, $\int_{\gamma_i} f = 2\pi i\ \text{Res}\,(f, z_i)$ y, por tanto, $\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_i)$, es la afirmación del teorema del residuo pues $I(\gamma, z) = 1$ para z dentro de γ, e $I(\gamma, z) = 0$ para z fuera de γ. ■

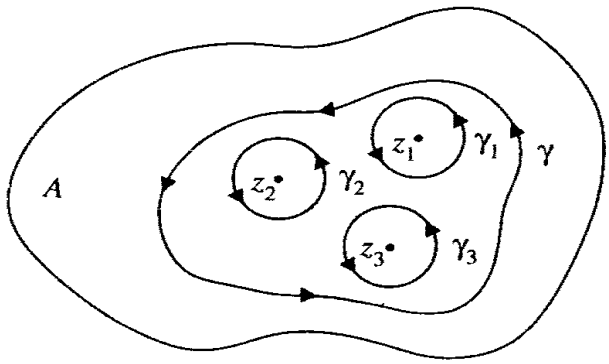


Figura 4.2.2. Primera demostración intuitiva del teorema del residuo.

Segunda demostración intuitiva del teorema del residuo para curvas cerradas simples. Esta demostración procede de la misma manera que la anterior, excepto que se da una justificación diferente de que $\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$. Los círculos se conectan como se muestra en la figura 4.2.3, para obtener una nueva curva $\tilde{\gamma}$. Así, γ y $\tilde{\gamma}$, son homotópicas en $A\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$ y, por lo tanto, por el teorema de deformación, $\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f$. Pero $\int_{\tilde{\gamma}} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$, ya que las porciones a lo largo de las curvas que conectan los círculos se cancelan. ■

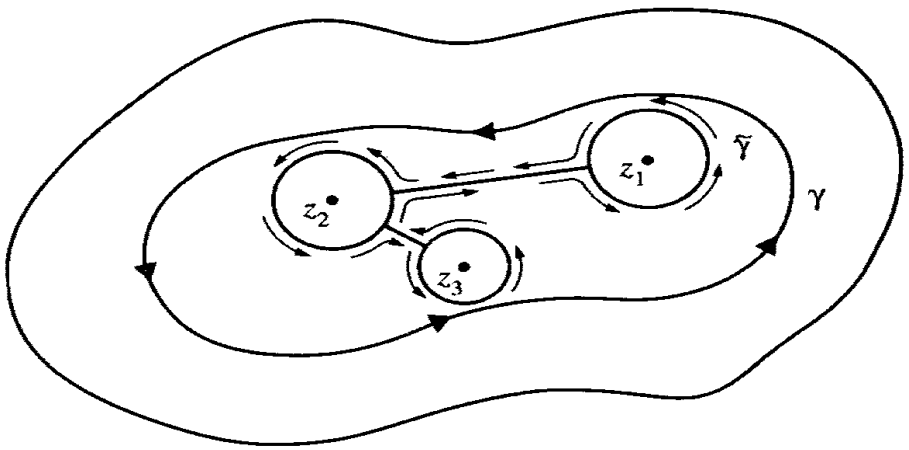


Figura 4.2.3. Segunda demostración intuitiva del teorema del residuo.

Es importante que el estudiante entienda claramente porque estas demostraciones no resultan precisas. Primero, suponemos que γ es simple. Segundo, usamos el teorema de la curva de Jordan (el cual no se demostró) para poder discutir el interior y el exterior de γ y el hecho que $I(\gamma, z) = 1$ para z dentro de γ e $I(\gamma, z) = 0$ para z fuera de γ. Finalmente, en la primera demostración intuitiva, usamos el ejemplo resuelto 2.2.10, el cual se estableció sólo informalmente, para justificar que $\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$.

Ejemplo. Considere $\int_\gamma dz/(z^2 - 1)$, donde γ es el círculo con centro en 0 y radio 2. La función $1/(z^2 - 1)$ tiene polos simples en -1, 1(véase la figura 4.2.4). Observe que en este ejemplo podemos discutir el interior y el exterior de γ y sabemos que -1 y 1 tienen un índice de $+1$ con respecto de γ. (No se necesita el teorema de la curva de Jordan en este ejemplo concreto.)

Dibujamos los círculos γ_1 y γ_2 de radios $\frac{1}{4}$, alrededor de -1 y 1, respectivamente. La única afirmación en las demostraciones precedentes del teorema del residuo, que no fue precisa fue

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

La justificación exacta de que $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$ en términos de homotopías, fue explicada en el ejemplo resuelto 2.3.23.

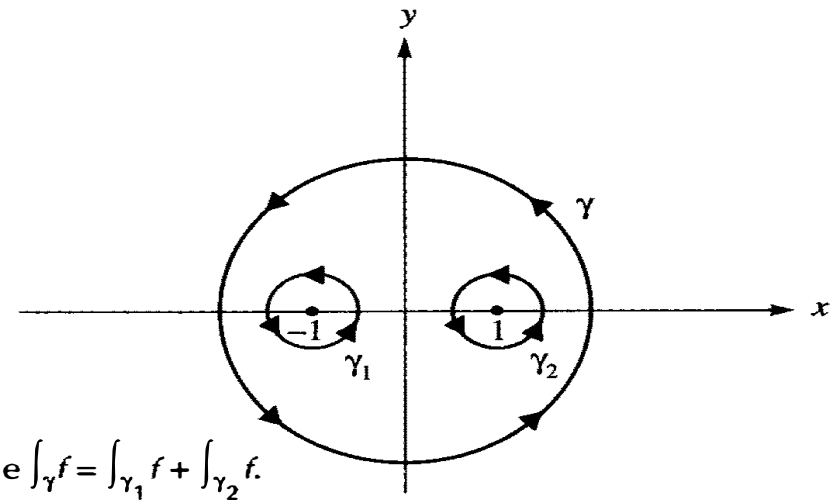


Figura 4.2.4. Justificación de que $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$.

Observe que en este caso

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, -1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, 1\right)\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2(-1)} + \frac{1}{2\cdot 1}\right] = 0$$

También podemos justificar $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$ al considerar la curva de la figura 4.2.5(i) y mostrando que es homotópica en $\mathbf{C}\backslash\{1, -1\}$, a un punto. Esto es geométricamente claro; una homotopía se indica en la figura 4.2.5(ii) y (iii). ■

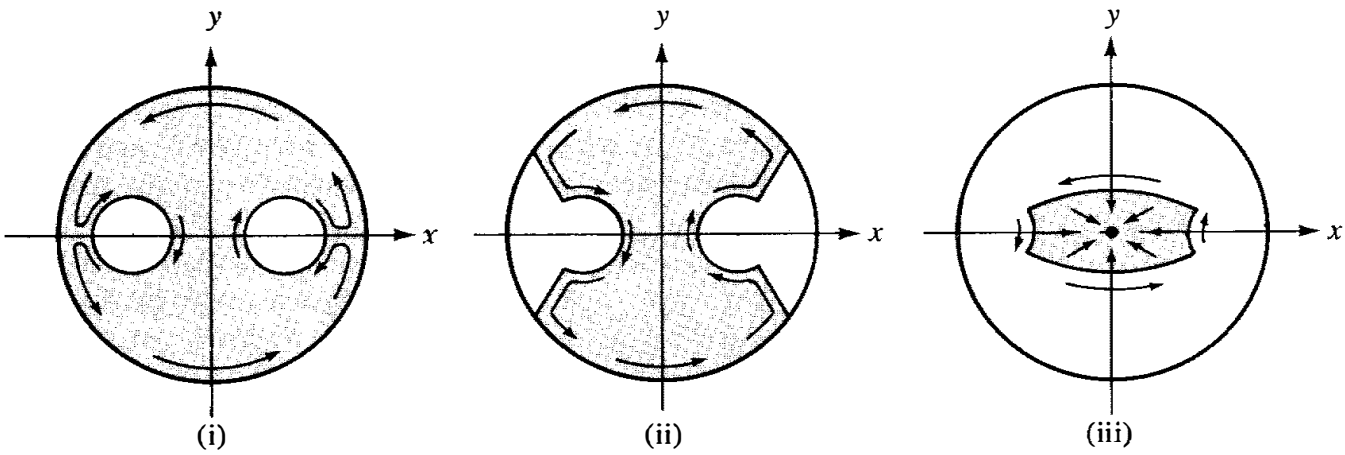


Figura 4.2.5. Una curva que es homotópica a un punto.

Demostración precisa del teorema del residuo. Ya que z_i es una singularidad aislada de f, podemos escribir una expansión de la serie de Laurent.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_i)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_i)^m}$$

en alguna vecindad agujerada de z_i de la forma $\{z \mid r > |z - z_i| > 0\}$ para alguna $r > 0$. Recordemos, de la proposición 3.3.2, que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_i)^m}$$

es llamada la parte singular de la expansión de la serie de Laurent y que ésta converge uniformemente en $\mathbf{C}\backslash\{z_i\}$, en el exterior de cualquier círculo $|z - z_i| = \varepsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_i)^m}$$

es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{z_i\}$ (véase la proposición 3.1.8). Denote a la parte singular de la expansión de Laurent de f alrededor de z_i, por $S_i(z)$.

Considere la función

$$g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{n} S_i(z)$$

Ya que f es analítica en $A\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$ y puesto que $S_i(z)$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{z_i\}$, g es analítica en $A\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$.

Todas las z_i son singularidades removibles de f porque, en una vecindad agujerada $\{z \mid r > |z - z_i| > 0\}$, la cual no contiene ninguna de las singularidades, tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n + S_i(z)$$

y, por lo tanto,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_i)^n - \sum_{j=1}^{i-1} S_j(z) - \sum_{j=i+1}^{n} S_j(z)$$

Puesto que las funciones $S_j, j \neq i$, son analíticas en $\mathbf{C}\backslash\{z_j\}$, sabemos que $\lim_{z \to z_i} g(z)$ existe y es igual a $a_0 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} S_j(z_i)$. Consecuentemente, z_i es una singularidad removible de g.

Debido a que g puede definirse en los puntos z_i de tal forma que g sea analítica en todo A, podemos aplicar el teorema de Cauchy (2.3.14), para obtener que $\int_\gamma g = 0$. Así

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma S_i$$

Enseguida considérese la integral $\int_\gamma S_i$. La función $S_i(z)$ es de la forma

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_i)^m}$$

la cual, como hemos observado, convergente uniformemente fuera de un disco pequeño centrado en z_i. Por lo tanto, la convergencia es uniforme en γ. (Ya que $\mathbf{C}\backslash\{\gamma([a, b])\}$ es un conjunto abierto, cada z_i tiene un pequeño disco alrededor de ella, que no corta a γ.) Por la proposición 3.1.9.

$$\int_\gamma S_i = \sum_{m=1}^{\infty} \int_\gamma \frac{b_m}{(z - z_i)^m}\, dz$$

Pero, para $m > 1$ y $z \neq z_i$,

$$\frac{1}{(z - z_i)^m} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z - z_i)^{1-m}}{1 - m}\right]$$

y, por lo tanto, por la proposición 2.1.7 y el hecho de que γ es una curva cerrada, todos los términos son cero, excepto el término para el cual $m = 1$. Así

$$\int_\gamma S_i = \int_\gamma \frac{b_1}{z - z_i}\,dz = b_1 \int_\gamma \frac{1}{z - z_i}\,dz$$

Por la definición 2.4.1 para el índice, esto es igual a $b_1 \cdot 2\pi i \cdot I(\gamma, z_i) = 2\pi i[\text{Res}\,(f, z_i)]\, I(\gamma, z_i)$. Por lo tanto,

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi i[\text{Res}\,(f, z_i)]I(\gamma, z_i)$$

y el teorema está demostrado. ■

SUPLEMENTO A LA SECCIÓN 4.2: RESIDUOS Y COMPORTAMIENTO EN INFINITO

Si una función f es analítica para toda z suficientemente grande (esto es, fuera de algún círculo grande), entonces es analítica en una vecindad agujerada de ∞, en el sentido de la esfera de Riemann y el punto al infinito, como se definió en la sección 1.4. Podemos pensar al ∞ como una singularidad aislada de f, quizá removible. Sea $F(z) = f(1/z)$. Si $z = 0$, hacemos $1/z = \infty$. (Equivalentemente, $1/z \to \infty$ conforme $z \to 0$). Así que tiene sentido discutir el comportamiento de f en ∞, en términos del comportamiento de F en 0.

Definición 4.2.2

(i) *Decimos que* f *tiene un polo de orden* k *en* ∞, *si* F *tiene un polo de orden* k *en* 0.
(ii) *Decimos que* f *tiene un cero de orden* k *en* ∞, *si* F *tiene un* 0 *de orden* k *en* 0.
(iii) *Definimos* $\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}((1/z^2)\,F(z), 0)$.

Observe, en particular, que un polinomio de grado k tiene un polo de orden k en ∞. Esto coincide con lo que vimos en la demostración del teorema fundamental del álgebra en la sección 2.4. Conforme $z \to \infty$, un polinomio de grado k se comporta de modo similar a z^k. Véase también el ejemplo resuelto 4.2.8. La definición de residuo en ∞ puede parecer un poco extraña, pero es ideada para hacer que funcionen correctamente las dos siguientes proposiciones.

Proposición 4.2.3. *Suponga que existe una* $R_0 > 0$ *tal que* f *es analítica en* $\{z \in \mathbf{C}$ tal que $|z| > R_0\}$. *Si* $R > R_0$, Γ *es el círculo de radio* R *centrado en* 0, y Γ *es recorrida una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces* $\int_\Gamma f = -2\pi i\,\text{Res}\,(f, \infty)$.

Demostración. Sea $r = 1/R$, y sea γ el círculo de radio r centrado en 0 y recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Si z está dentro de γ, entonces

$1/z$ está fuera de Γ, así que la función $g(z) = f(1/z)/z^2$ es analítica en todo el interior de γ, excepto en 0. Así

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{ Res } (g, 0) &= \int_\gamma [f(1/z)/z^2]dz = \int_0^{2\pi} f(r^{-1} e^{-it}) r^{-2} e^{-2it} re^{it}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(Re^{-it}) Re^{-it}\, dt = \int_{-2\pi}^{0} f(Re^{is}) Re^{is}\, ds = \int_0^{2\pi} f(Re^{is}) Re^{is}\, ds \\ &= \int_\Gamma f \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se sigue de la 2π perioditicidad de e^{is}.■

La elección del signo menos se sigue del hecho de que, conforme avanzamos a lo largo de una curva cerrada simple en **C** en sentido contrario al de las manecillas del reloj, la región que normalmente pensamos como el interior, está a la izquierda. (Mire cualquiera de las figuras de esta sección.) El punto al infinito, ∞, está a la izquierda si avanzamos en la dirección opuesta a lo largo de la curva. De aquí el signo menos. Para las curvas de la última demostración, si z avanza en la dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj a lo largo de Γ, entonces $1/z$ avanza en la dirección de las manecillas del reloj a lo largo de γ. Ya que f es analítica fuera de Γ, excepto, posiblemente, en ∞, la proposición 4.2.3 puede ser interpretada diciendo que $(1/2\pi i)\int_\Gamma f$ es el residuo negativo de f fuera de Γ. En general esto es correcto.

Proposición 4.2.4. *Sea γ una curva cerrada en* **C** *recorrida una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Sea* f *analítica a lo largo de γ y suponga que* f *tiene únicamente un número finito de singularidades fuera de γ. Entonces*

$$\int_\gamma f = -2\pi i \sum \{\text{residuos de f fuera de } \gamma, \text{ incluyendo al } \infty\}$$

Demostración. Aplique el teorema del residuo a la curva compuesta, tal como la de la figura 4.2.6. Escójase Γ un círculo lo suficientemente grande para que contenga a γ y a todas las singularidades finitas de f en su interior. Se le pide al lector que proporcione los detalles restantes de una demostración informal, en el ejercicio 14. ■

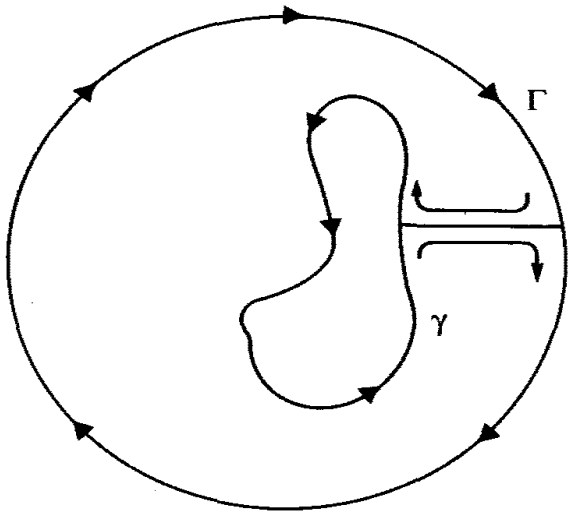


Figura 4.2.6. Curva usada en la demostración del teorema del residuo para el exterior de una curva.

Ejercicios resueltos

4.2.5. *Sea* γ *el círculo de radio* $\frac{1}{2}$, *parametrizado por* $\gamma(t) = e^{it}/2$, $0 \le t \le 2\pi$. *Evalúe.*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1}$$

Solución. Las singularidades ocurren en los puntos para los cuales el denominador se anula. Estos puntos son

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

y

$$z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Es fácil verificar que $|z_1| = |z_2| = 1$, así que tanto z_1 como z_2 están fuera del círculo de radio $\frac{1}{2}$. Ahora, γ es homótopica a 0 en $\mathbf{C}\backslash\{z_1\}$ y $1/(z - z_1)$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{z_1\}$ y, por ende, del teorema de Cauchy, $I(\gamma, z_1) = 0$. Similarmente, $I(\gamma, z_2) = 0$. Por lo tanto, del teorema del residuo,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0$$

Alternativamente, podríamos notar que γ es homotópica a 0 en $\mathbf{C}\backslash\{z_1, z_2\}$ (figura 4.2.7) y $1/(z^2 + z + 1)$ es analítica en $\mathbf{C}\backslash\{z_1, z_2\}$; entonces, por el teorema de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0$$

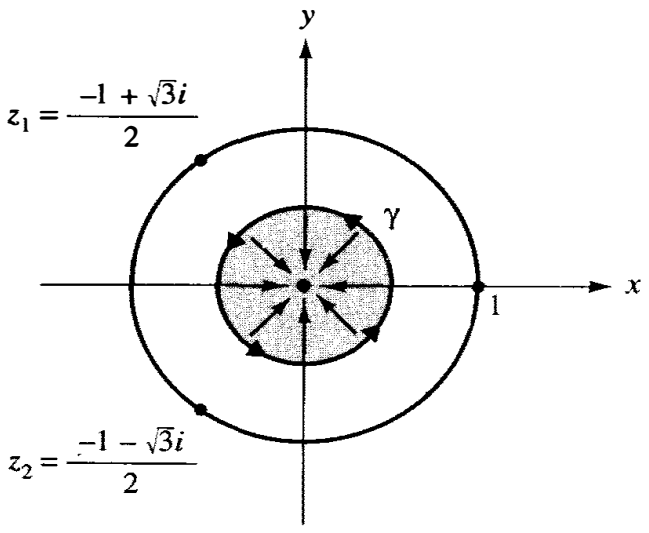


Figura 4.2.7. $\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0.$

4.2.6. *Evalúe*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4 + 1}$$

donde γ *consiste de la porción del eje desde* -2 *a* $+2$ *y el semicírculo en el semiplano superior desde* 2 *a* -2, *centrado en* 0.

Solución. Los puntos singulares del integrando ocurren en las cuatro raíces de -1: $e^{\pi i/4}$, $e^{(\pi + 2\pi)i/4} = e^{3\pi i/4}$, $e^{(\pi + 4\pi)i/4} = e^{5\pi i/4}$ y $e^{(\pi+6\pi)i/4} = e^{7\pi i/4}$ (véase la figura 4.2.8). Por lo tanto, por el teorema del residuo,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i \left[\text{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{\pi i/4}\right) I(\gamma, e^{\pi i/4}) + \text{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{3\pi i/4}\right) I(\gamma, e^{3\pi i/4}) \right.$$

$$\left. + \text{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{5\pi i/4}\right) I(\gamma, e^{5\pi i/4}) + \text{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{7\pi i/4}\right) I(\gamma, e^{7\pi i/4}) \right]$$

Es intuitivamente claro que $I(\gamma, e^{\pi i/4}) = 1$, $I(\gamma, e^{3\pi i/4}) = 1$, mientras que los otros dos índices son 0. Esto puede justificarse más cuidadosamente como sigue: γ es homotópica a un círculo $\tilde{\gamma}$ alrededor de $e^{\pi i/4}$, recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Para ver esto, reparametrice γ de tal manera que esté definida en el intervalo $[0, 2\pi]$. Una homotopía adecuada es entonces $H(s, t) = (1 - t)\gamma(s) + t\tilde{\gamma}(s)$. Esta homotopía se ilustra en la figura 4.2.9. Sabemos que $I(\tilde{\gamma}, e^{\pi i/4}) = 1$, por el ejemplo resuelto 2.1.12; y que $I(\tilde{\gamma}, e^{\pi i/4}) = I(\gamma, e^{\pi i/4})$, por el teorema de deformación. Así, $I(\gamma, e^{\pi i/4}) = 1$ y similarmente $I(\gamma, e^{3\pi i/4}) = 1$. Más aun, γ puede contraerse al origen a lo largo del radio del semicírculo, y, por lo tanto, por el teorema de Cauchy, $I(\gamma, e^{5\pi i/4}) = 0$ e $I(\gamma, e^{7\pi i/4}) = 0$.

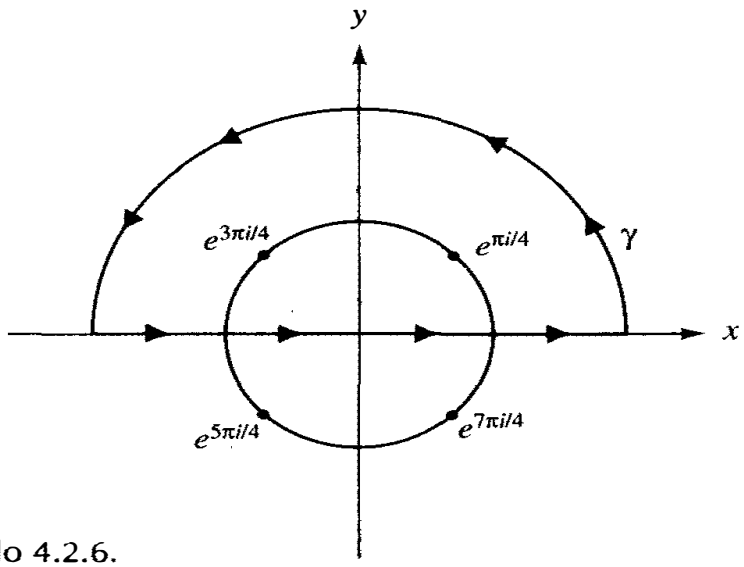


Figura 4.2.8. La curva γ en el ejemplo 4.2.6.

Para calcular

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^4 + 1}, e^{\pi i/4}\right)$$

observe que $e^{\pi i/4}$ es un polo simple de la función $1/(z^4 + 1)$, así que podemos usar la fórmula 4 de la tabla 4.1.1 para obtener

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{\pi i/4}\right) = \frac{1}{4(e^{\pi i/4})^3} = \frac{e^{\pi i/4}}{4e^{\pi i}} = -\frac{e^{\pi i/4}}{4}$$

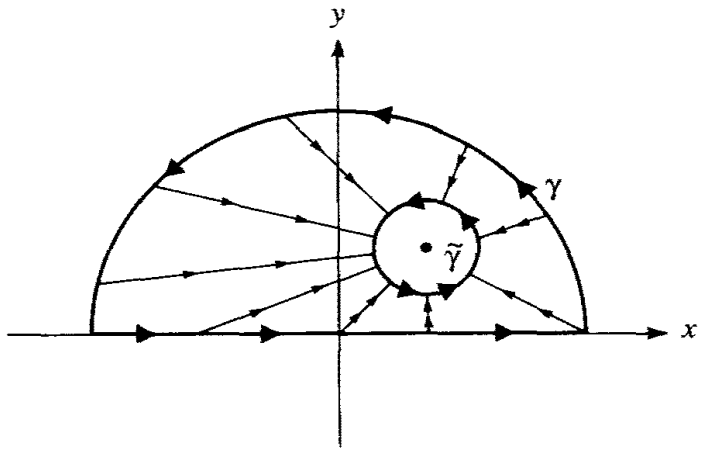


Figura 4.2.9. Homotopía entre γ y $\tilde{\gamma}$.

Similarmente,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{3\pi i/4}\right) = \frac{1}{4(e^{3\pi i/4})^3} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4}$$

Por lo tanto,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = \frac{2\pi i}{4}(e^{-\pi i/4} - e^{\pi i/4}) = \pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Observación. Realmente no tenemos que usar un método tan detallado para calcular los índices (número de vueltas). Simplemente usamos nuestra intuición para estimar el número de veces que la curva en cuestión gira alrededor de tal punto dado, en la dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj. Pero debemos tener presente que la justificación para esta intuición, consiste de un argumento como el precedente.

4.2.7. *Evalúe*

$$\int_\gamma \frac{1+z}{1-\cos z}\,dz$$

donde γ *es el círculo de radio* 7 *alrededor del* 0.

Solución. Las singularidades de $(1 + z)/(1 - \cos z)$ ocurren cuando $1 - \cos z = 0$. Pero $(e^{iz} + e^{-iz})/2 = 1$ implica que $(e^{iz})^2 - 2(e^{iz}) + 1 = 0$, esto es, que $(e^{iz} - 1)^2 = 0$, y, por lo tanto, $e^{iz} = 1$. En consecuencia, las singularidades ocurren en $z = 2\pi n$ para $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Las únicas singularidades de $(1 + z)/(1 - \cos z)$ que están dentro del círculo de radio 7, son $z_1 = 0$, $z_2 = 2\pi$ y $z_3 = -2\pi$ (véase la figura 4.2.10). También, $d(1 - \cos z)/dz = \operatorname{sen} z$, la cual es cero en $0, -2\pi, +2\pi$; y $d^2(1 - \cos z)/dz^2 =$

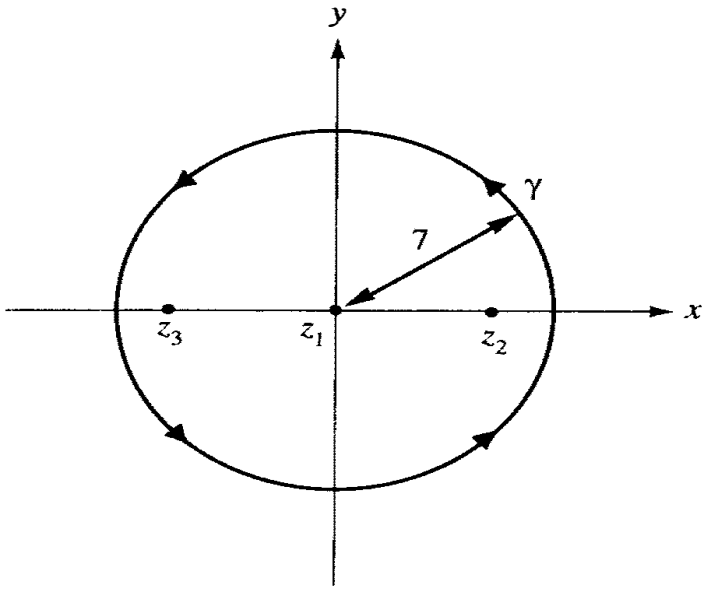


Figura 4.2.10. La curva γ contiene tres singularidades.

cos z, la cual es distinta de 0 en 0, -2π y 2π, así que las singularidades son polos de orden 2.
El residuo en uno de estos polos z_0 es, por la fórmula 6 de la tabla 4.1.1,

$$2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}$$

En este caso $g(z) = 1 + z$, así que $g'(z) = 1$; y $h(z) = 1 - \cos z$, así que $h'(z) = \operatorname{sen} z$, $h''(z) = \cos z$ y $h'''(z) = -\operatorname{sen} z$. Así, $h'''(z) = 0$ para $z = z_1, z_2, z_3$, y por ende la fórmula para el residuo se convierte en $2g'(z_0)/h''(z_0)$. Por lo tanto,

$$\text{Res}\,(f, z_1) = \frac{2}{\cos 0} = 2 \qquad \text{Res}\,(f, z_2) = \frac{2}{\cos(2\pi)} = 2 \qquad \text{Res}\,(f, z_3) = \frac{2}{\cos(-2\pi)} = 2$$

Así, por el teorema del residuo,

$$\int_\gamma \frac{1+z}{1-\cos z}\,dz = 2\pi i[\text{Res}\,(f, z_1) + \text{Res}\,(f, z_2) + \text{Res}\,(f, z_3)] = 12\pi i$$

Note que hemos usado implícitamente el hecho que $I(\gamma, z) = 0$ para z fuera de γ, e $I(\gamma, z) = 1$ para z dentro de γ. Cualquier estudiante que no crea en su intuición, debe dar una demostración cuidadosa de este hecho.

4.2.8. *Muestre que si* p(z) *es un polinomio de grado al menos* 2, *entonces la suma de los residuos de* 1/p(z) *en todos los ceros de* p, *debe ser* 0.

Primera solución. Suponga que el grado de p es n y que $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ con $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Sabemos que p puede tener a lo más n diferentes ceros, así que si γ es un círculo de radio R suficientemente grande, centrado en 0, éste encierra a todas las singularidades finitas de $1/p(z)$. Así,

$$\int_\gamma \frac{1}{p(z)}\,dz = 2\pi i \sum \left(\text{residuo de } \frac{1}{p}\right)$$

y esto se satisface para toda R suficientemente grande. Pero para R grande,

$$\frac{|a_{n-1}|}{R} + \frac{|a_{n-2}|}{R^2} + \cdots + \frac{|a_0|}{R^n} < \frac{|a_n|}{2}$$

así que

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \left| z^n \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} \right| \\ &\geq R^n \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{R} + \frac{a_{n-2}}{R^2} + \cdots + \frac{a_0}{R^n} \right| \right) \\ &\geq R^n \left[|a_n| - \left(\frac{|a_{n-1}|}{R} + \frac{|a_{n-2}|}{R^2} + \cdots + \frac{|a_0|}{R^n} \right) \right] \\ &\geq R^n \frac{|a_n|}{2} \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $|\int_\gamma [1/p(z)]\,dz| \leq 2\pi R/(R^n|a_n|/2) = 4\pi/R^{n-1}|a_n|$. Así

$$\left| \sum \left(\text{residuos de } \frac{1}{p}\right) \right| \leq \frac{2}{R^{n-1}|a_n|}$$

Haciendo $R \to \infty$, obtenemos: $|\Sigma\,(\text{residuos de } 1/p)| \leq 0$. En consecuencia, la suma debe ser 0.

Segunda solución (para aquellos que han estudiado el suplemento sobre residuos al infinito). Con γ como antes, no hay singularidades finitas de $1/p$ fuera de γ y, por tanto, $\int_\gamma (1/p) = -2\pi i\ \text{Res}\,(1/p, \infty)\ 2\pi i\ \text{Res}((1/p(1/z))\,(1/z^2), 0)$.

Pero,

$$\frac{1}{p(1/z)} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{1}{a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \cdots + \dfrac{a_n}{z^n}} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{z^n}{a_0 z^n + \cdots + a_n} \cdot \frac{1}{z^2}$$

Ya que $n \geq 2$, la singularidad en $z = 0$ es removible, así que el residuo es 0 y, por lo tanto, la integral es 0. Pero la integral es igual a la suma de los residuos de $1/p$ en los ceros de p.

Ejercicio

1. Evalúe

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z+1)^3}$$

donde *a*) γ es el círculo de radio 2, centro en 0 y *b*) γ es el cuadrado con vértices 0, 1, $1 + i$, i.

2. Deduzca la fórmula integral de Cauchy a partir del teorema del residuo.

3. Evalúe

$$\int_\gamma \frac{z}{z^2 + 2z + 5}\, dz$$

donde γ es el círculo unitario.

4. Evalúe

$$\int_\gamma \frac{1}{e^z - 1}\, dz$$

donde γ es el círculo de radio 9 y centro en 0.

5. Evalúe

$$\int_\gamma \tan z\, dz$$

donde γ es el círculo de radio 8 centrado en 0.

6. Muestre que

$$\int_\gamma \frac{5z - 2}{z\,(z - 1)}\, dz = 10\pi i$$

donde γ es cualquier círculo de radio mayor que 1 y centro en 0.

7. Evalúe

$$\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z^2}\, dz$$

donde *a*) γ es el cuadrado con vértices $-1 - i$, $1 - i$, $-1 + i$ y $1 + i$, y *b*) γ es la elipse $\gamma(t) = a \cos t + ib \operatorname{sen} t$, donde $a, b > 0$, $0 \le t \le 2\pi$.

8. Sea f analítica en $\mathbf{C}$ excepto para los polos en 1 y -1. Asuma que $\operatorname{Res}(f, 1) = -\operatorname{Res}(f, -1)$. Sea $A = \{z \mid z \notin [-1, 1]\}$. Muestre que existe una función analítica h en A, tal que $h'(z) = f(z)$.

9. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{dz}{z(1 - z)^3}$ *b*) $\displaystyle\int_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{e^z\, dz}{z(1 - z)^3}$

10. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{|z| = \frac{1}{2}} \frac{dz}{(1 - z)^3}$ *b*) $\displaystyle\int_{|z + 1| = \frac{1}{2}} \frac{dz}{(1 - z)^3}$

c) $\displaystyle\int_{|z - 1| = \frac{1}{2}} \frac{dz}{(1 - z)^3}$ *d*) $\displaystyle\int_{|z - 1| = \frac{1}{2}} \frac{e^z}{(1 - z)^3}\, dz$

11. Sea $f: A \to B$ analítica, uno a uno, y sobre, y sea $f'(z) \neq 0$ para $z \in A$. Sea γ una curva en A y sea $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. También sea γ continua en $\tilde{\gamma}$. Muestre que.

$$\int_{\gamma} (g \circ f) \cdot f' = \int_{\tilde{\gamma}} g$$

¿Qué resulta en el caso en que $f(z) = 1/z$?

12. Muestre que si $\lim_{z \to \infty} [-zf(z)]$ existe, éste es igual al residuo de f en ∞.

13. *a*) Encuentre el residuo de $(z-1)^3/(z+2)^3$ en $z = \infty$
b) Muestre dos métodos para evaluar

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}\, dz$$

donde γ es el círculo con centro en 0 y radio 3.

14. Muestre informalmente que si γ es una curva cerrada simple, recorrida en contra del sentido de la manecillas del reloj, entonces

$$\int_{\gamma} f = -2\pi i \sum \{\text{residuos de } f \text{ fuera de } \gamma \text{ incluyendo } \infty\}$$

15. Escoja una rama de $\sqrt{z^2-1}$ que sea analítica en $\mathbf{C}$ excepto en el segmento $[-1, 1]$ sobre el eje real. Evalúe.

$$\int_{\gamma} \sqrt{z^2-1}\, dz$$

donde γ es el círculo de radio 2 centrado en 0.

4.3. EVALUACIÓN DE INTEGRALES DEFINIDAS

En esta sección se desarrollan métodos sistemáticos para usar el teorema del residuo en la evaluación de ciertos tipos de integrales. Estas técnicas se resumen en la tabla 4.3.1. También se dan algunos ejemplos y artificios especiales para evaluar integrales que involucran funciones "multivaluadas", tales como la raíz cuadrada o el logaritmo. Es valioso para el lector en entender las técnicas y estimaciones que se usan para establecer las fórmulas, ya que estas mismas ideas pueden usarse a menudo, cuando las fórmulas obtenidas aquí no se aplican directamente. Los ejemplos resueltos relacionados directamente con las fórmulas obtenidas se agrupan en el texto con los teoremas. Al final de la sección, aparecen diversos ejemplos resueltos acerca de importantes casos especiales, que ilustran cómo pueden modificarse los métodos para manejar problemas que no son estándar.

Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

Este tipo de integrales impropias es a menudo más fácil de evaluar por medio del análisis complejo, aun cuando la función involucrada sea de valores reales para

toda x. Es importante recordar que hay siempre dos preguntas involucradas cuando estudiamos tales integrales: ¿La integral converge? Si lo hace, ¿a qué converge? Algunas veces estas dos preguntas deben tratarse por separado. Nuestras dos primeras proposiciones dan condiciones que garantizan la convergencia; y dan fórmulas para los valores.

Proposición 4.3.1

(i) *Suponga que* f *es analítica en un conjunto abierto que contiene al semiplano superior* $H = \{z \mid \text{Im } z \geq 0\}$ *excepto por un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real y que existen constantes* M *y* $p > 1$ *y un número* R *tales que* $|f(z)| \leq M/|z|^p$ *siempre que* $z \in H$ y $|z| \geq R$. *Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \{\text{residuo de f en H}\}$$

(ii) *Si las condiciones de* (i) *se satisfacen, con* H *remplazado por el semiplano inferior* $L = \{z \mid \text{Im } z \leq 0\}$, *entonces.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum \{\text{residuo de f en L}\}$$

(iii) *Ambas fórmulas se satisfacen si* $f = P/Q$, *donde* P *y* Q *son polinomios, el grado de* Q *es mayor que el de* P *en al menos* 2, *y* Q *no tiene ceros reales.*

Demostración. (i) Sea $r > R$ y considere la curva γ_r mostrada en la figura 4.3.1(i). Escoja r lo suficientemente grande tal que todo los polos de f en el semiplano superior, estén en γ_r. Por el teorema del residuo,

$$\int_{\gamma_r} f = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } f \text{ en el semiplano superior}\}$$

La integral sobre γ_r se rompe en una porción recta y en una curva, como sigue:

$$\int_{\gamma_r} f = \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta}\,d\theta$$

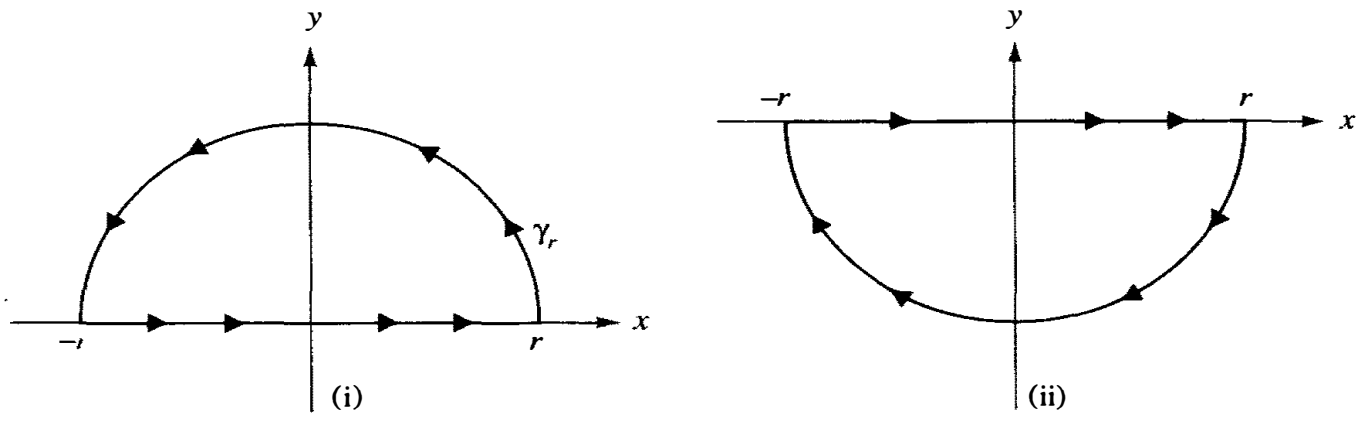


Figura 4.3.1. La curva γ_r.

Suponga que podemos demostrar que conforme $r \to \infty$, el último término se aproxima a cero. Entonces, tendríamos

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } f \text{ en el semiplano superior}\}$$

Del cálculo, sabemos que $f(x)$ es integrable como una función de $x \in \mathbf{R}$ (porque f es continua en $\mathbf{R}$ y por la condición $|f(z)| \le M/|x|^p$ para $|x| \ge R$); por lo tanto,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Así, sólo resta demostrar que

$$\lim_{r\to\infty}\int_{0}^{\pi} f(re^{i\theta})rie^{i\theta}\,d\theta = 0$$

Pero

$$\left|\int_0^{\pi} f(re^{i\theta})rie^{i\theta}\,d\theta\right| \le \pi \cdot \frac{M}{r^p} \cdot r = \frac{\pi M}{r^{p-1}}$$

lo cual se aproxima a cero conforme $r \to \infty$, ya que $p > 1$. Esto establece la parte (i). La parte (ii) se sigue de una manera similar usando la curva mostrada en la figura 4.3.1(ii). El signo menos ocurre debido a que la curva es recorrida en la dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj.

Finalmente, si $f = P/Q$, vamos a establecer que $|f(z)| \le M/|z|^2$ para $|z|$ grande y completar así la demostración. Si P es de grado n y Q es de grado $n + p$, $p \ge 2$, sabemos que existe una $M_1 > 0$ tal que $|P(z)| \le M_1 |z|^n$ para $|z| \ge 1$ y existe una $M_2 > 0$ tal que $|Q(z)| \ge M_2|z|^{n+p}$ si $|z| \ge R$ para alguna $R > 1$ (véase la demostración del teorema fundamental del álgebra (3.4.9)). Así

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{1}{|z|^p} \le \frac{M_1}{M^2} \cdot \frac{1}{|z|^2}$$

para $|z| \ge R$, ya que $p \ge 2$. Por lo tanto, podemos hacer $M = M_1/M_2$ en este caso.■

Ejemplo 4.3.2. *Evalúe*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

Solución. Aquí $P(x) = 1$ y $Q(x) = x^4 + 1$, así que las condiciones de la proposición 4.3.1 son satisfechas. Los polos de P/Q están localizados en las cuatro raíces de -1, a saber, $e^{\pi i/4}$, $e^{3\pi i/4}$, $e^{5\pi i/4}$, $e^{7\pi i/4}$. Estos polos son simples y únicamente los

dos primeros están en el semiplano superior. El residuo en cualquiera de estos puntos z_0 es $1/4z_0^3 = -z_0/4$ (véase la tabla 4.1.1, fórmula 4) y, por lo tanto,

$$\text{Res}(f, e^{\pi i/4}) + \text{Res}(f, e^{3\pi i/4}) = -\tfrac{1}{4}(e^{\pi i/4} + e^{3\pi i/4}) = -\tfrac{1}{4}e^{\pi i/4}(1 + e^{\pi i/2})$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)(1+i) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2i}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

Así que la respuesta es $(2\pi i)(-i)/2\sqrt{2} = \pi/\sqrt{2}$.

Algunas simples verificaciones, tal como el determinar que la respuesta debe ser real y positiva (porque $1/(x^4 + 1) \geq 0$ está en $\mathbf{R}$), pueden a menudo detectar errores de cálculo básicos. Nuestra integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

pudo haber sido evaluada usando el método de fracciones parciales.

Sin embargo, posteriormente, en esta sección, vamos a encontrar integrales que pueden evaluarse usando residuos pero para las cuales el método de fracciones parciales (y, para el caso, todas las técnicas elementales de integración) falla. ▼

La proposición 4.3.1 no se aplica en algunos casos importantes. Una fuente obvia de dificultad, es la posibilidad de singularidades en el eje real. Vamos a ver brevemente, en la subsección sobre el valor principal de Cauchy, como está situación puede ser a menudo salvada. Una fuente sutil más de problemas, es que una función que se comporta muy bien en el eje real podrá no tener el desarrollo requerido por la proposición en cualesquiera de los dos semiplanos. Un importante ejemplo de esto es la *función normal de probabilidad*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

El problema con esta función es que e^{-z^2} no tiene el comportamiento correcto en el límite conforme z se va a infinito. En ambas direcciones a lo largo del eje real se va a 0 más rápido que el recíproco de cualquier polinomio. Sin embargo, a lo largo de la línea de 45°, donde $\arg z = \pm\pi/4$ o $\pm 3\pi/4$, su valor absoluto es constante e igual a 1 y en ambas direcciones a lo largo del eje imaginario, crece más rápido que cualquier polinomio. No obstante, podemos evaluar la integral.

Proposición 4.3.3 (integral gaussiana)

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Esta fórmula es importante en probabilidad y en estadística, y en otras áreas de la matemática y aplicaciones. Nos la encontraremos otra vez en el capítulo 7, donde veremos un método para evaluarla usando la función gama. Quizá el método más directo, utiliza una doble integral; véase el ejercicio 21, capítulo 9 de J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Nueva York, W. H. Freeman and Co., 1974. Veremos un método para evaluarla indirectamente por medio de residuos, en los ejemplos resueltos al final de esta sección, después de relacionarla con otras dos interesantes integrales. (Este método y algunos otros, junto con comentarios históricos, están reunidos en D. Mitrinovic y J. Kečkić, *The Cauchy Method of Residues* (Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publ. Co., 1984, pp. 158-164.)

Transformadas de Fourier

Enseguida consideramos una técnica para evaluar integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx$, las cuales son llamadas *las transformadas seno y coseno de Fourier de* f. Si f es un función definida en el eje real para la cual las integrales tienen sentido, las dos integrales precedentes están relacionadas a la expresión

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

la cual define una nueva función llamada la *transformada de Fourier de* f. Es de gran importancia en ecuaciones diferenciales (debido al resultado del ejercicio 24, entre otras razones), física teórica, mecánica cuántica y en muchas otras áreas de la matemática y la ciencia, y hay una amplia bibliografía concerniente a esto. (Existen posibles variaciones en su definición. La integral puede ser multiplicada por una constante o puede aparecer en el exponente $-2\pi i\omega x$ en vez de sólo $-i\omega x$.) Si ω y $f(x)$ son reales y las transformadas seno y coseno de Fourier son las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx = \operatorname{Re} F(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\omega x)\, dx = -\operatorname{Im} F(\omega)$$

Si ω es real y f satisface algunas condiciones moderadas, éstas pueden evaluarse usando la siguiente proposición.

Proposición 4.3.4. *En la situación* (i) *o en la situación* (ii) *que siguen, la integral* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx$ *existe en el sentido de que* $\lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{i\omega x} f(x)dx$ *y* $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{\bullet} e^{i\omega x} f(x)\, dx$ *existen, y están dados por la fórmula correspondiente. Si* f(x) *es real para* x *real, entonces* $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)\, dx$ *y* $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x)dx$ *son iguales a su parte real e imaginaria, respectivamente.*

(i) $\omega > 0$. *Suponga que* f *es analítica en un conjunto abierto que contiene al semiplano superior* $H = \{z \mid \text{Im} z \geq 0\}$, *excepto por un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real. Suponga también que* $|f(z)| \to 0$ *conforme* $z \to \infty$ en H. (*Esto es, suponga que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una* R *tal que* $|f(z)| < \varepsilon$ *siempre que* $|z| \geq R$ *y* $z \in H$.) *Entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)dx = 2\pi i \sum \{\text{residuo de } e^{i\omega z} f(z) \text{ en H}\}$$

(ii) $\omega < 0$: *Si se satisfacen las condiciones de* (i) *con* H *reemplazada por el semiplano inferior* $L = \{z \mid \text{Im } z \leq 0\}$, *entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)dx = -2\pi i \sum \{\text{residuo de } e^{i\omega z} f(z) \text{ en L}\}$$

(iii) *Tanto* (i) *como* (ii) *son válidas si* $f = P/Q$, *donde* P *y* Q *son polinomios, el grado de* Q *es mayor que el de* P *y* Q *no tiene ceros en el eje real.*

Como con la proposición 4.3.1, veremos en la sección sobre el valor principal de Cauchy, cómo algunas veces la integral puede ser manejada cuando existen polos en el eje real. Note que las condiciones sobre f son mucho más fuertes que en la proposición 4.3.1. El factor adicional de $e^{i\omega x}$ es esencial para esto, y de hecho, en la proposición 4.3.1, no es cierto con $p = 1$.

Demostración. Para $\omega > 0$: Sea γ la curva mostrada en la figura 4.3.2, donde $y_1 > x_1, x_2 > 0$ y x_1, x_2, y_1 son escogidas lo suficientemente grandes para que γ contenga todos los polos de f en el semiplano superior. Por el teorema del residuo, $\int_\gamma e^{i\omega z} f(z)\, dz = 2\pi i \sum$ [residuos de $f(z)e^{i\omega z}$ en el semiplano superior].

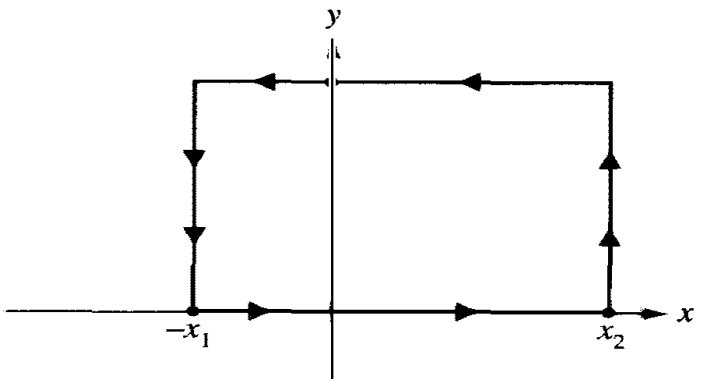


Figura 4.3.2. La curva γ usada para la demostración de la proposición 4.3.4.

Estimemos ahora los valores absolutos de las tres integrales

$$I_1 = \int_0^{y_1} e^{i\omega(x_2 + yi)} f(x_2 + yi) i\, dy$$

$$I_2 = \int_{x_2}^{-x_1} e^{i\omega(x+iy_1)} f(x+iy_1)\, dx$$

$$I_3 = \int_{y_1}^{0} e^{i\omega(-x_1+yi)} f(-x_1+iy) i\, dy$$

como sigue. Sea $\varepsilon > 0$ y escójase R como en (i). Sea

$$M_1 = \text{máx}\{|f(x_2+iy)| \text{ tal que } 0 \le y \le y_1\}$$
$$M_2 = \text{máx}\{|f(x+iy_1)| \text{ tal que } -x_1 \le x \le x_2\}$$
$$M_3 = \text{máx}\{|f(-x_1+iy)| \text{ tal que } 0 \le y \le y_1\}$$

Si $y_1 > x_1 > R$ y $y_1 > x_2 > R$, entonces $M_1 < \varepsilon$, $M_2 < \varepsilon$ y $M_3 < \varepsilon$. Entonces

$$|I_1| \le \int_0^{y_1} e^{-\omega y} |f(x_2+iy)|\, dy \le M_1 \int_0^{y_1} e^{-\omega y}\, dy = \frac{M_1}{\omega}(1 - e^{-\omega y_1}) \le \frac{M_1}{\omega}$$

Similarmente $|I_3| \le M_3/\omega$. Finalmente,

$$|I_2| \le \int_{-x_1}^{x_2} e^{-\omega y_1} |f(x+iy_1)| dx \le M_2\, e^{-\omega y_1}\, (x_2 + x_1)$$

Ya que $\omega > 0$, podemos hacer a y_1 lo suficientemente grande para que $e^{-\omega y_1}(x_1 + x_2) < \varepsilon$. Puesto que

$$\int_\gamma e^{i\omega z} f(z)\, dz = I_1 + I_2 + I_3 + \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\, dx$$

tenemos

$$\int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\, dx - 2\pi i \sum \{\text{residuos de } f(z)e^{i\omega z} \text{ en el semiplano superior}\} = -(I_1 + I_2 + I_3)$$

y por lo tanto,

$$\left| \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\, dx - 2\pi i \sum \{\text{residuos de } f(z)e^{i\omega z} \text{ en el semiplano superior}\} \right|$$

$$\le \frac{M_1}{\omega} + \frac{M_3}{\omega} + M_2\, e^{-\omega y_1}(x_1 + x_2) < \frac{2\varepsilon}{\omega} + \varepsilon^2$$

puesto que ε es arbitraria,

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\, dx$$

existe y tiene el valor requerido. Al estudiante se le deja el ejercicio de demostrar, como un hecho del cálculo, que la existencia de este doble límite es lo mismo que la existencia de

$$\lim_{x_2 \to \infty} \int_0^{x^2} e^{i\omega x} f(x)\, dx$$

y

$$\lim_{x_1 \to \infty} \int_{-x_1}^{0} e^{i\omega x} f(x)\, dx$$

Así, hemos demostrado la existencia (en el sentido condicional) de

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx$$

y que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx = 2\pi i\, \Sigma \{\text{residuos de } f(z)e^{i\omega z} \text{ en el semiplano superior}\}$.

La parte (iii), ara $f(z) = P(x)/Q(x)$, donde P y Q son polinomios con grado $Q(x) \geq 1$ + grado $P(x)$, se sigue como en la demostración de la proposición 4.3.1: Para $|z| \geq 1$ existe una $M_1 > 0$ tal que $|P(z)| \leq M_1 |z|^n$ donde n = grado $P(x)$, y existe una $R > 1$ y una $M_2 > 0$ tales que, para $|z| \geq R$ tenemos que $|Q(z)| \geq M_2 |z|^{n+1}$. Por lo tanto,

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M_1}{M_2 |z|}$$

para $|z| \geq R$; y las partes (i) y (iii) son satisfechas.

La demostración de la parte (ii) (el caso donde $\omega < 0$) es similar a la demostración precedente, excepto que la curva apropiada es un rectángulo en el semiplano inferior. ■

Observe que $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x\, f(x)\, dx$ *no* es $2\pi i\, \Sigma \{\text{residuos de } (\cos \omega z)\, f(z) \text{ en el semiplano superior}\}$. (Esta fórmula es en realidad falsa.) Las hipótesis de las proposiciones 4.3.1 y 4.3.4 simplemente no se aplican, una $|f(z)| \leq M/|z|^2$.

Existe otro método para demostrar esta proposición, el cual el estudiante interesado puede desarrollar. Está basado en el *lema de Jordan*: Si $f(z) \to 0$ conforme $|z| \to \infty$, uniformemente en el arg z, $0 \leq \arg z \leq \pi$, y si $f(z)$ es analítica cuando $|z| > c$, c una constante, $0 \leq \arg z \leq \pi$, entonces $\int_{\gamma_\rho} e^{i\omega z} f(z)\, dz \to 0$ conforme $\rho \to \infty$, donde $\gamma_\rho(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. (Consúltese E. T. Whittaker y G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis,* Nueva York; Cambridge University Press, 1927, p. 115.

Ejemplo 4.3.5. *Muestre que para* $b > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2}\, dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b}$$

Solución. Ya que $(\cos x)/(x^2 + b^2)$ es una función par, tenemos

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2}\, dx$$

Debemos encontrar los residuos de $e^{iz}/(z^2 + b^2)$ en el semiplano superior. El único polo en el semiplano superior está en b_i y el polo es simple, por lo tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2 + b^2}, ib\right) = \frac{e^{-b}}{2ib}$$

(Tabla 4.1.1, fórmula 4, página 270), y en consecuencia

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2}\, dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i \left(\frac{e^{-b}}{2ib}\right)\right] = \frac{\pi e^{-b}}{b}$$

Integrales trigonométricas

Proposición 4.3.6. *Sea* R(x, y) *una función racional de* x, y *cuyo denominador no se anula en el círculo unitario. Entonces*

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 2\pi i \sum [\text{residuos de } f(z) \text{ dentro del círculo unitario}]$$

donde

$$f(z) = \frac{\mathrm{R}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{iz}$$

Demostración. Si $z = x + iy$ está en el círculo unitario, entonces

$$x = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

Ya que R no tiene polos en el círculo unitario, tampoco los tiene f, así que si γ es el círculo unitario, tenemos, por el teorema del residuo,

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum (\text{residuos de } f \text{ dentro de } \gamma)$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, ie^{i\theta}\, d\theta = \int_\gamma f$$

lo cual demuestra el teorema. ■

Si usted olvida la fórmula para f, siempre puede empezar con $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$ y seguir el método de la demostración precedente (esto es, escribir $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$, y así sucesivamente). La fórmula para f resultará entonces evidente.

Ejemplo 4.3.7. *Evalúe*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} \quad a > 0,\ a \neq 1$$

Solución. Por la proposición 4.3.6,

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{iz\left[1 + a^2 - \frac{2a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]}$$

$$= \int_\gamma \frac{dz}{i[-az^2 + (1 + a^2)z - a]} = \int_\gamma \frac{i\,dz}{(z - a)(az - 1)}$$

Los polos del integrando están en $z = a$ y $z = 1/a$. Primero, suponga que $a < 1$; el polo dentro del círculo está entonces en $z = a$. El residuo es

$$\frac{i}{a^2 - 1}$$

Si suponemos que $a > 1$, el integrando tiene un polo en $z = 1/a$ y el residuo es

$$\frac{i}{a(1/a - a)} = \frac{i}{1 - a^2}$$

Así

$$I = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{1 - a^2} & \text{si } a < 1 \\[2ex] \dfrac{2\pi}{a^2 - 1} & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Las tres últimas proposiciones dan cuenta de algunas de las clases más comunes de integrales. Ahora vamos a integrales más especializadas. La primera involucra la función multivaluada $z \mapsto z^a$.

Integrales del tipo $\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\,dx$: Transformadas de Mellin

Proposición 4.3.8. *Sea* f *analítica en* **C**, *excepto para un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está en el eje real estrictamente positivo (esto es, todas están en el complemento del conjunto* $\{x + iy \mid y = 0 \text{ y } x > 0\}$). *Sea* a >

0 *con la restricción de que* a *no es un entero, y suponga que* (i) *existen constantes* $M_1, R_1 > 0$ *y* $b > a$ *tales que, para* $|z| \geq R_1$, $|f(z)| \leq M_1/|z|^b$; y (ii) *existen constantes* M_2, R_2 *y* d, *con* $M_2, R_2 > 0$ y $0 < d < a$, *tales que, para* $0 < |z| \leq R_2$, $|f(z)| \leq M_2/|z|^d$.

Entonces la integral $\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\, dx$ *existe (en el sentido de ser absolutamente convergente), y*

$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\, dx = -\frac{\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(a\pi)} \sum \{\text{residuos de } z^{a-1} f(z) \text{ en las singularidades de f, excluyendo el residuo en 0}\}$$

Aquí $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ *usando la rama* $0 < \arg z < 2\pi$

La demostración de este resultado es típico del enfoque que se tomó cuando se trató con puntos rama.

Demostración. La existencia, en el sentido de integrabilidad absoluta, de $\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\, dx$ se sigue si utilizamos las condiciones asumidas $|f(x)| \leq M_1/x^b$ para x grande, y $|f(x)| \leq M_2/x^d$ para x pequeña, junto con el criterio de comparación para integrales. La curva que vamos a usar, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, se ilustra en la figura 4.3.3. El radio del círculo incompleto γ_1 es r; el radio del círculo incompleto γ_3 es $\varepsilon > 0$; y γ_4 y γ_2 forman cada uno un ángulo $\eta > 0$ con el eje positivo x. Escogemos ε suficientemente pequeña, r suficientemente grande, y η suficientemente pequeña de

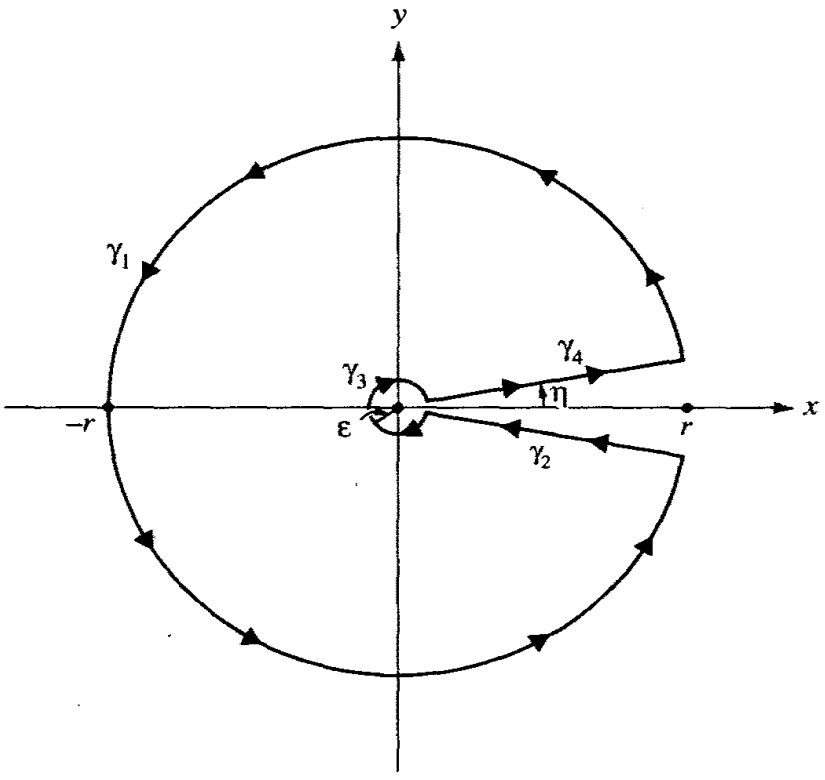


Figura 4.3.3. $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

modo que (i) $\varepsilon \le R_2$, (ii) $r \ge R_1$; y (iii) $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ encierre a todos los polos de $f(z)$ excluyendo al polo en 0.

Por z^{a-1} queremos decir $e^{(a-1)\log z}$, donde $\log z$ denota la rama del log con $0 < \arg z < 2\pi$. Sean $I = \int_\gamma z^{a-1} f(z)\, dz$, $I_1 = \int_{\gamma_1} z^{a-1} f(z)\, dz$, $I_2 = \int_{\gamma_2} z^{a-1} f(z)\, dz$, $I_3 = \int_{\gamma_3} z^{a-1} f(z)\, dz$ y $I_4 = \int_{\gamma_4} z^{a-1} f(z) dz$, así que $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, Por el teorema del residuo,

$$I = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } z^{a-1} f(z), \text{ excluyendo el residuo en } 0\}$$

Claramente, las singularidades de $z^{a-1} f(z)$ son las mismas que las de $f(z)$, excepto posiblemente el 0.

Primero vamos a mostrar que $I_3 \to 0$ conforme $\varepsilon \to 0$, e $I_1 \to 0$ conforme $r \to \infty$, independientemente de η. Recuerde que cuando a es real $|z^{a-1}| = |z|^{a-1}$, así que obtenemos

$$|I_3| \le \int_{\gamma_3} |z^{a-1}||f(z)||dz| \le M_2 \int_{\gamma_3} \frac{|z|^{a-1}}{|z|^d} |dz|$$

$$= M_2 \varepsilon^{a-d-1} l(\gamma_3) < 2\pi M_2 \varepsilon^{a-d}$$

También,

$$|I_1| \le \int_{\gamma_1} |z^{a-1}||f(z)||dz| \le M_1 \int \frac{|z|^{a-1}}{|z|^b} |dz|$$

$$< 2\pi M_1 r^{a-b}$$

Estas estimaciones muestran que $I_3 \to 0$ conforme $\varepsilon \to 0$, e $I_1 \to 0$ conforme $r \to \infty$, independientemente de η.

Enseguida vamos a estudiar el comportamiento en el límite de I_2 e I_4, para ε y r fijos pero con $\eta \to 0$. Note que no hay razón para esperar que I_2 y $-I_4$ converjan al mismo valor conforme $\eta \to 0$ (y en efecto no lo hacen); esto es debido a la discontinuidad en la función z^{a-1} conforme cruzamos el eje positivo x. (El eje positivo x es una línea rama.) Por definición $I_2 = \int_r^\varepsilon (te^{i(2\pi-\eta)})^{a-1} f(te^{i(2\pi-\eta)}) e^{i(2\pi-\eta)} dt$.

Se le deja al estudiante el ejercicio de demostrar que conforme $\eta \to 0$, tenemos

$$(te^{i(2\pi-\eta)})^{a-1} f(te^{i(2\pi-\eta)}) e^{i(2\pi-\eta)} \to t^{a-1} e^{2\pi i a} f(t)$$

uniformemente en $[\varepsilon, r]$; por lo tanto, conforme $\eta \to 0$,

$$I_2 \to \int_r^\varepsilon t^{a-1} e^{2\pi i a} f(t)\, dt$$

Similarmente,

$$I_4 \to \int_\varepsilon^r t^{a-1} f(t)\, dt$$

por lo tanto

$$I_2 + I_4 \to (1 - e^{2\pi ia}) \int_\varepsilon^r t^{a-1} f(t)\, dt$$

$$= -2ie^{\pi ia}(\operatorname{sen} \pi a) \int_\varepsilon^r t^{a-1} f(t)\, dt$$

Suponga que damos $\delta > 0$. Podemos escoger r suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña para que

$$\left| \int_\varepsilon^r t^{a-1} f(t)\, dt - \int_0^\infty t^{a-1} f(t)\, dt \right| < \frac{\delta}{4}$$

Más aún, podemos escoger r más grande y ε más chica si es necesario, de manera que

$$\frac{|I_1|}{|2ie^{\pi ia} \operatorname{sen} \pi a|} < \frac{\delta}{4} \qquad \text{y} \qquad \frac{|I_3|}{|2ie^{\pi ia} \operatorname{sen} \pi a|} < \frac{\delta}{4}$$

Asimismo, podemos escoger η suficientemente chico para que

$$\left| \frac{I_2 + I_4}{-2ie^{\pi ia} \operatorname{sen} \pi a} - \int_\varepsilon^r t^{a-1} f(t)\, dt \right| < \frac{\delta}{4}$$

Esto implica que

$$\left| \int_0^\infty t^{a-1} f(t)\, dt - \frac{I}{-2ie^{\pi ia} \operatorname{sen} \pi a} \right| < \delta$$

(por qué?). Ya que δ fue arbitrario, tenemos

$$\int_0^\infty t^{a-1} f(t)\, dt = \frac{I}{-2ie^{\pi ia} \operatorname{sen} \pi a}$$

$$= \frac{-\pi e^{-\pi ia}}{\operatorname{sen} \pi a} \sum \{\text{residuos de } z^{a-1} f(z) \text{ excluyendo el residuo en } 0\}. \blacksquare$$

El estudiante debe verificar el siguiente corolario.

Corolario 4.3.9. *Las hipótesis de la proposición* 4.3.8 *se satisfacen si* $f(z) = P(z)/Q(z)$ *para polinomios* P *de grado* p *y* Q *de grado* q, *que satisface las siguientes dos condiciones:*

(i) $0 < a < q - p$.

(ii) *Si* n_Q *es el orden del* 0 *de* Q *en* $z = 0$ (*con la convención de que* $n_Q = 0$ *si* $Q(0) \neq 0$) *y si* n_P *es el orden del* 0 *de* P *en* $z = 0$, *entonces* $n_Q - n_P < a$. (Esta condición se satisface, por ejemplo, si $n_Q = 0$.

Ejemplo 4.3.10. *Demuestre que para* $0 < a < 2$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\,\text{sen}\,(a\pi/2)}$$

Solución. Con esta restricción sobre a, el corolario se satisface (aquí $q = 2$, $p = 0$) y así

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^2}\,dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\text{sen}\,(a\pi)} \sum \left(\text{residuo de } \frac{z^{a-1}}{1+z^2}\right)$$

Los polos de $1/(1+z^2)$ están en $\pm i$ y son simples. Por lo tanto

$$\text{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{1+z^2}, i\right) = \frac{i^{a-1}}{2i} \qquad \text{y} \qquad \text{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{1+z^2}, -i\right) = -\frac{(-i)^{a-1}}{2i}$$

y la suma es

$$\frac{i^{a-1} - (-i)^{a-1}}{2i}$$

Calculamos $i^{a-1} = e^{(a-1)\log i} = e^{(a-1)\pi i/2}$ y $(-i)^{a-1} = e^{(a-1)(3\pi i/2)}$. (Recuerde que debemos escoger $\arg(-i)$ de tal manera que $0 < \arg(-i) < 2\pi$.) Así

$$\frac{i^{a-1} - (-i)^{a-1}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{(a-1)\pi i/2} - e^{(a-1)3\pi i/2}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{a\pi i/2} + e^{3a\pi i/2}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\, e^{a\pi i}\left(e^{a\pi i/2} + e^{-a\pi i/2}\right) = -e^{a\pi i}\cos\frac{a\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi\cos\,(a\pi/2)}{\text{sen}\,(a\pi)}$$

Pero $\text{sen}\,(2\phi) = 2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi$, así que esto resulta $\pi/[2\,\text{sen}(a\pi/2)]$, como se quería. ■

Valor principal de Cauchy

Suponga que $f(x)$ es continua sobre la línea real $\mathbf{R}$ excepto en el punto x_0. Entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ no necesariamente está definida. Recordemos, del cálculo, una manera de dar una definición que tenga sentido. Considere

$$\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\eta}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{para } \varepsilon > 0 \text{ y } \eta > 0$$

(suponiendo que ambas integrales son convergentes para cada ε y η) y hágase $\varepsilon \to 0$ y $\eta \to 0$. Si cada límite existe, decimos que la integral es *convergente*. Debemos tener cuidado cuando usemos esta definición en la resolución de ejemplos. Por ejemplo, suponga que consideramos

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} = 0$$

Por otro lado,

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{2\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2(2\varepsilon)^2} = -\frac{3}{8\varepsilon^2} \to -\infty$$

conforme $\varepsilon \to 0$. Así, vemos que podemos obtener diferentes valores para $\int_{-\infty}^{\infty} (1/x^3)\,dx$, dependiendo de como ε y η se aproximan a 0; en este ejemplo, las integrales $\int_{0}^{\infty} (1/x^3)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{0} (1/x^3)\,dx$ no son convergentes.

Vamos a escoger una manera particular, más restrictiva, de hacer que ε y η se aproximen a 0; el camino simétrico, tomar $\varepsilon = \eta$ Encontraremos que al hacer esto, podemos aplicar el teorema del residuo en la evaluación de tales integrales. La definición que sigue es ligeramente más general que la precedente, en el sentido que se permite un número finito de discontinuidades sobre el eje real. Sea f continua en $\mathbf{R}$ excepto para un número finito de puntos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Si $\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx$ es convergente para cualquier $\varepsilon > 0$, si $\int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente para cualquier $\varepsilon > 0$, y si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx \right]$$

existe y es finito, entonces llamamos a este límite el *valor principal de Cauchy*, que se abrevia V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Observe que si la integral es convergente en todos estos puntos, recobramos el valor usual de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Sin embargo, como lo muestra el ejemplo previo, el valor principal de Cauchy puede existir aun cuando las integrales no converjan en el sentido usual.

La técnica general que se utiliza para evaluar el valor principal de Cauchy de una gran clase de integrales, es la siguiente. Pedimos que $f(z)$ esté definida y sea analítica en $\mathbf{C}$, con un número finito de singularidades aisladas, algunas de las cuales pueden estar en el eje real, digamos en los puntos $x_1, \ldots, x_n$, donde $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Las restantes están fuera del eje real. Vamos a considerar la curva γ mostrada en la figura 4.3.4. En esta figura, el radio r del semicírculo grande se escogió suficientemente grande y el radio $\varepsilon > 0$ de los semicírculos pequeños se escogió suficientemente pequeño para que γ encerrara a todos los polos de f en el semiplano superior, sin incluir a aquellos sobre el eje real. También pedimos que la integral alrededor del semicírculo se aproxime a 0 conforme $r \to \infty$ y que los límites de las integrales alrededor

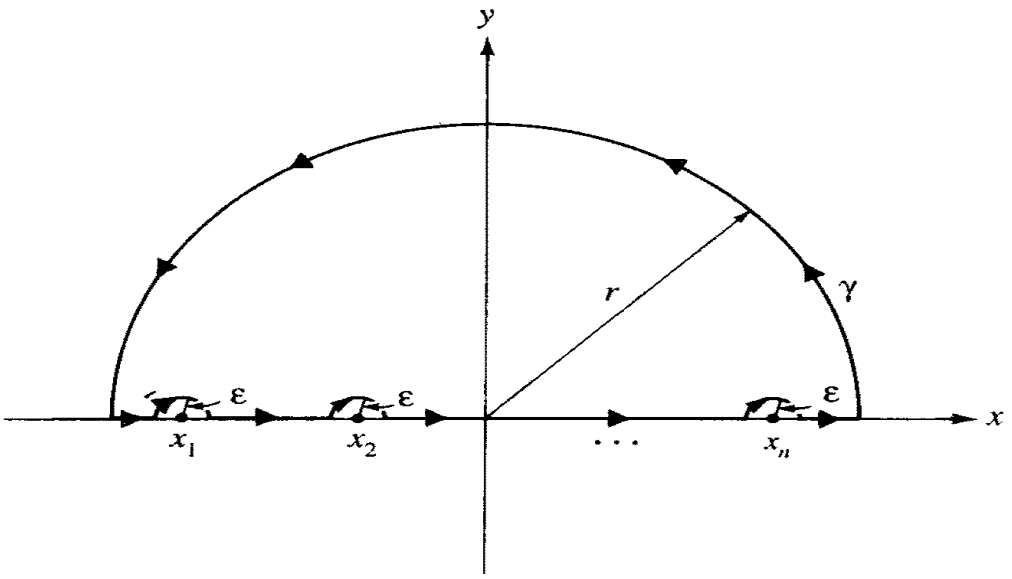


Figura 4.3.4. La curva γ para evaluar el valor principal de Cauchy.

de los semicírculos pequeños existan y sean finitos conforme $\varepsilon \to 0$. Estos requerimientos, junto con el hecho de que $\int_\gamma f = 2\pi i \sum$ (residuos en el semiplano superior, fuera del eje real), aseguran la existencia de V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ y nos permiten calcular su valor.

Estos requerimientos son satisfechos en la proposición 4.3.11, en la cual se deduce una fórmula explícita para V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Este teorema se reduce a la proposición 4.3.1 en el caso en el que ningún polo esté en el eje real.

Proposición 4.3.11. *Sea* f *analítica en un conjunto abierto que contiene al semiplano superior* $H = \{z \mid \text{Im } z \geq 0\}$ *excepto para un número finito de singularidades aisladas. Sean* $x_1, \ldots, x_m$ *singularidades sobre el eje real y suponga que éstos son polos simples. Si*

(i) f *satisface la condición de la parte* (i) *de la proposición* 4.3.1 *(excepto para los polos sobre el eje)*

(ii) $f(z) = e^{iaz}g(z)$ *con* $a > 0$ *y* g *satisfaciendo la condición de la parte* (i) *de la proposición* 4.3.4, entonces V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *existe y*

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum (\text{residuos de f en el semiplano superior Im } z > 0) + \pi i \sum \{\text{residuos de f sobre el eje x}\}$$

Naturalmente, existen resultados correspondientes para el plano inferior.

Proposición 4.3.12. *Sea* f *analítica en un conjunto abierto que contiene al semiplano inferior* $L = \{z \mid \text{Im } z \leq 0\}$ *excepto para un número finito de singularidades aisladas y suponga que aquellos polos sobre el eje real son simples. Si*

(i) f *satisface la condición de la parte* (ii) *de la proposición* 4.3.1.
(ii) $f(z) = e^{iaz}g(z)$ *con* $a < 0$ y g *satisfaciendo la condición de la parte* (iii) *de la proposición* 4.3.4, *entonces*

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum \{\text{residuos de f en el semiplano abierto Im } z < 0\}$$
$$-\pi i \sum \{\text{residuos de f sobre el eje real}\}$$

Observación. La siguiente demostración asume que la condición (i) se satisface. La demostración que asume la condición (ii) difiere en un sentido: los tres lados del rectángulo grande en el semiplano superior podrían ser más apropiados que el semicírculo mayor, justo como en la proposición 4.3.4. Note que $\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx$ y $\int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx$ son integrales convergentes para toda $\varepsilon > 0$, en el caso en que la condición (ii) se cumple. Esta conclusión se sigue de la demostración de la proposición 4.3.4.

Si consideramos la curva γ en la figura 4.3.4, vemos que para demostrar la proposición 4.3.11, necesitamos saber cómo manejar integrales sobre círculos pequeños. Este resultado es proporcionado por el siguiente lema.

Lema 4.3.13. *Si* f(z) *tiene un polo simple en* z_0 *y* γ_ε *es una porción de un arco circular de radio* ε *y ángulo* α *(véase al figura 4.3.5). Entonces*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f = \alpha i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

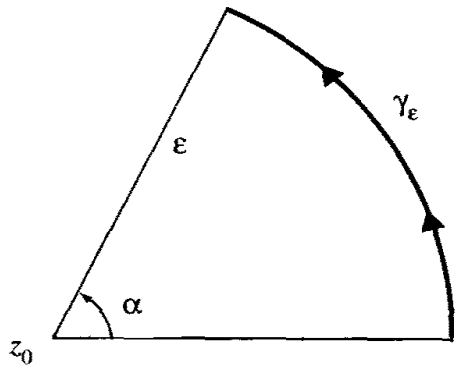


Figura 4.3.5. La curva γ_ε

Demostración del lema. Cerca de z_0 podemos escribir $f(z) = b_1/(z - z_0) + h(z)$, donde h es analítica y $b_1 = \operatorname{Res}(f, z_0)$ (¿por qué). Entonces

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{b_1}{z - z_0}\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon} h(z)\,dz$$

Por lo tanto,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{b_1}{z - z_0}\, dz = b_1 \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \alpha} \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}\, d\theta = b_1 \alpha i$$

Aquí $\gamma_\varepsilon(\theta) = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$, $\alpha_0 \leq \theta \leq \alpha_0 + a$ También puesto que h es analítica, es acotada cerca de z_0, digamos por M, y así

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} h(z)\, dz \right| \leq M l(\gamma_\varepsilon) = M \alpha \varepsilon \to 0$$

conforme $\varepsilon \to 0$. El lema se sigue. ▼

Demostración de la proposición 4.3.11. Sea $\gamma = \gamma_r + \gamma_1 + \cdots + \gamma_m + \tilde{\gamma}$, donde γ_r es la porción semicircular de radio r; $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ son las porciones semicirculares de radio ε; y $\tilde{\gamma}$, consiste de las porciones rectilíneas de γ a lo largo del eje real.

Por el teorema del residuo, $\int_\gamma f = 2\pi i \, \Sigma$ {residuos en el semiplano superior}. En seguida observe que $\int_{-\infty}^{x_1 - \varepsilon} f(x)\, dx$ y $\int_{x_m + \varepsilon}^{\infty} f(x)\, dx$ son convergentes para toda $\varepsilon > 0$, por el criterio de comparación para integrales, junto con la condición de que $|f(z)| \leq M/|z|^p$ para $|z|$ grande. Así, $\lim_{\gamma \to \infty} \int_{\tilde{\gamma}} f$ existe. Por lo tanto, $2\pi i \, \Sigma$ {residuos en el semiplano superior} $= \int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f + \int_{\gamma r} f + \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma i} f$. Como en la proposición 4.3.1, $\int_{\gamma r} f \to 0$ conforme $r \to \infty$, debido a la condición de que $|f(z)| \leq M/|z|^p$ para $|z|$ grande, donde Im $z \geq 0$. Así, $\sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma i} f + \lim_{\gamma \to \infty} \int_{\tilde{\gamma}} f = 2\pi i \, \Sigma$ {residuos en el semiplano superior}. Por el lema, $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_j} f = -\pi i$ Res (f, x_j), $j = 1, 2, \ldots, m$. En consecuencia, $\lim_{\varepsilon \to 0} (\lim_{r \to \infty} \int_{\tilde{\gamma}} f)$ existe y es igual a $2\pi i \, \Sigma$ {residuos en el semiplano superior} + $\pi i \, \Sigma$ {residuos sobre el eje real}. Pero, por definición, el valor principal de Cauchy es precisamente $\lim_{\varepsilon \to 0} (\lim_{r \to \infty} \int_{\tilde{\gamma}} f)$, y, por lo tanto, la proposición está demostrada. ■

La demostración de la proposición 4.3.12 es análoga excepto porque usa una curva a través del semiplano inferior, como en la figura 4.3.6. Observe que aunque

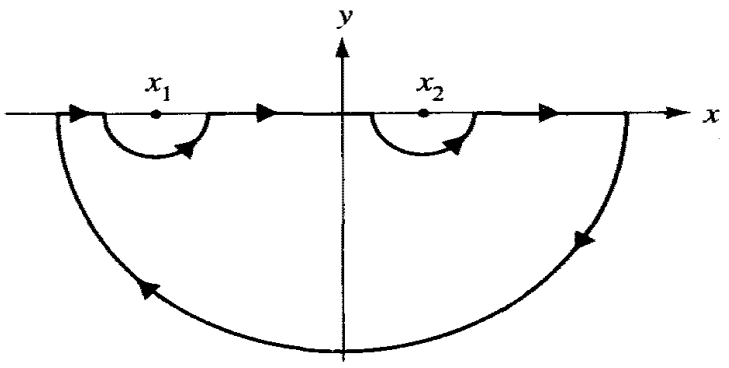


Figura 4.3.6. *Curva usada para la demostración de la proposición 4.3.12.*

el contorno en conjunto está orientado negativamente (esto es, orientado en el sentido de las manecillas del reloj) con respecto a su interior, los semicírculos pequeños alrededor de los polos sobre el eje real, *van en sentido contrario al de las manecillas del reloj*, con respecto de esos puntos.

Ejemplo 4.3.14. *Considere* (sen x)/x, *el cual está definido de manera que vale* 1 *cuando* x = 0. *Entonces* (sen x)/x *está definida y es continua sobre* **R.** *Muestre que* $\int_0^\infty$ [(sen x)/x] dx *existe y calcule su valor.*

Solución. La integral

$$\mathrm{I} = \mathrm{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$$

existe por la proposición 4.3.11, por lo tanto,

$$\mathrm{Im}\, I = \mathrm{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

existe. Pero

$$\mathrm{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

por la continuidad de (sen x)/x en $x = 0$. La existencia de $\int_{-\infty}^{\infty}[(\operatorname{sen} x)/x]\, dx$ implica la existencia de $\int_0^\infty [(\operatorname{sen} x)/x]\, dx$ ya que (sen x)/x es una función par, y así

$$\mathrm{Im}\, I = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

A partir del resultado de la proposición 4.3.11 tenemos $I = \pi i$ (residuo de e^{iz}/z en $z = 0) = \pi i$. Por tanto

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \blacktriangledown$$

Note que si usamos el integrando e^{-iz}/z, entonces este ejemplo satisfaría las condiciones de la proposición 4.3.12, pero no las de la proposición 4.3.11. Aun cuando tenga residuo 1 en $z = 0$, el signo menos entra en juego y da

$$\mathrm{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x}\, dx = -\pi i$$

Pero esto es razonable ya que Im (e^{-ix}/x) = [sen$(-x)$]/x = $-$(sen x)/x, y así esperaríamos que la integral fuera negativa.

Análisis adicional de integrales que involucran funciones multivaluadas

Por el resultado de la proposición 4.3.8, hemos visto que cuando tratamos con funciones multivaluadas, debemos escoger una curva apropiada para una rama de la función. Este requerimiento puede ilustrarse mejor con un ejemplo.

Ejemplo 4.3.15. *Use residuos para demostrar que*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}$$

Esta integral no puede ser evaluada directamente por ninguna de las fórmulas que hemos desarrollado. Las técnicas básicas que se usan en este problema, sin embargo, son similares a aquellas que ya hemos aplicado. Lo siguiente es un bosquejo, los detalles se dejan al estudiante.

Solución. Recordemos que un dominio apropiado de $\sqrt{z^2-1}$ consiste de $\mathbf{C}$ menos las semilíneas $x \geq 1$ y $x \leq -1$. Considere la curva γ en la figura 4.3.7, que consiste de los círculos incompletos de radio r alrededor del 0 y de radio ε alrededor de 1 y -1, y las líneas horizontales que distan δ del eje real. La función $1/z\sqrt{z^2-1}$ está definida y es analítica en la región $\mathbf{C}$ menos las semirrectas $x \geq 1$ y $x \leq -1$ excepto para un polo simple en 0.

Esto se lleva a cabo como sigue: Considere $\sqrt{z^2-1}$ como el producto $\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$, en el cual el primer factor utiliza una rama de la raíz cuadrada definida con un corte de rama de $+1$ a $-\infty$ como

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{z-1} \\ &= \sqrt{|z-1|}e^{i[\arg(z-1)]/2} \quad \text{para} \quad -\pi < \arg(z-1) \leq \pi \end{aligned}$$

y el segundo factor usa una rama de la raíz cuadrada con un corte de rama de -1 a $+\infty$ como

$$\begin{aligned} g(z) &= \sqrt{z+1} \\ &= \sqrt{|z+1|}e^{i[\arg(z+1)]/2} \quad \text{para} \quad 0 \leq \arg(z+1) < 2\pi \end{aligned}$$

(Véase la figura 4.3.8). El producto $f(z)g(z)$ da una raíz cuadrada para z^2-1, la cual aparenta ser analítica únicamente en el plano con todo el eje real suprimido. Al cruzar el corte de rama de cada factor, cambia el signo de ese factor. Así, el producto cambia de signo si cruzamos el eje en un punto x con $|x| > 1$. Sin embargo, al cruzar en el región $-1 < x < 1$ cambian ambos factores, así que el producto no cambia sino que es continuo a través de este segmento. Así, es analítica a través de este segmento, por el corolario del teorema de Morera, establecido en el ejemplo resuelto 2.4.17. Podemos usar esta función para definir nuestro integrando de manera que sea analítica en $\mathbf{C}\setminus\{z \mid \text{Im } z = 0 \text{ y } |\text{Re } z| \geq 1\}$. Por el teorema del residuo,

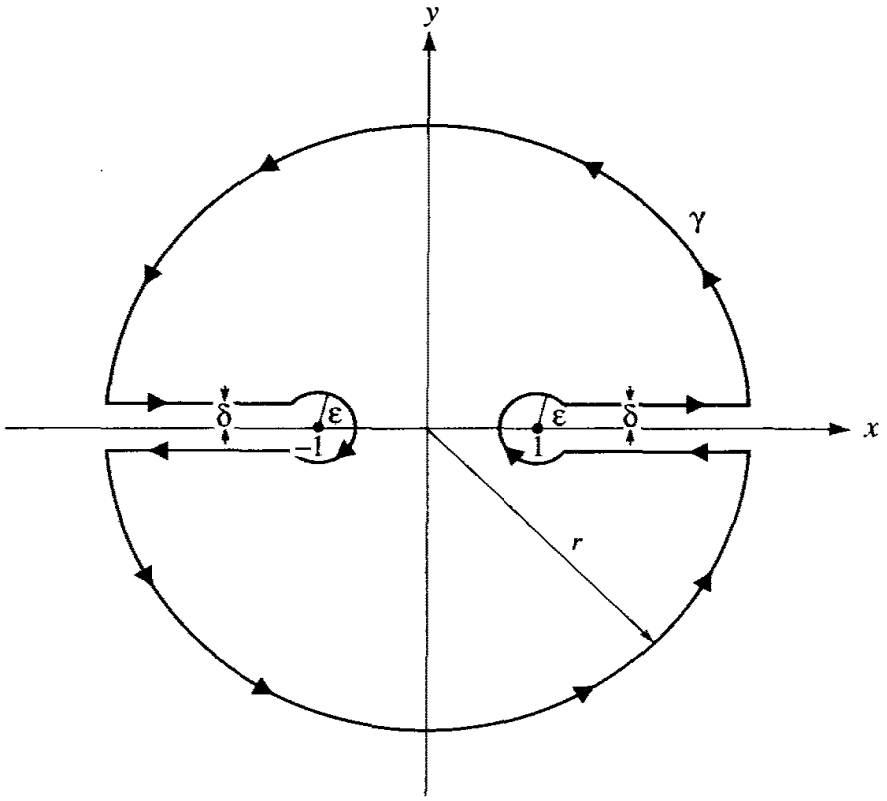


Figura 4.3.7. La curva γ.

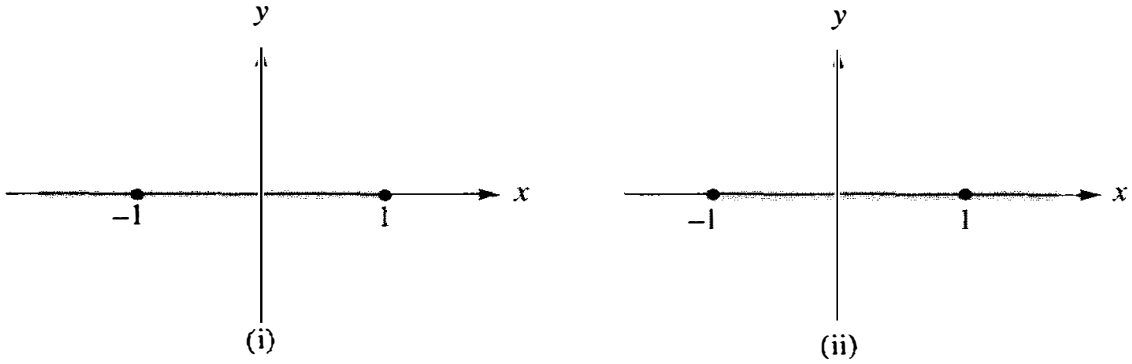


Figura 4.3.8. Cortes de rama que se necesitan para $\sqrt{z^2-1}$; (i) para $\sqrt{z-1}$; (ii) para $\sqrt{z+1}$.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}, 0\right) = 2\pi$$

El estudiante debe verificar que *a*) la integral sobre el semicírculo incompleto de radio r se aproxima a 0 conforme $r \to \infty$ (el integrando es menor o igual que $M/|z|^2$ para $|z|$ grande), *b*) la integral sobre los círculos incompletos de radio ε se aproxima a cero conforme $\varepsilon \to 0$ (la integral es acotada por una constante por $\varepsilon/\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}$ en esos círculos), y *c*) para ε y r fijas, la integral sobre las líneas horizontales se aproxima a

$$4\int_{1+\varepsilon}^{r} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Tabla 4.3.1. Evaluación de Integrales definidas.

Tipo de integral	*Condiciones*	*Fórmula*
1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	$f(z)$ no tiene polos en el eje real; un número finito de polos en C; $\lvert f(z)\rvert \le M/\lvert z\rvert^2$ para $\lvert z\rvert$ grande	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } f \text{ en}\\ \text{el semiplano superior}\end{matrix}\right\}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$	P, Q polinomios; grado $Q \ge 2$ + grado P; Q no tiene ceros reales	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } P/Q \text{ en}\\ \text{el semiplano superior}\end{matrix}\right\}$
3a. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$	$\omega > 0$; $\lvert f(z)\rvert \le M/\lvert z\rvert$ para $\lvert z\rvert$ grande y ningún polo de f sobre el eje real, o $f(z) = P(z)/Q(z)$ donde grado $Q(z) \ge 1$ + grado $P(z)$ y Q no tiene ceros reales	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx = I = 2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } e^{i\omega z} f(z)\\ \text{en el semiplano superior}\end{matrix}\right\}$ Si $\omega < 0$, use $-\sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos en el semiplano}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$
b. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)\,dx$		$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)\,dx = \operatorname{Re} I$
$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x)\,dx$	f real en el eje real	$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x)\,dx = \operatorname{Im} I$ Si $\omega < 0$ use el semiplano inferior, como arriba
4. $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$	R racional y $R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ continua en θ. (Sin polos en el círculo unitario.)	$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } f\\ \text{dentro del círculo unitario}\end{matrix}\right\}$ $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$
5. $\int_0^{\infty} x^{a-1} f(x)\,dx$	$a > 0$ y f tiene un número finito de polos, ninguno en el eje real positivo; $\lvert f(z)\rvert \le M/\lvert z\rvert^b$, $b > a$, para $\lvert z\rvert$ grande, y $\lvert f(z)\rvert \le M/\lvert z\rvert^d$, $d < a$, para $\lvert z\rvert \to 0$ *o* $f = P/Q$, y Q no tiene ceros en el eje real positivo. $0 < a <$ grado Q–grado P y $n_Q - n_P < a$, donde n_Q = orden del cero de Q en 0 y n_P = orden del cero de P en 0.	$\int_0^{\infty} x^{a-1} f(x)\,dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(\pi a)} \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } z^{a-1} f(z) \text{ en}\\ \text{los polos de } f \text{ excluyendo}\\ \text{a } 0\end{matrix}\right\}$ al usar la rama $0 < \arg z < 2\pi$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	Las mismas que en 1 excepto que se permiten polos simples en el eje x.	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos en el semiplano}\\ \text{superior}\end{matrix}\right\} + \pi i \sum \{\text{residuos en el eje } x\}$
7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$	Las mismas que en 2 excepto que se permiten polos simples en el eje x.	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos en el semiplano}\\ \text{superior}\end{matrix}\right\} + \pi i \sum \{\text{residuos en el eje } x\}$

Tabla 4.3.1. (*Continuación.*)

Tipo de integral	*Condiciones*	*Fórmula*
8a. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$	Las mismas que en 3 excepto que se permiten polos simples en el eje x.	(i) $\omega > 0$: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx = I$ $= 2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } e^{i\omega z} f(z) \\ \text{en el semiplano superior}\end{matrix}\right\}$ $+ \pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } e^{i\omega z} f(z) \\ \text{en el eje } x\end{matrix}\right\}$ (ii) $\omega < 0$: $I = -2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } e^{i\omega z} f(z) \\ \text{en el semiplano inferior}\end{matrix}\right\}$ $- \pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuos de } e^{i\omega z} f(z) \\ \text{en el eje } x\end{matrix}\right\}$
b. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)\,dx$ $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x)\,dx$	f real sobre el eje real; se permiten polos simples en el eje real, como en 8a.	$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) f(x)\,dx = \operatorname{Re} I$ $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\omega x) f(x)\,dx = \operatorname{Im} I$ Si $\omega < 0$, use el semiplano inferior como en 8a.

Estos tres hechos, junto con el hecho de que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} = 2\pi$$

muestran que

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

existe y es igual a $\pi/2$. ▼

Ejemplos resueltos

4.3.16. *Evalúe*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

Solución. Esta integral puede evaluarse usando la proposición 4.3.1, pero tendríamos que considerar todos los polos del semiplano superior. Si en su lugar usamos el contorno indicado en la figura 4.3.9, necesitamos considerar sólo un polo. La única singularidad de $f(z) = 1/(1 + z^{2n})$ dentro de este contorno es un polo simple en $e^{\pi i/2n}$, donde el residuo es $-e^{\pi i/2n}/2n$. Así,

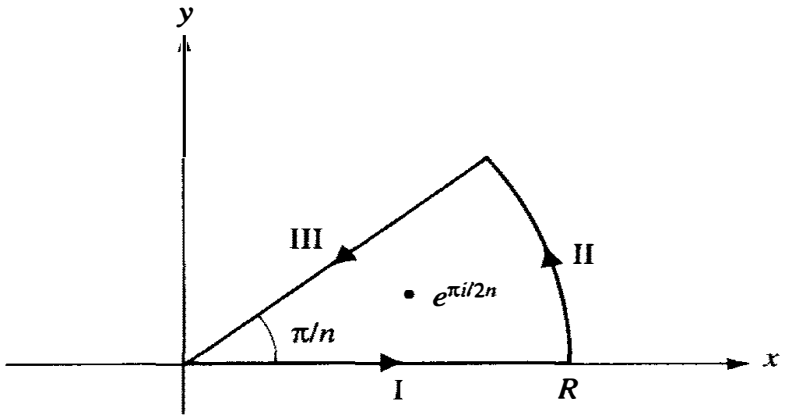


Figura 4.3.9. Contorno para el ejemplo resuelto 4.3.16.

$$-\frac{\pi i}{n}e^{\pi i/2n} = \int_I f + \int_{II} f + \int_{III} f$$

$$= \int_0^R \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx + \int_0^{\pi/n} \frac{1}{1+R^{2n}e^{2ni\theta}}\,iRe^{i\theta}\,d\theta + \int_R^0 \frac{1}{1+r^{2n}e^{2\pi i}}\,e^{\pi i/n}\,dr$$

$$= (1-e^{\pi i/n})\int_0^R \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx + iR\int_0^{\pi/n} \frac{1}{1+R^{2n}e^{2ni\theta}}\,e^{i\theta}\,d\theta$$

La segunda integral no es mayor, en su valor absoluto, que $(\pi/n)R/(R^{2n}-1)$, la cual se va a 0 conforme $R \to \infty$. Haciendo $R \to \infty$, obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx = -\frac{\pi i}{n}\,\frac{e^{\pi i/2n}}{1-e^{\pi i/n}} = \frac{\pi}{2n}\csc\frac{\pi}{2n}$$

4.3.17. ***Integrales de Fresnel.*** *Muestre que* $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ *y* $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ *existen ambas y son iguales a* $\sqrt{\pi/2}$

Solución. Primero mostramos que las integrales existen. Observe que sen (x^2) tiene ceros en $x_n = \sqrt{\pi n}$ para cualquier entero n. Ya que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$, la distancia entre estos ceros se acerca a 0 conforme n crece y, por tanto, las cantidades $a_n = \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} \operatorname{sen}(x^2)\,dx\right|$ decrecen monótonamente a 0. Así $\sum_0^\infty (-1)^n a_n$ converge, por el criterio de la serie alternante, a algún número A. Si R es cualquier número real, entonces $x_{N-1} \le R < x_N$ para un único N, y $\int_0^R \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ está entre las sumas parciales $\sum_0^{N-1} (-1)^n a_n$ y $\sum_0^N (-1)^n a_n$. Por lo tanto, $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ existe y es igual a A. Similarmente, $\lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos(x^2)\,dx$ existe.

Considere la integral de $f(z) = e^{iz^2}/\text{sen}\,(\sqrt{\pi}z)$ alrededor del contorno $\gamma = \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}$ mostrado en la figura 4.3.10. La función f tiene un polo simple en 0 dentro de γ, con residuo $1/\sqrt{\pi}$, y así

$$\int_\gamma f = 2\sqrt{\pi}i$$

A lo largo de I, $z = x - Ri$, así que

$$|e^{iz^2}| = |e^{i(x^2 - 2Rix - R^2)}| = e^{2Rx}$$

y

$$|\text{sen}\ \sqrt{\pi}z| = \frac{1}{2}|e^{i\sqrt{\pi}x - R\sqrt{\pi}} - e^{-i\sqrt{\pi}x + R\sqrt{\pi}}| \geq \frac{1}{2}(e^{R\sqrt{\pi}} - 1)$$

En consecuencia, a lo largo de I tenemos

$$\left|\int_{\text{I}} f\right| \leq \frac{2}{e^{R\sqrt{\pi}} - 1} \int_{-\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}/2} e^{2Rx}\,dx = \frac{1}{R}\,\frac{e^{R\sqrt{\pi}} - e^{-R\sqrt{\pi}}}{e^{R\sqrt{\pi}} - 1}$$

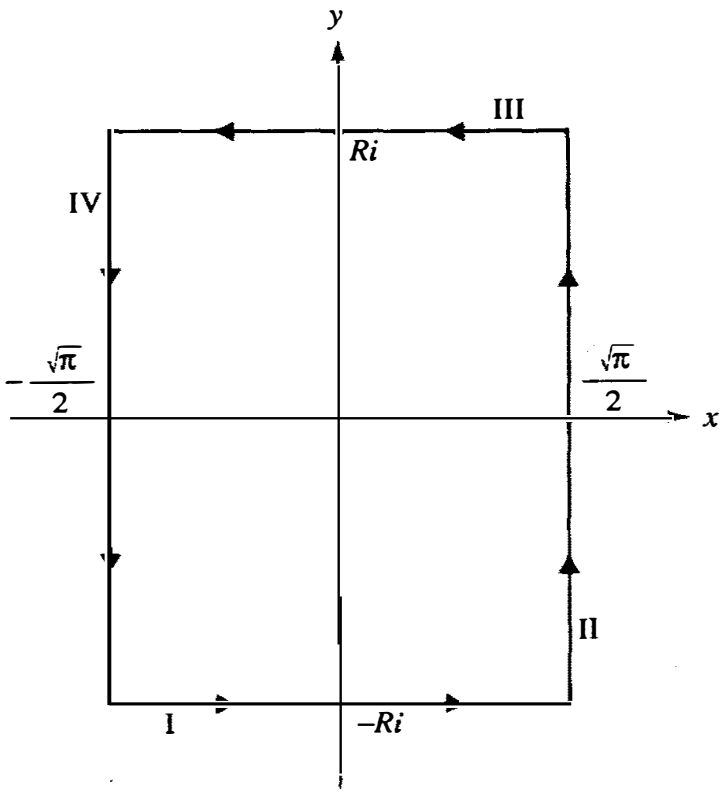


Figura 4.3.10. El contorno usado para evaluar las integrales de Fresnel.

la cual se va a 0 conforme $R \to \infty$. Similarmente $\int_{\text{III}} f \to 0$ conforme $R \to \infty$. La contribución de los lados verticales es

$$\int_{\text{II}} f + \int_{\text{IV}} f = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i(\sqrt{\pi}/2 + iy)^2}}{\operatorname{sen}(\pi/2 + \sqrt{\pi}yi)}\, i\, dy + \int_{R}^{-R} \frac{e^{i(\sqrt{\pi}/2 + iy)^2}}{\operatorname{sen}(-\pi/2 + \sqrt{\pi}yi)}\, i\, dy$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{i(\pi/4 - y^2)}\,(e^{-\sqrt{\pi}y} + e^{\sqrt{\pi}y})}{\cos(i\ \sqrt{\pi}y)}\, i\, dy = 2i \int_{-R}^{R} e^{i(\pi/4 - y^2)} dy$$

$$= 2e^{3\pi i/4} \int_{-R}^{R} e^{-iy^2}\, dy = \sqrt{2}(-1 + i)\left[\int_{-R}^{R} \cos(x^2)\, dx - i \int_{-R}^{R} \operatorname{sen}(x^2)\, dx\right]$$

Haciendo $R \to \infty$ obtenemos

$$2\ \sqrt{\pi i} = \sqrt{2}(-1 + i)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\, dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx\right]$$

y

$$\sqrt{2\pi i} = \left[-\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx\right] + i\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx\right]$$

La parte real de esta ecuación muestra que nuestras integrales son iguales, mientras que las partes imaginarias muestran que su valor común es $\sqrt{2\pi}/2 = \sqrt{\pi/2}$.

4.3.18. *Muestre que* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

Solución.[1] Sea $f(z) = e^{-z^2}$ y considere la integral de f a lo largo del conjunto $\gamma = \text{I} + \text{II} + \text{III}$ mostrado en la figura 4.3.11. Note que

$$\int_{\text{I}} f = \int_{0}^{R} e^{-x^2}\, dx$$

y

$$\int_{\text{III}} f = \int_{R}^{0} e^{-ir^2} e^{\pi i/4}\, dr = e^{5\pi i/4} \int_{0}^{R} (\cos r^2 - \operatorname{sen} r^2)\, dr$$

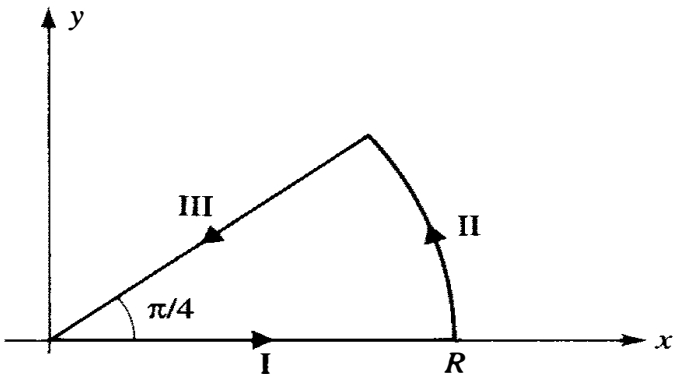


Figura 4.3.11. Contorno para $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

[1] El siguiente método es atribuido a menudo a R. Courant. Véase también el ejercicio 25.

A lo largo de II, $z + Re^{i\theta}$, y así

$$|f(z)| = |e^{-R^2(\cos 2\theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta)}| = e^{-R^2 \cos 2\theta}$$

Pero para $0 \le \theta \le \pi/4$, tenemos $\cos 2\theta \ge 1 - 4\theta/\pi$ (véase la figura 4.3.12) y por tanto $|f(z)| \le e^{-R^2} e^{4R^2\theta/\pi}$, y así

$$\left| \int_{\text{II}} f \right| \le \int_0^{\pi/4} e^{-R^2} e^{4R^2\theta/\pi} |iRe^{i\theta}| \, d\theta = Re^{-R^2} \frac{\pi}{4R^2} (e^{R^2} - 1) = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2})$$

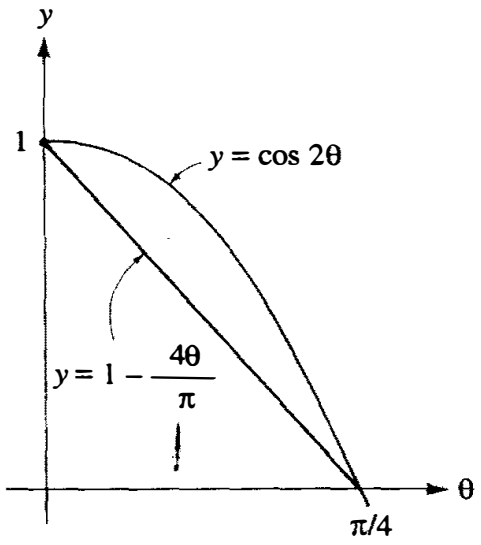


Figura 4.3.12. Demostración de que $\cos 2\theta \ge 1 - 4\theta/\pi$.

Esto ciertamente se va a 0 conforme $R \to \infty$. Ya que f es entera,

$$0 = \int_{\text{I}} f + \int_{\text{II}} f + \int_{\text{III}} f$$

Haciendo $R \to \infty$, obtenemos

$$0 = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \cos(x^2) \, dx - i \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) \, dx \right]$$

Por lo que sabemos del último ejemplo, ambas integrales existen, Ambos integrandos son pares y ambas integrales son $\sqrt{\pi}/2\sqrt{2}$. Encontramos que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (1 - i) \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Otra vez, el integrando es par y, por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

4.3.19. ***Transformadas de Fourier.*** *Suponga que la transformada de Fourier de una función* f *está definida con una constante multiplicativa* $1/\sqrt{2\pi}$ *y una convención del signo como*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

Muestre que la función normal de probabilidad $f(x) = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-x^2/2}$ *satisface* $\hat{f}(\omega) = f(\omega)$.

Solución. Sea $g(z) = e^{-z^2/2} e^{-i\omega z}$. Entonces g es una función entera y, por lo tanto, su integral es 0 alrededor del contorno γ = I + II + III + IV mostrando en la figura 4.3.13, para cualesquiera reales R y τ. (Si $\tau < 0$, dibuje el contorno en el semiplano inferior.) Así,

$$\int_{\mathrm{I}} g = \int_{-R}^{R} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx$$

y

$$\int_{\mathrm{III}} g = \int_{R}^{-R} e^{-(x+\tau i)^2/2} e^{-i\omega(\tau + xi)} dx$$

$$= -e^{-(\tau^2/2) + \omega\tau} \int_{-R}^{R} e^{-x^2/2} e^{-i(\tau+\omega)x}\, dx$$

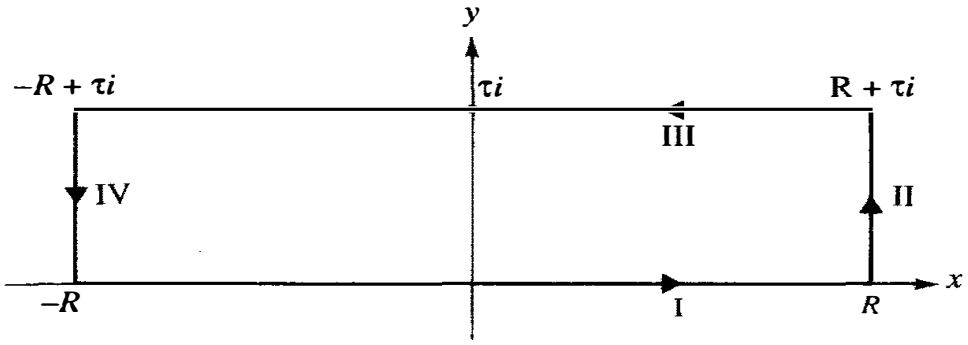


Figura 4.3.13. Contorno para evaluar la transformada de Fourier de $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

A lo largo de II y IV

$$|g(z)| = |e^{-(\pm R + iy)^2/2} e^{-i\omega(\pm R + iy)}|$$
$$= e^{-R^2/2 + y^2/2} e^{\omega y} \le e^{-R^2/2} e^{\tau^2/2 |\omega\tau|}$$

Por lo tanto $\left|\int_{\mathrm{II}} g\right|$ y $\left|\int_{\mathrm{IV}} g\right|$ están cada una de ellas acotadas superiormente por $e^{-R^2/2} |\tau| e^{\tau^2/2 + |\omega\tau|}$. Con τ y ω fijos, esto tiende a 0 conforme $R \to \infty$. Haciendo $R \to \infty$ en $\int_{\gamma} g = 0$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx - e^{\tau^2/2 + \omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i(\tau+\omega)} dx = 0$$

Esto se satisface para cualesquiera reales τ y ω. Haciendo $\tau = -\omega$ da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i\omega x}\, dx = e^{-\omega^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$

Haciendo el cambio de variable ($x \mapsto x/\sqrt{2}$) en el último ejemplo (o en la proposición 4.3.3), esto resulta

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx = e^{-\omega^2/2} \sqrt{2\pi}$$

esto es,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2}$$

o

$$\hat{f}(\omega) = f(\omega)$$

como se quería.

4.3.20. *Si* p > 0 *y* q > 0, *muestre qu*

$$\int_0^{\infty} \frac{\log (px)}{q^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2q} \log (pq)$$

Solución. $f(z) = [\log (pz)]/(q^2 + z^2)$ es analítica en el plano con el eje imaginario negativo suprimido, si definimos una rama del logaritmo como

$$\log (\rho e^{i\phi}) = \log \rho + i\phi \quad -\frac{\pi}{2} \le \phi < \frac{3\pi}{2}$$

Consideremos la integral de f a lo largo del contorno $\gamma = \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}$ mostrado en la figura 4.3.14. Note que

$$\int_{\text{I}} f = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log (px)}{q^2 + x^2}\, dx \quad \text{y} \quad \int_{\text{III}} f = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{\log (-px)}{q^2 + (-x)^2} (-dx) = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log (px) + \pi i}{q^2 + x^2}\, dx$$

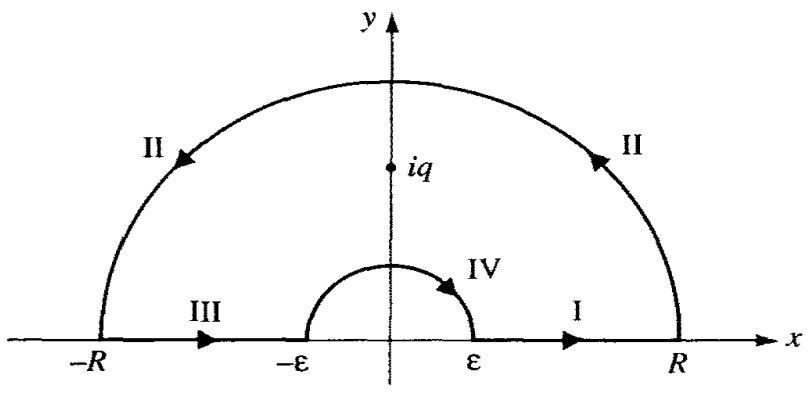


Figura 4.3.14. El contorno usado en el ejemplo 4.3.20.

A lo largo de II,

$$|f(x) \leq \frac{|\log(pR)| + \pi}{R^2 - q^2} \text{ y, por tanto, } \left|\int_{II} f\right| \leq \frac{|\log(pR)| + \pi}{R^2 - q^2} \pi R$$

Esto se va a 0 conforme $R \to \infty$ (use la regla de L'Hôpital para $(\log R)/R$). A lo largo de IV,

$$|f(z)| \leq \frac{|\log(p\varepsilon)| + \pi}{q^2 - \varepsilon^2} \pi \varepsilon$$

Esto también se va a 0 conforme $\varepsilon \to 0$ ya que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$. Puesto que F tiene un polo simple dentro de γ en $z = iq$ con residuo $[\log(pqi)]/2qi = [\log(pq)]/2qi + \pi/4q$, podemos hacer que $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$ para obtener

$$2\int_0^\infty \frac{\log(px)}{q^2 + x^2}\,dx + \pi i \int_0^\infty \frac{1}{q^2 + x^2}\,dx = 2\pi i \left[\frac{\log(pq)}{2qi} + \frac{\pi}{4q}\right]$$

Al comparar las partes real e imaginaria nos da

$$\int_0^\infty \frac{\log(px)}{q^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2q}\log(pq) \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{1}{q^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2q}$$

La última integral, por supuesto, puede evaluarse mediante cálculos elementales usando la inversa de la función tangente.

Ejercicios

1. Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$$

2. Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(*Sugerencia:* considere $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{2ix}}{x^2}\,dx$ y aplique la proposición 4.3.11.)

3. Evalúe

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} \quad \text{para } 0 < b < a$$

4. Evalúe

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^6}$$

5. Evalúe

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^4}\,dx$$

6. Evalúe

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^3}\,dx \qquad \text{para} \quad 0 < a < 3$$

7. Evalúe

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$$

8. *a*) Demuestre que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}$$

integrando $e^{iz}(e^z - e^{-z})$ alrededor del rectángulo con vértices $-r$, r, $r + \pi i$, $-r + \pi i$, haga $r \to \infty$.

b) Use la misma técnica para demostrar que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-2\pi x}}\,dx = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}}$$

9. Evalúe

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x-a)^2\,(x-1)}$$

donde Im $a > 0$.

10. Muestre que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n} \theta\, d\theta = \frac{\pi(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

11. Muestre que para $a > 0$, $b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)e^{-ab}$$

12. Muestre que para $0 < b < 1$

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^b(x+1)}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(b\pi)}$$

13. Encuentre

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)}$$

14. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}$$

15. Encuentre

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

mediante *a*) el cambio de variable $y = 1/(x + \sqrt{x^2-1})$ y *b*) considerando la curva en la figura 4.3.15 y encontrando el residuo de una rama de $1/\sqrt{z^2-1}$ en ∞.

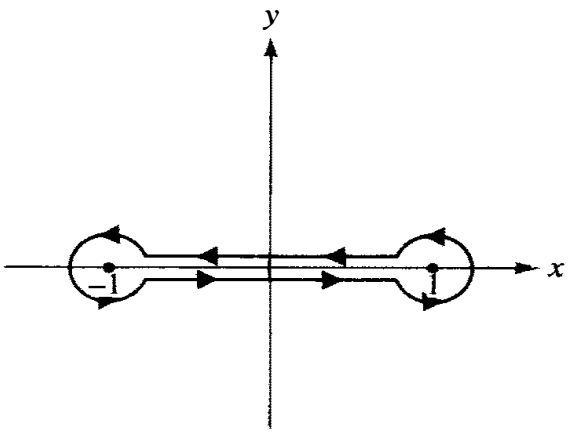


Figura 4.3.15. Contorno para evaluar $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

16. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios con grado $Q(z) \geq 2 +$ grado $P(z)$. Muestre que la suma de los residuos de $P(z)/Q(z)$ es 0.

17. Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\, dx \quad \text{para} \quad a>0,\, b>0$$

18. Sea $f(z)$ como en la fórmula 5 de la tabla 4.3.1, excepto que se permite a f tener un número finito de polos simples sobre el eje real positivo (estrictamente). Muestre que

$$\text{V.P.} \int_0^{\infty} x^{a-1} f(x)\, dx = \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(\pi a)} \sum \{\text{residuos de } (-z)^{a-1} f(z) \text{ en los polos de } f \text{ fuera del eje real no negativo}\}$$

$$+\frac{\pi e^{-\pi a i}\cos \pi a}{\operatorname{sen} \pi a} \sum \{\text{residuos de } (-z)^{a-1} f(z) \text{ en los polos de } f \text{ sobre el eje real positivo}\}$$

19. Use el ejercicio 18 para mostrar que

$$\text{V.P.} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = -\pi \cot(\pi a) \quad \text{para} \quad 0 < a < 1$$

20. Establezca las siguientes fórmulas:

a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a}$ para $a > 0$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-1}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-1/\sqrt{2}} \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{2}}$

21. Demuestre la proposición 4.3.3 evaluando la doble integral sobre todo el plano en coordenadas polares.

22. En el ejemplo resuelto 4.3.16. ¿podría el exponente $2n$ ser remplazado por cualquier otra potencia $p \geq 2$?

23. Evalúe $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\cos(4\theta)\,d\theta$ considerando la parte real de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} e^{4i\theta}\,d\theta$ y luego convirtiéndola en una integral alrededor del círculo unitario.

24. Suponga que la transformada de Fourier de una función $g(x)$ está definida como en el ejercicio resuelto 4.3.19 mediante

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x}\,dx$$

Muestre que si f es diferenciable y las integrales para $\hat{f}$ y $(f')\hat{}$ convergen, entonces

$$(f')\hat{}\,(\omega) = \frac{1}{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

(*Sugerencia*: $f(x)$ debe irse a 0 en ambas direcciones a lo largo del eje x. Trate de integrar por partes.)

25. *a*) Evalúe

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-z^2+\sqrt{\pi i}z}}{e^{2\sqrt{\pi i}z}-1}\,dz$$

donde $\sqrt{\pi i} = \sqrt{\pi}\,e^{i\pi/4}$ y γ_R es como se muestra en la figura 4.3.16.

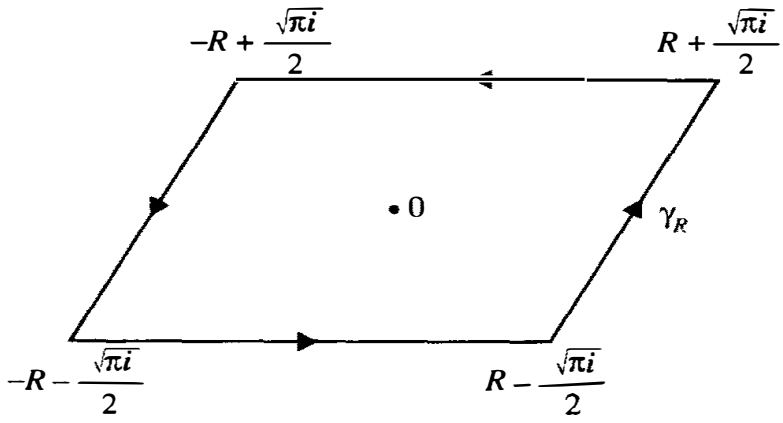


Figura 4.3.16. El contorno usado para $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

b) Muestre que las integrales a lo largo de las partes horizontales se cancelan parcialmente para dar un múltiplo de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$. Use esto para mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

4.4. EVALUACIÓN DE SERIES INFINITAS Y EXPANSIONES EN FRACCIONES PARCIALES

En la sección anterior vimos cómo usar sumas de residuos para evaluar integrales. En esta sección damos una breve discusión de algunas aplicaciones en la otra dirección: usar integrales para evaluar sumas. Por ejemplo, vamos a ver que al aplicar estos teoremas podemos demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ésta es una famosa fórmula de Leonhard Euler, quien la descubrió en el siglo XVIII usando otras técnicas.

Series infinitas

Vamos a desarrollar un método general para evaluar series de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, donde f es una función dada. Suponga que restringimos a f a ser una función meromorfa con un número finito de polos, ninguno de los cuales es un entero. Suponga que $G(z)$ es una función meromorfa cuyos únicos polos son polos simples en los enteros, donde los residuos son todos 1. Así, en los enteros, los residuos de $f(z)G(z)$ son $f(n)$. Entonces, si γ es una curva cerrada que encierra a $-N, -N+1, \ldots, 0, 1, \ldots, N$, el teorema del residuo da $\int_\gamma G(z)f(z)\,dz = 2\pi i \left\{\left[\sum_{n=-N}^{N} f(n)\right] + \Sigma \{\text{residuos de } G(z)f(z) \text{ en los polos de } f\}\right.$. Si $\int_\gamma G(z)f(z)\,dz$ muestra un comportamiento controlable en el límí-

te conforme γ resulta más grande, tendremos información acerca del comportamiento en el límite de $\sum_{n=-N}^{N} f(n)$ conforme $N \to \infty$ en términos de los residuos de $G(z)f(z)$ en los polos de f. Una $G(z)$ apropiada es $\pi \cot \pi z$.

Por supuesto, siempre tenemos

$$\int_\gamma G(z)f(z)\,dz = 2\pi i \sum \{\text{todos los residuos de } G(z)f(z) \text{ dentro de } \gamma\}$$

así que si alguno de los polos de f resulta ser un entero, necesitamos únicamente mover los términos a su alrededor:

$$\int_\gamma G(z)f(z)\,dz = 2\pi i \left\{ \sum_{n=-N}^{N} \{f(n) | \, n \text{ no es una singularidad de } f\} \right.$$
$$\left. + \sum \{\text{residuos de } G(z)f(z) \text{ en las singularidades de } f\} \right\}$$

Teorema de la adición 4.4.1. *Sea* f *analítica en* **C** *excepto en un número finito de singularidades aisladas. Sea* C_N *un cuadrado con vértices en* $(N + \frac{1}{2}) \times (\pm 1 \pm i)$, $N = 1, 2, 3, \ldots$ (figura 4.4.1). *Suponga que* $\int_{C_N} (\pi \cot \pi z) f(z)\,dz \to 0$ *conforme* $N \to \infty$. *Entonces tenemos la* ***fórmula de la adición***

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \{f(n) | \, n \text{ no es una singularidad de } f\}$$
$$= -\sum \{\text{residuos de } \pi \cot \pi z f(z) \text{ en las singularidades de } f\}$$

Si ninguna de las singularidades de f *está en los enteros, entonces* $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n)$ *existe, es finito y*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum \{\text{residuos de } \pi \cot \pi z f(z) \text{ en las singularidades de } f\}$$

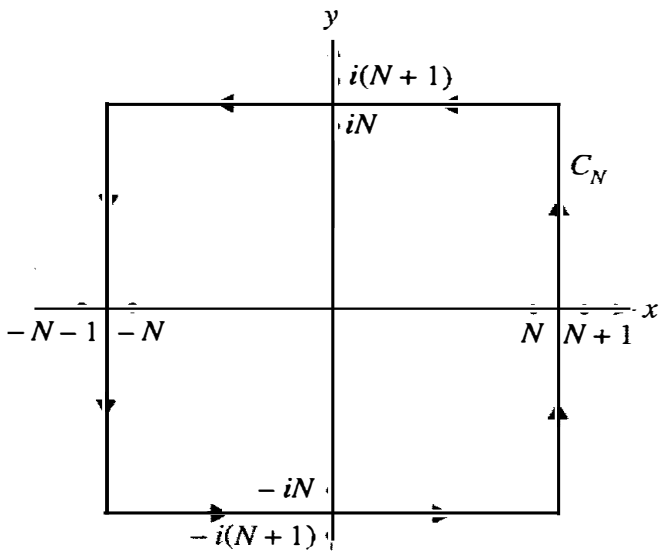


Figura 4.4.1. Contorno para evaluar $\sum_{-\infty}^{\infty} f(n)$.

Demostración. En este argumento asumimos que ninguna de las singularidades de f está en los enteros. (Para el caso más general simplemente inserte la frase calificativa en la primera suma y mueva los términos apropiados. Sólo puede haber un número finito de ellos.) Por el teorema del residuo,

$$\int_{C_N} \pi \cot \pi z\, f(z)\, dz = 2\pi i \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{residuos de } \pi \cot \pi z f(z) \text{ en los enteros} \\ -N, -N+1, \ldots, 0, 1, \ldots, N \end{array} \right\}$$

$$+ 2\pi i \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{residuos de } \pi \cot \pi z\, f(z) \text{ en las} \\ \text{singularidades de } f \end{array} \right\}$$

para N suficientemente grande de modo que C_N encierre todas las singularidades de f. Ya que $\cot \pi z = (\cos \pi z)/(\operatorname{sen} \pi z)$ y $(\operatorname{sen} \pi z)' \neq 0$ en $z = n$, vemos que n es un polo simple de $\cot \pi z$ y que $\operatorname{Res}(\cot \pi z, n) = (\cos \pi n)/(\pi \cos \pi n) = 1/\pi$ (use la fórmula 4 de la tabla 4.1.1). Por lo tanto, $\operatorname{Res}(\pi \cot \pi z f(z), n) = \pi f(n) \operatorname{Res}(\cot \pi z, n) = f(n)$. Así,

$$\Sigma \{\text{residuos de } \pi \cot \pi z\, f(z) \text{ en los enteros } -N, -N+1, \ldots, 0, 1, \ldots, N\} = \sum_{n=-N}^{N} f(n).$$

Tomando límites en ambos lados de la precedente ecuación para $\int_{C_N} \pi \cot \pi z\, f(z)\, dz$ y usando el hecho de que $\int_{C_N} \pi \cot \pi z\, f(z)\, dz \to 0$ conforme $N \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum \{\text{residuos de } \pi \cot \pi z f(z) \text{ en las singularidades de } f\} \blacksquare$$

Es importante notar que lo que hemos obtenido es una fórmula para el límite de las sumas parciales simétricas de $\sum_{-\infty}^{\infty} f(n)$. Esto no es lo mismo que las series dobles infinitas, las cuales piden que los límites superior e inferior crezcan independientemente: $\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ M \to \infty}} \sum_{-M}^{N} f(n) = \lim_{M \to \infty} \sum_{n=-M}^{-1} f(n) + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} f(n)$. Si se sabe que las series infinitas dobles convergen, entonces nuestro límite debe dar la misma respuesta, pero $\lim_{N \to \infty} \sum_{-N}^{N} f(n)$ puede existir aun cuando el límite más general no lo haga. La situación es análoga a aquella en el cálculo de una integral impropia por medio del valor principal de Cauchy. Sin embargo, nuestra fórmula es a menudo suficiente. Podemos verificar independientemente que el límite doble exista o como en nuestro primer ejemplo, podemos estar interesados en una serie infinita sencilla. Si f es una función par, entonces $\sum_{-N}^{N} f(n) = f(0) + 2\sum_{n=1}^{N} f(n)$.

La cotangente no es la única candidata para ser una útil función para G. Otras son $2\pi i/(e^{2\pi i z} - 1)$ y $-2\pi i/(e^{-2\pi i z} - 1)$. En los ejercicios indicamos una manera de usar $\pi \csc \pi z$, la cual es particularmente útil para series alternantes. (Una exposición más completa y referencias extensas, pueden encontrarse en D. S. Mitrinovic y J.D.Kečkić, *The Cauchy Method of Residues*, Dordrecht, The Netherlands; D. Reidel Publ. Co., 1984.)

En seguida establecemos un criterio por medio del cual puede juzgarse si f satisface las hipótesis del teorema de la adición (4.4.1).

Proposición 4.4.2. *Suponga que* f *es analítica en* C *excepto para singularidades aisladas. Si existen constantes* R *y* M *tales que* $|zf(z)| \leq M$ *siempre que* $|z| \geq R$, *entonces se satisfacen las hipótesis del teorema de la adición* (4.4.1).

Demostración. Ya que $|zf(z)|$ es acotada más allá de R, todas las singularidades de f están en la región $|z| \leq R$. Ya que éstas son aisladas, debe haber un número finito de ellas (¿por qué?) Más aún, $|f(1/z)/z|$ está acotada por M en la región $|z| < 1/R$ y, por ende, 0 es una singularidad removible de $f(1/z) \cdot 1/z$ y podemos por tanto escribir $f(1/z) \cdot 1/z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ para $|z| < 1/R$; así

$$f(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \cdots$$

para $|z| > R$. Consideremos ahora la integral

$$\int_{C_N} \frac{\pi \cot \pi z}{z}\, dz$$

Por el teorema del residuo,

$$\int_{C_N} \frac{\pi \cot \pi z}{z}\, dz = 2\pi i \left\{\text{residuos de } \frac{\pi \cot \pi z}{z} \text{ en } z = 0\right\} + 2\pi i \sum \left\{\begin{matrix}\text{residuo de } \dfrac{\pi \cot \pi z}{z} \text{ en} \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\end{matrix}\right\}$$

Ya que el polo en 0 es de orden 2, podemos escribir

$$\frac{\pi \cot \pi z}{z} = \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

Puesto que $(\pi \cot \pi z)/z$ es una función par de z (esto es, $[\pi \cot \pi(-z)]/(-z) = (\pi \cot \pi z)/z$), la unicidad de la expansión de Laurent muestra que los coeficientes de las potencias impares de z son 0; en particular, $b_{-1} = 0$. Pero b_{-1} es exactamente Res $[(\pi \cot \pi z)/z, 0]$. (En lugar de este truco pudimos haber usado la fórmula 9 de la tabla 4.1.1). También, Res $[(\pi \cot \pi z)/z, n] = 1/n$ para $n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$ (¿por qué?), así Σ {residuos de $(\pi \cot \pi z)z$ en $n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N$} = 0. En consecuencia,

$$\int_{C_N} \frac{\pi \cot \pi z}{z}\, dz = 0$$

Así, podemos escribir

$$\int_{C_N} \pi \cot \pi z f(z)\, dz = \int_{C_N} \pi(\cot \pi z) \left[f(z) - \frac{a_0}{z}\right] dz$$

Para estimar esta última integral, obsérvese que

$$f(z) - \frac{a_0}{z} = \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \cdots$$

para $|z| > R$. Ya que $a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots$ representa una función analítica para $|z| < 1/|R|$, ésta es acotada, digamos por M', en el disco cerrado $|z| \leq 1/R'$, donde $R' > R$. Esto implica que

$$\left| f(z) - \frac{a_0}{z} \right| \leq \frac{M'}{|z|^2}$$

para $|z| \geq R'$. Suponga que N es suficientemente grande para que todos los puntos en C_N satisfagan $|z| \geq R'$. Entonces

$$\left| \int_{C_N} \pi(\cot \pi z) \left[f(z) - \frac{a_0}{z} \right] dz \right| \leq \frac{\pi M' \cdot 8(N + \frac{1}{2})}{(N + \frac{1}{2})^2} \sup_{z \text{ en } C_N} |\cot \pi z|)$$

El estudiante debe verificar que

$$\sup \{ |\cot \pi z| \text{ tal que } z \text{ está en } C_N \} = \frac{e^{2\pi(N + 1/2)} + 1}{e^{2\pi(N + 1/2)} - 1}$$

(nótese que en los lados verticales, $|\cot \pi z| \leq 1$; en los lados horizontales, el máximo ocurre en $x = 0$). Así, para toda N suficientemente grande, tenemos $\sup_{z \text{ en } C_N} |\cot \pi z| \leq 2$. La desigualdad previa muestra entonces que

$$\int_{C_N} \pi(\cot \pi z) \left[f(z) - \frac{a_0}{z} \right] dz$$

se aproxima a 0 conforme $N \to \infty$, lo cual, a su vez, muestra que

$$\int_{C_N} \pi \cot \pi z f(z) dz \to 0 \quad \text{conforme} \quad N \to \infty \quad \blacksquare$$

Nosotros damos aquí un famoso ejemplo de esta técnica. Uno aprende usualmente en cálculo que la p serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^p)$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$, pero usualmente sin ninguna indicación de cual podría ser exactamente la suma. Encontramos esta suma en el capítulo 3 como $\zeta(p)$, donde ζ es la función zeta de Riemann, un ingrediente importante en teoría de números. El caso en el que $p = 2$ es interesante y hay varias formas de evaluar $\zeta(2)$. Aquí está una

Proposición 4.4.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Demostración. Aplicamos el teorema de la adición (o su corolario) con $f(z) = 1/z^2$. Ya que tan z tiene un 0 simple en $z = 0$, cot z tiene un polo simple ahí. Si la expansión de Laurent es $\cot z = b_1/z + a_0 + a_1 z + \cdots$, entonces

$$\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)\left(\frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots\right)$$

Al multiplicar, agrupar términos y comparar coeficientes, encontramos que $b_1 = 1$, $a_0 = 0$ y $a_1 = -\frac{1}{3}$. Así

$$\frac{\pi \cot \pi z}{z^2} = \frac{\pi(1/\pi z - \pi z/3 + \cdots)}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{z} \cdot \frac{1}{3} + \cdots$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}, 0\right) = \frac{-\pi^2}{3}$$

Ya que la única singularidad de f está en $z = 0$, la fórmula de la adición resulta

$$\lim_{N \to \infty}\left(\sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{3}$$

y, puesto que $1/(-n)^2 = 1/n^2$, obtenemos

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \blacksquare$$

Expansiones en fracciones parciales

Si $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional, conocemos un truco del álgebra que es a menudo útil en el cálculo: La función f puede ser expandida en "fracciones parciales" en términos de los ceros del denominador. Algunas veces una función meromorfa puede pensarse en algo así como una función racional con, posiblemente, una cantidad infinita de ceros en el denominador y uno desearía saber si es posible una expansión similar. Aun cuando uno podría no tomar muy en serio esta analogía, algo acerca de esto puede hacerse. Primero damos un ejemplo específico que muestra cómo puede usarse el teorema de la adición, el cual será usado en el capítulo 7. Luego daremos un resultado un poco más general.

Proposición 4.4.4. *Sea z cualquier número complejo que no sea un entero; entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

son series absolutamente convergentes y

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

Esta ecuación también puede escribirse como

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

donde la "prima" indica que se han omitido los términos correspondientes a $n = 0$.

Demostración. Para n suficientemente grande, $|z - n| > n/2$. Por lo tanto,

$$\left|\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{z}{(z-n)n}\right| \leq \frac{2|z|}{n^2}$$

Al comparar con la serie convergente

$$2|z| \cdot \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)$$

vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

es absolutamente convergente. Similarmente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

es absolutamente convergente. Fíjese z y considérese la función $f(w) = 1/(w - z)$. Esta función es meromorfa; su único polo está en z, el cual no es un entero y resulta fácil ver que $|wf(w)|$ está acotada para w suficientemente grande (como en la proposición 4.3.1). Por la proposición 4.4.2, vemos que las hipótesis del teorema de la adición se satisfacen y así

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{n-z} = -\left\{\text{residuo de } \frac{\pi \cot \pi w}{w-z} \text{ a } w = z\right\} = -\pi \cot \pi z$$

Notamos que

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \pi \cot \pi z \quad \blacksquare$$

También podríamos haber obtenido la expansión para la cotangente a partir del siguiente teorema.

Teorema del desarrollo en fracciones parciales 4.4.5. *Suponga que* f *es meromorfa con polos simples en* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *con* $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ *y residuos* b_k *en* a_k. *(Estamos suponiendo que* f *es analítica en* 0). *Suponga que existe una sucesión* $R_1, R_2, R_3, \ldots$ *con la propiedad de que* $\lim_{n \to \infty} R_n = \infty$ *y curvas cerradas simples* C_N *que satisfacen*

(i) $|z| \geq R_N$ *para toda* z *en* C_N.
(ii) *Existe una constante* S *con longitud* $(C_N) \leq SR_N$ *para toda* N.
(iii) *Existe una constante* M *con* $|f(z)| \leq M$ *para toda* z *en* C_N *y para toda* N. (*La misma* M *debe funcionar para toda* N.)

Entonces

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n} \right)$$

Demostración. Si $z_0 \neq 0$ no es un polo de f, sea $F(z) = f(z)/(z - z_0)$. Entonces F tiene polos simples en z_0 y en $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Claramente

$$\text{Res } (F; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) F(z) = f(z_0)$$

y

$$\text{Res } (F; a_n) = \lim_{z \to a_n} (z - a_n) \frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{b_n}{a_n - z_0}$$

Por el teorema del residuo,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) + \sum \left\{ \frac{b_n}{a_n - z_0} \,\middle|\, a_n \text{ está dentro de } C_N \right\}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) + \sum \left\{ \frac{b_n}{a_n} \,\middle|\, a_n \text{ está dentro de } C_N \right\}$$

Al restar,

$$\frac{z_0}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{f(z)}{z(z-z_0)}\,dz = f(z_0)-f(0)+\sum\left\{\frac{b_n}{a_n-z_0}-\frac{b_n}{a_n}\;\middle|\; a_n \text{ está dentro de } C_N\right\}$$

A lo largo de C_N, $|z| \geq R_N$ y $|z-z_0| \geq |R_N - |z_0||$ y, por lo tanto, la integral de la última desigualdad está acotada superiormente por

$$\frac{|z_0|}{2\pi}\frac{M}{R_N|R_N-|z_0||}[\text{ longitud }(C_N)] \leq \frac{|z_0|MS}{2\pi\,|R_N-|z_0||}$$

Esto se va a cero conforme $N \to \infty$ y cada una de las a_n está eventualmente dentro de C_N. Por lo tanto,

$$f(z_0) = f(0) - \lim_{N\to\infty}\left(\sum\left\{\frac{b_n}{a_n-z_0}-\frac{b_n}{a_n}\;\middle|\; a_n \text{ está dentro de } C_N\right\}\right)$$

$$= f(0) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{a_n-z_0}-\frac{b_n}{a_n}\right) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{z_0-a_n}+\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Ya que esta fórmula se satisface en toda z_0 para la cual f es analítica, hemos establecido el teorema. ■

Los contornos usados comúnmente para las C_N, son círculos de radio R_N o cuadrados grandes como aquellos de la figura 4.4.1. La expansión dada en el teorema del desarrollo en fracciones parciales es un caso especial de un resultado más general conocido como el teorema de Mittag-Leffler,[2] nombrado así en honor del famoso matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927).

Ejercicios

1. Muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

2. Muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}\right] = \frac{\pi^3}{32}$$

[2] Puede encontrarse, por ejemplo, en Peter Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 1, Nueva York, Wiley-Interscience, 1974, pp. 655-660 y Nueva York, Springer-Verlag, 1986.

3. Muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a + \frac{1}{2a^2} \quad \text{para} \quad a > 0$$

4. Muestre que

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

(*Sugerencia*: empiece con la expansión de $\pi \cot \pi z$.)

5. Desarrolle un método para evaluar series de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$ donde f es una función meromorfa en $\mathbf{C}$ con un número finito de polos, ninguno de los cuales es un entero. En otras palabras, desarrolle teoremas análogos al teorema de la adición (4.4.1) y la proposición 4.4.2. (*Sugerencia*: $\pi/\operatorname{sen} \pi z$ tiene polos en los enteros con Res $(\pi/\operatorname{sen} \pi z, n) = (-1)^n$. Discuta cómo podría manejar la adición si alguno de los polos de f estuviera en los enteros; véase la proposición 4.4.4.)

6. Muestre que si $2z - 1$ no es un entero, entonces

$$\frac{1}{\cos \pi z} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2z-1}{(2z-1)^2 - 4n^2} + \frac{4}{1-4n^2} \right]$$

(*Sugerencia*: $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$, Utilice el cuadrado con esquinas $\pm N \pm Ni$ para las C_N dadas en el teorema de desarrollo en fracciones parciales (4.4.5). Finalmente, combine los términos n y $-n$.)

7. Use el teorema del desarrollo en fracciones parciales para mostrar que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$$

donde $\sum'$ significa que la suma es sobre todo $n \neq 0$.

8. Demuestre que $1 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \cdots = \pi^2/12$.

9. Trate de evaluar la suma $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^3)$. (No se desanime demasiado si no tiene éxito. Vea las observaciones en las respuestas a los ejercicios impares al final del libro.)

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \operatorname{sen} \theta}$$

2. Evalúe $\int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z-2)}\, dz$ donde

a) γ es el círculo con centro en 0 y radio $\frac{1}{2}$ recorrido una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

b) Igual que en *a*) pero con radio $\frac{3}{2}$.

c) Igual que en *a*) pero con radio $\frac{5}{2}$.

3. Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\, dx$$

4. Evalúe $\int_C z^n e^{1/z} dz$ si C es el círculo unitario centrado en 0 y n es un entero positivo.

5. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x+1)(x^2+1)}\, dx$$

6. Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1}\, dx$$

7. Evalúe

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\cos\theta + 3}$$

8. Sea f analítica en una región que contiene el semiplano superior $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Suponga que para alguna $a > 0$, $|f(z) \leq M/|z|^a$ para $|z|$ grande. Muestre que para $\operatorname{Im} z > 0$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z}\, dx$$

9. Evalúe

$$\int_0^{2\pi} \exp(e^{i\theta}) d\theta$$

10. Muestre que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kt}{t}\, dt = \begin{cases} 1 & k > 0 \\ 0 & k = 0 \\ -1 & k < 0 \end{cases}$$

11. Evalúe

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos(e^{-z})}{z^2}\, dz$$

12. Muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1 + x^n}\, dx = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}(m\pi/n)}$$

donde $0 < m < n$.

13. Encuentre las expansiones de Laurent de

$$f(z)\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

que sean válidas para *a*) $0 < |z| < 1$ y *b*) $|z| > 2$. Escoja $z_0 = 0$.

14. Muestre que

$$\int_0^\infty \operatorname{sech} x\, dx = \frac{\pi}{2}$$

(*Sugerencia*: considere el rectángulo con esquinas en $(\pm R, \pm R + \pi i)$.)

15. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor de $1/\cos z$ alrededor de $z = 0$?

16. Explique cuál es el error en el siguiente razonamiento. Sabemos que $a^z = e^{z \log a}$, así que $da^z/dz = (\log a)a^z$. Por otro lado $da^z/dz = za^{z-1}$. Por lo tanto, $za^{z-1} = a^z(\log a)$, así que $z = a \log a$.

17. Encuentre los residuos de las siguientes funciones en cada singularidad:

a) $\dfrac{z}{1 - e^{z^2}}$ *b*) $\dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{(\operatorname{sen} z)^2}$

c) $\operatorname{sen}(e^{1/z})$

18. ¿Dónde es analítica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-izn}$?

19. Sea $f(z)$ con un cero de orden k en z_0, Muestre que Res $(f'/f, z_0) = k$. Encuentre $(f''/f', z_0)$ y Res $(f''/f, z_0)$.

20. Sea f entera y suponga que Re f es un polinomio en x, y. Demuestre que f es un polinomio.

21. Explíque cuál es el error en el siguiente razonamiento, luego calcule el residuo correctamente. La expansión

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} = \cdots + \frac{1}{(z-1)^5} - \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^3}$$

es la expansión de Laurent; puesto que no hay término en $1/(z-1)$, el residuo en $z = 1$ es cero.

22. Verifique el principio del máximo para funciones armónicas y el principio del mínimo para funciones armónicas, para la función armónica $u(x, y) = x^2 - y^2$ en $[0, 1] \times [0, 1]$.

23. Evalúe

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)(z-2)}\, dz$$

donde γ es el círculo centrado en 0, con radio $\frac{3}{2}$.

24. Lo mismo que en el ejercicio 23 pero con radio $\frac{1}{2}$.

25. Determine el radio de convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_1^\infty \dfrac{\log(n^n)}{n!} z^n$ *b*) $\sum_1^\infty \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n z^n$

26. Establezca lo siguiente:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} ax}{\operatorname{senh} \pi x}\, dx = \frac{1}{2} \tan \frac{a}{2} \qquad \text{para} \qquad -\pi < a < \pi$$

(*Sugerencia*: integre $e^{az}/\operatorname{senh}(\pi z)$ sobre un "cuadrado" con lados $y = 0$, $y = 1$, $x = -R$, $x = +R$ y encerrando las singularidades en 0, i.)

27. Expanda lo siguiente en series de Laurent como se indica:

$$f(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^3$$

a) para $|z| < 1$; $z_0 = 0$

b) para $|z| > 1$; $z_0 = 0$

c) para $|z + 1| < 2$; $z_0 = -1$

d) para $0 < |z - 1| < \infty$; $z_0 = 1$

28. Muestre que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(a + \operatorname{sen}^2 \theta)^2} = \frac{\pi\,(2a+1)}{4(a^2+a)^{3/2}} \qquad \text{para} \qquad a > 0$$

29. Establezca las siguientes fórmulas:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\, dx = \frac{3\pi}{8}$ *b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2 + b^2}\, dx = \frac{\pi b^{a-1}}{2 \cos(\pi a/2)}$ para $-1 < a < 1$

30. Demuestre que

$$\tan z = 2z \sum_0^\infty \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 - z^2} \qquad \text{para} \qquad z \neq (n + \tfrac{1}{2})\,\pi$$

(*Sugerencia*: empiece con la identidad para la cot z de la proposición 4.4.4 y use el hecho de que $\tan z = \cot z - 2 \cot 2z$.)

31. Demuestre que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = \pi^2 \csc(\pi a) \cot(\pi a)$$

32. Evalúe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

33. Explique cuál es el error en el siguiente razonamiento:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz$$

donde γ_R es el eje x de $-R$ a R más la circunferencia $\{z = Re^{i\theta} | 0 \le \theta \le \pi\}$.

Pero (sen z)/z es analítica en todo punto, incluyendo al cero y, por lo tanto, por el teorema de Cauchy,

$$\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz = 0$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = 0$$

34. Sea $f(z)$ analítica dentro y sobre un contorno cerrado y simple γ. Para z_0 sobre γ, y γ diferenciable cerca de z_0, muestre que

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi i}\,\text{V.P.} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta$$

35. Use el ejercicio 34 para encontrar condiciones suficientes bajo las cuales

$$f(x, 0) = \frac{1}{\pi i}\,\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\zeta, 0)}{\zeta - x}\, d\zeta$$

para $f(x, y) = f(z)$ analítica. Deduzca que

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi}\,\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\zeta, 0)}{\zeta - x}\, d\zeta \quad \text{y} \quad v(x, 0) = -\frac{1}{\pi}\,\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\zeta, 0)}{\zeta - x}\, d\zeta$$

NOTA. u y v son llamadas las *transformadas de Hilbert* una con respecto de la otra.

36. Muestre que

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} + \sum{}' (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2}$$

donde $\sum'$ quiere decir que la suma se toma sobre toda $n \neq 0$.

37. Evalúe $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega x}{\operatorname{senh} bx}\, dx.$

38. Cuando un oscilador no lineal es forzado con una frecuencia ω, una medida de la "respuesta caótica" del oscilador, está dada por [3]

$$M = \int_0^{\infty} \operatorname{sech} bt \cos \omega t\, dt$$

Muestre que $M = (\pi/2b)\ \operatorname{sech}\ (\omega\pi/2b)$.

[3] Véase J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Nueva York, Springer-Verlag, 1983, sec. 4.5.

5

Mapeos conformes

En el capítulo 1 se incluyó una breve investigación de algunos aspectos geométricos de las funciones analíticas. Regresamos ahora a este tópico para desarrollar algunas técnicas adicionales. Queremos ser capaces de transformar una región dada en otra región dada mediante una función analítica, uno a uno y sobre. En la sección 5.2 se discuten algunos casos concretos para los cuales tales transformaciones o mapeos pueden escribirse explícitamente. Que tales mapeos siempre existen en teoría, es la afirmación del famoso teorema del mapeo de Riemann, el cual se discute, pero no se demuestra, en la sección 5.1. Se da una demostración en el suplemento del capítulo 6, pero ese material no se requiere para entender la teoría principal y las aplicaciones de este capítulo o del resto del texto, así que puede omitirse si así se desea.

La teoría de los mapeos conformes tiene algunas aplicaciones importantes al problema de Dirichlet y a las funciones armónicas. Estas aplicaciones son usadas en problemas de conducción del calor, electrostática e hidrodinámica, las cuales serán discutidas en la sección 5.3. La idea básica de tales aplicaciones es que un mapeo conforme puede usarse para transformar una región dada en una región más simple, en la cual el problema puede resolverse mediante inspección. Al regresar otra vez a la región original, se obtiene el resultado deseado.

5.1. TEORÍA BÁSICA DE LOS MAPEOS CONFORMES

Transformaciones conformes

La siguiente definición fue presentada en la sección 1.5: Un mapeo f: $A \to B$ es llamado *conforme* si para toda $z_0 \in A$, f rota a vectores tangentes a curvas a través de z_0, un ángulo específico θ y los alarga un factor definido r. Vamos a recordar el siguiente teorema que se demostró en la sección 1.5.

Teorema del mapeo conforme 5.1.1. *Sea* f: A $\to$ B *analítica y* $f'(z_0) \neq 0$ *para toda* $z_0 \in$ A. *Entonces* f *es conforme.*

De hecho, si f solamente preserva ángulos y si ciertas condiciones de regularidad se satisfacen, entonces f debe ser analítica y $f'(z_0) \neq 0$ (véase el ejercicio 8). Por lo tanto, podemos decir que "conforme" significa *analítica con derivada distinta de cero*. Encontraremos que es conveniente asumir este significado en el resto de este texto.

Sea $A = \{z \mid \text{Re } z > 0 \text{ e Im } z > 0\}$ y $B = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$. Entonces el mapeo $f: A \to B$ definido por $z \to z^2$, es conforme. (El estudiante puede verificar esto fácilmente.) La figura 5.1.1 ilustra el teorema mostrando la preservación de ángulos en este caso. Si $f'(z_0) = 0$, los ángulos no necesariamente se preservan. Por ejemplo, para el mapeo $z \to z^2$, los ejes x y y se intersectan en un ángulo $\pi/2$, pero las imágenes se intersectan en un ángulo π. Un punto tal en donde $f'(z_0) = 0$ para una función analítica f, es llamado un *punto singular*. Los puntos singulares se estudian con mayor detalle en el capítulo 6.

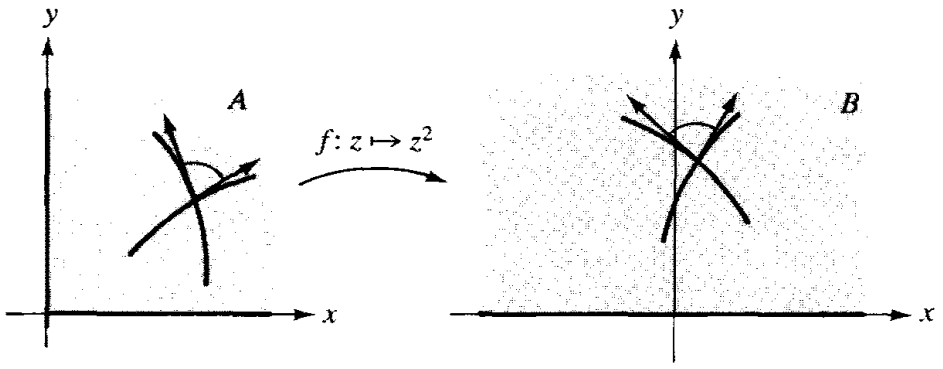


Figura 5.1.1. Un mapeo conforme.

Proposición 5.1.2

(i) *Si* f: A → B *es conforme y biyectiva (esto es, uno a uno y sobre) entonces* f^{-1}: B → A *es también conforme.*

(ii) *Si* f: A → B *y* g: B → C *son conformes y biyectivas, entonces* g ∘ f: A → C *es conforme y biyectiva.*

Demostración

(i) Ya que f es biyectiva, el mapeo f^{-1} existe. Por el teorema de la función inversa (1.5.10), f^{-1} es analítica con $df^{-1}(w)/dw = 1/[df(z)/dz]$ donde $w = f(z)$. Por lo tanto, $df^{-1}(w)/dw \neq 0$, así que f^{-1} es conforme.

(ii) Ciertamente, $g \circ f$ es biyectiva y analítica, pues g y f lo son. (La inversa de $g \circ f$ es $f^{-1} \circ g^{-1}$.) La derivada de $g \circ f$ en z es $g'(f(z)) \cdot f'(z) \neq 0$. Por lo tanto, g ∘ f es conforme, por definición. ■

Debido a las dos propiedades de la proposición 5.1.2 (y el hecho obvio de que el mapeo identidad $z \to z$ es conforme), podemos referirnos justificadamente al conjunto de mapeos conformes biyectivos de una región fija en sí misma, como un *grupo*.

La propiedad (i) es importante porque podremos usarla para resolver varios problemas asociados con una región dada (como el problema de Dirichlet). El método consistirá en encontrar un mapeo conforme biyectivo $f: A \to B$, donde B es una región más simple en la cual se puede resolver el problema. Para obtener la respuesta en A, transformamos entonces nuestra respuesta de B a A, mediante f^{-1}. El problema de Dirichlet involucra funciones armónicas, así que debemos verificar que las funciones armónicas permanecen armónicas cuando las componemos con un mapeo conforme. Para hacer esto demostramos el siguiente resultado.

Proposición 5.1.3. *Sea* u *armónica en una región* B *y sea* f: A $\to$ B *analítica. Entonces* u $\circ$ f *es armónica en* A.

Demostración. Sea $z \in A$ y $w = f(z)$. Sea U un disco abierto en B alrededor de w y sea $V = f^{-1}(U)$. Es suficiente mostrar que $u \circ f$ es armónica en V (¿por qué?). Por la proposición 2.5.8, existe una función analítica g en U tal que $u = \text{Re } g$. Entonces $u \circ f = \text{Re } (g \circ f)$ (¿por qué?) y sabemos que $g \circ f$ es analítica, por la regla de la cadena. Así, Re $(g \circ f)$ es armónica. ■

Teorema del mapeo de Riemann

Hay un teorema básico, pero más sofisticado, concerniente a mapeos conformes, que garantiza la existencia de tales mapeos entre regiones dadas A y B. En la siguiente sección se verifica la validez de este teorema en algunos casos especiales. El teorema general no tiene siempre un valor práctico inmediato, porque no nos dice explícitamente cómo encontrar los mapeos conformes. Sin embargo, es un importante teorema que debemos conocer. Vamos a demostrar aquí la unicidad, pero dejaremos la existencia para el suplemento al capítulo 6; véase también E. Hille, *Analytic Function Theory*, Vol. II (Boston: Ginn, 1959), pág. 322, o L. Ahlfors, *Complex Analysis* (Nueva York: McGraw-Hill, 1966), pág. 222.

Teorema del mapeo de Riemann 5.1.4. *Sea* A *una región simplemente conexa tal que* A $\neq$ **C**. *Entonces existe un mapeo conforme biyectivo* f: A $\to$ D, *donde* D = {z *tal que* |z| < 1}. *Más aún, para cualquier* $z_0 \in$ A *fija, podemos encontrar una* f *tal que* $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. *con tal especificación* f *es única.*

A partir de este resultado, vemos que si A y B son dos regiones simplemente conexas con $A \neq \mathbf{C}$, $B \neq \mathbf{C}$, entonces existe un mapeo conforme biyectivo $g: A \to B$. En efecto, si $f: A \to D$ y $h: B \to D$ son conformes, podemos tomar $g = h^{-1} \circ f$ (véase la figura 5.1.2). Dos regiones A y B son llamadas *conformes* si existe un mapeo biyectivo conforme de A a B. Así, el teorema del mapeo conforme de Riemann implica que dos regiones simplemente conexas (distintas de **C**) son conformes.

Demostración de la unicidad en el teorema 5.1.4. Suponga que f y g son mapeos conformes biyectivos de A sobre D, con $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ y $g'(z_0) > 0$. Queremos mostrar que $f(z) = g(z)$ para toda z en A. Para hacer esto, defínase h en D como $h(w) = g(f^{-1}(w))$ para $w \in D$. Entonces $h: D \to D$ y $h(0) = g(f^{-1}(0)) = g(z_0) = 0$. Por el lema de Schwarz (2.5.7), $|h(w)| \leq |w|$ para toda $w \in D$. Exactamente el

mismo argumento se aplica a $h^{-1} = f \circ g^{-1}$, así que $|h^{-1}(\zeta)| \leq |\zeta|$ para toda $\zeta \in D$. Con $\zeta = h(w)$ esto da $|w| \leq |h(w)|$. Al combinar estas desigualdades, obtenemos $|h(w)| = |w|$ para toda $w \in D$. El lema de Schwarz nos dice ahora que $h(w) = cw$ para una constante c, con $|c| = 1$. Así, $cw = g(f^{-1}(w))$. Con $z = f^{-1}(w)$ obtenemos $cf(z) = g(z)$ para toda $z \in A$. En particular, $cf'(z_0) = g'(z_0)$. Ya que tanto $f'(z_0)$ como $g'(z_0)$ son números reales positivos, también lo es c. Así, $c = 1$ y, por tanto, $f(z) = g(z)$, como se quería. ■

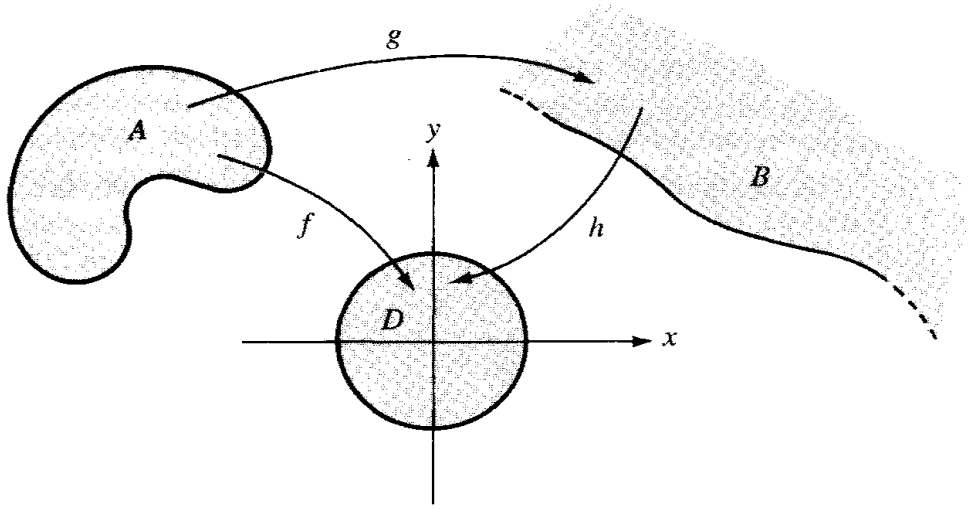


Figura 5.1.2. Para transformar A en B, componemos h^{-1} con f.

La condición $f'(z_0) > 0$ es equivalente a decir que $\arg f'(z_0) = \upsilon$. Usando el argumento precedente, uno puede modificar la afirmación de unicidad de tal manera que $f(z_0)$ y $\arg f'(z_0)$ se especifiquen. Se le pide al estudiante demostrar esto en el ejercicio 7.

Aquí está otro hecho útil que debemos conocer acerca de los mapeos conformes. Sean A y B dos regiones (conexas) con fronteras fr (A) y fr (B). Suponga que $f: A \to f(A)$ es conforme. *Si* f(A) *tiene frontera* fr (B) *y si, para alguna* $z_0 \in$ A, *tenemos* $f(z_0) \in$ B, *entonces* f(A) = B. *En otras palabras, para determinar la imagen de un mapeo conforme, solamente necesitamos considerar la frontera y un punto interior.* Para demostrar esto argumentamos lo siguiente. Puesto que B es abierto, $B \cap$ fr $(B) = \varnothing$. La cerradura de B es $B \cup$ fr (B), así que podemos descomponer al plano en la unión ajena $\mathbf{C} = B \cup$ fr $(B) \cup$ ext B, donde ext B es abierto. Ya que f' nunca se anula en A, el teorema de la función inversa muestra que $f(A)$ es abierto. Por ende $f(A) \cap$ fr $(f(A)) = \varnothing$. Pero fr $(f(A))$ = fr (B), así que $f(A)$ está contenida en la unión de los conjuntos abiertos ajenos B y ext B. Puesto que f es continua en el conjunto conexo A, $f(A)$ es conexo. Por lo tanto, $f(A) \subset B$ o $f(A) \subset$ ext B. Como $f(z_0) \in B$, debemos tener que $f(A) \subset B$. Ya que $f(A)$ es abierto, es abierto relativo de B. Finalmente.

$$\begin{aligned} f(A) = f(A) \cap B &= [f(A) \cap B] \cup [\text{fr}\,(B) \cap B] \\ &= [f(A) \cap B] \cup [\text{fr}\,(f(A)) \cap B] \\ &= [f(A) \cup \text{fr}\,(f(A))] \cap B = \text{cl}\,(f(A)) \cap B \end{aligned}$$

así que $f(A)$ es cerrado relativo de B. Como B es conexo, $f(A) = B$ (véase la proposición 1.4.13).

La conectividad simple, es esencial en el teorema del mapeo de Riemann. Es fácil mostrar (véase el ejemplo resuelto 5.1.7) que sólo una región simplemente conexa puede ser mapeada biyectivamente mediante un mapeo analítico sobre D. Un resultado relacionado que puede demostrarse es que los anillos $0 < |z| < 1$ y $1 < |z| < 2$ no son conformes: véase el ejemplo resuelto 6.1.14.

Comportamiento en la frontera

El teorema del mapeo de Riemann y la mayoría de nuestras otras observaciones acerca de los mapeos conformes han discutido el desarrollo en *regiones*, que son conjuntos *abiertos conexos*. En particular, el teorema del mapeo de Riemann no dice que pasa en la frontera de A o de D. Sin embargo, muchas de las aplicaciones implican encontrar algo dentro de una región, a partir de la información en la frontera. Así que el comportamiento de los mapeos conformes en la frontera puede ser importante. En la siguiente sección investigaremos algunos casos concretos que involucran regiones tales como discos, semiplanos, cuadrantes y demás, y los mapeos seguirán usualmente un buen comportamiento en la frontera. Esto no es casual, como lo muestra el siguiente teorema, pero no es automático. Los conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos para los cuales se aplica el teorema del mapeo de Riemann, pueden ser bastante complicados. Por ejemplo, considere el conjunto A obtenido al suprimir del cuadro $S = \{z | 0 < \text{Re } z < 2 \text{ y } 0 < \text{Im } z < 2\}$ los segmentos verticales $J_n = \{z = 1/n + yi | 0 \leq y \leq 1\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (Véase la figura 5.1.3.) El teorema del mapeo de Riemann garantiza que existe un mapeo conforme de A sobre D, pero el pretender extenderlo continuamente a la frontera de A, particularmente a 0, crea problemas. (Una descripción detallada del comportamiento en la frontera de los mapeos conformes se puede encontrar en el libro *Theory of Functions of a Complex Variable*, de A. I. Markushevich, Nueva York. Chelsea Publ. Co., 1977, Vol. 3, cap. 2. Para regiones bien comportadas existe un bonito resultado, el cual establecemos sin demostración:

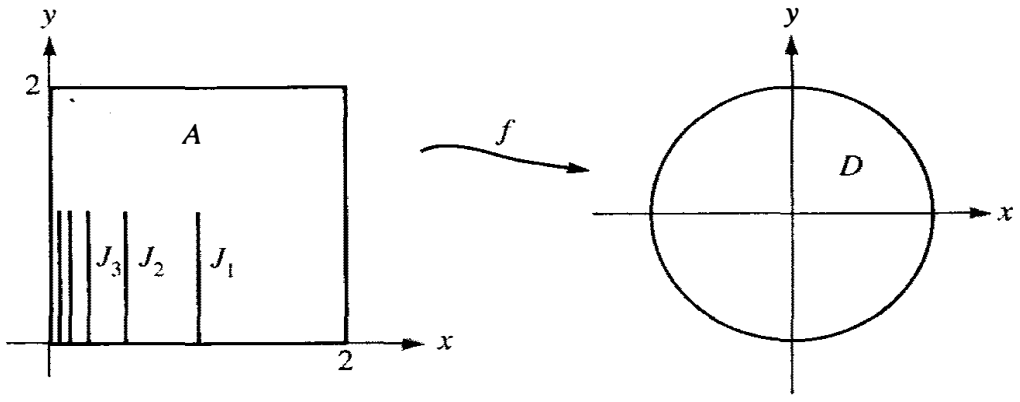


Figura 5.1.3. Aun cuando A tiene una frontera complicada, puede mapearse conformemente en D.

Teorema de Osgood-Caratheodory 5.1.5. *Si* A_1 *y* A_2 *son regiones simplemente conexas acotadas, cuyas fronteras* γ_1 *y* γ_2 *son curvas cerradas, continuas y simples, entonces cualquier mapeo conforme uno a uno y sobre de* A_1 *en* A_2, *puede extenderse a un mapeo continuo uno a uno y sobre, de* $A_1 \cup \gamma_1$ *en* $A_2 \cup \gamma_2$.

Una vez que se conocen las fronteras que son transformadas continuamente, podemos obtener información acerca de las regiones mismas. El siguiente teorema bosqueja tal procedimiento. Las condiciones son lo suficientemente restrictivas que no necesitamos verificar un punto $z_0 \in A$.

Teorema 5.1.6. *Sea* A *una región acotada con* f: A $\rightarrow$ **C** *un mapeo conforme biyectivo sobre su imagen* f(A). *Suponga que* f *se extiende continuamente a* cl (A) *y que* f *transforma la frontera de* A *sobre un círculo de radio* R. *Entonces* f(A) *es igual al interior de ese círculo. Más generalmente, si* B *es una región acotada que, junto con su frontera, puede transformarse conformemente sobre el disco unitario y su frontera, y si* f *transforma a* fr (A) *sobre* fr (B), *entonces* f(A) = B.

Demostración. Al componer f con el mapeo conforme h que manda a B al círculo unitario, es suficiente considerar el caso especial en el que B es igual a $D = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$. Sobre fr (A), $|f(z)| = 1$ y, por lo tanto, por el teorema del módulo máximo, $|f(z)| \leq 1$ en A. Puesto que f no puede ser constante, $f(A) \subset D$. En otras palabras, en ninguna $z \in A$ se alcanza el máximo $|f(z)| = 1$. Hemos supuesto que f(fr (A)) = fr (D), pero esto también es igual a fr $(f(A))$. Para ver esto, use la compacidad de cl (A), la continuidad de f, y el que $D \cap$ fr $(D) = f(A) \cap$ fr $(f(A)) = \varnothing$. Así que nuestro primer argumento se aplica para mostrar que $f(A) = D$. ■

Ejemplos resueltos

5.1.7. *Encuentre un mapeo conforme biyectivo que mande una región acotada a una región no acotada. ¿Puede usted encontrar uno que mande una región simplemente conexa a una región que no es simplemente conexa?*

Solución. Considere $f(z) = 1/z$ en $A = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$. Claramente, A es acotada. También, $B = f(A) = \{z \text{ tal que } |z| > 1\}$; f es conforme de A en B y tiene inversa $g^{-1}(w) = 1/w$. Pero B no es acotado.

La respuesta a la segunda parte de la pregunta es no. Si A es simplemente conexa y si f: $A \rightarrow B$ es un mapeo conforme biyectivo, entonces B debe ser simplemente conexo. Para mostrar esto, sea γ una curva cerrada en B y sea $\gamma = f^{-1} \circ \gamma$. Entonces, si $H(t, s)$ es una homotopía que contrae γ a un punto, $f \circ H(t, s)$ es una homotopía que contrae γ a un punto.

5.1.8. *Considere la función armónica* u(x, y) = x + y *en la región* A = $\{z \mid 0 < \text{Im } z < 2\pi\}$. *¿Cuál es la correspondiente función armónica en* B = **C**\(*eje positivo real*) *cuando* A *es transformada mediante* $z \mapsto e^z$?

Solución. Sea $f(z) = e^z$. Sabemos, del capítulo 1, que f es uno a uno sobre B y que $f'(z) = e^z \neq 0$. Así que f es conforme de A a B y, por lo tanto, por la proposición 5.1.3, la función correspondiente en B es armónica. Esta función es:

$$v(x, y) = u(f^{-1}(x, y)) = u(\log (x + iy))$$
$$= u\left(\log \sqrt{x^2 + y^2} + i \tan^{-1} \frac{y}{x}\right)$$
$$= \log \sqrt{x^2 + y^2} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

donde $\tan^{-1}(y/x) = \arg(x + iy)$ está en $]0, 2\pi[$. Note que verificar directamente que v es armónica sería un poco tedioso, pero sabemos que esto debe ser así por la proposición 5.1.3.

5.1.9. *¿Cuál es la imagen de la región* $A = \{z \mid (\text{Re } z)(\text{Im } z) > 1 \text{ y } \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0\}$ *bajo la transformación* $z \to z^2$?

Solución. En el semiplano derecho $\{z \mid \text{Re } z > 0\}$, sabemos que $f(z) = z^2$ es conforme (¿por qué?). Para encontrar la imagen de A primero encontramos la imagen de la curva $xy = 1$. Sea $w = z^2 = u + iv$. Entonces $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Así, la imagen de $xy = 1$ es la curva $v = 2$. Debemos verificar la localización de la imagen de un punto en A, digamos, $z = 2 + 2i$. Aquí $z^2 = 8i$ y, por lo tanto, la imagen es la región sombreada B en la figura 5.1.4.

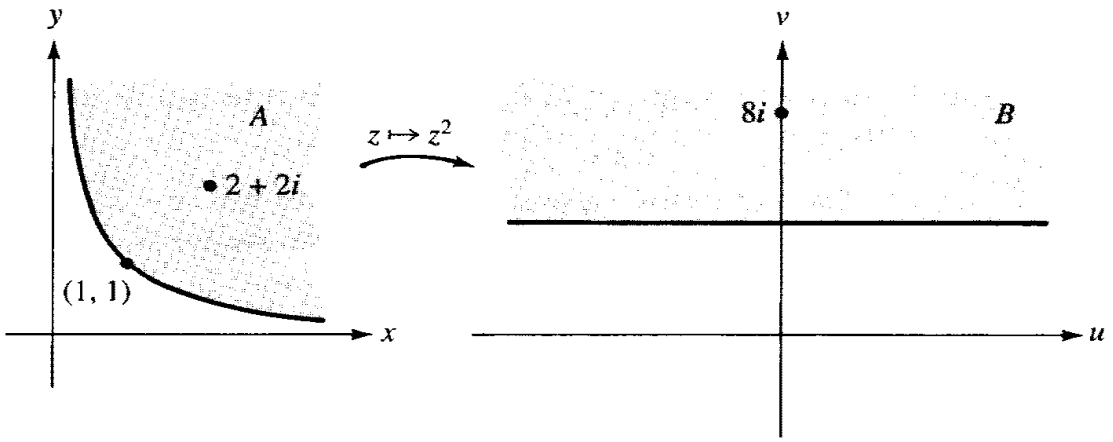


Figura 5.1.4. Imagen del conjunto A bajo el mapeo conforme $z \mapsto z^2$.

Ejercicios

1. ¿Cuál es la imagen del primer cuadrante bajo el mapeo $z \mapsto z^3$?
2. Considere $f = u + iv$, donde $u(x, y) = 2x^2 + y^2$ y $v = y^2/x$. Muestre que las curvas $u =$ constante y $v =$ constante se intersectan ortogonalmente pero que f no es analítica.
3. ¿Cerca de qué puntos son conformes los siguientes mapeos?

   a) $f(z) = z^3 + z^2$ *b)* $f(z) = z/(1 + 5z)$

4. ¿Cerca de qué puntos son conformes los siguientes mapeos?

   a) $f(z) = \bar{z}$ *b)* $f(z) = (\text{sen } z)/(\cos z)$

5. Considere la función armónica $u(x, y) = 1 - y + x/(x^2 + y^2)$ en el semiplano superior $y > 0$. ¿Cuál es la correspondiente función armónica en el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, bajo la transformación $z \mapsto z^2$?
6. Sean A y B regiones cuyas fronteras son arcos suaves. Sea f conforme en una región que incluye $A \cup \text{fr}(A)$ y que transforma A sobre B y $\text{fr}(A)$ sobre $\text{fr}(B)$. Sea u armónica en B y $u = h(z)$ para z en la frontera de B. Sea $v = u \circ f$ de tal manera que v es igual a $h \circ f$ en la frontera de A. Demuestre que $\partial v/\partial n = 0$ en z_0 si $\partial u/\partial n = 0$ en $f(z_0)$, donde $z_0 \in \text{fr}(A)$ y $\partial/\partial n$ denota la derivada en la dirección normal a la frontera.
7. Sean A y B regiones como en el teorema del mapeo de Riemann. Dadas $z_0 \in A$, $w_0 \in B$ y un ángulo θ_0, y suponiendo este teorema, demuestre que existe un mapeo conforme $f: A \to B$ con $f(z_0) = w_0$ y $\arg f'(z_0) = \theta_0$; también demuestre que tal f es única.
8. Sea $f: A \to B$ una función tal que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen y son continuas. Suponga que f es uno a uno y sobre, y que preserva ángulos; demuestre que f es analítica y conforme. ¿Puede el mapeo del ejercicio 2 preservar todos los ángulos? (*Sugerencia:* sea $c(t)$ una curva con $c(0) = z_0$ y sea $d(t) = f(c(t))$. Demuestre

$$d'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)c'(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{c'(t)}$$

y examine la afirmación $d'(0)/c'(0)$ tiene argumento constante, con el fin de establecer las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f.)
9. Si $f: A \to B$ es biyectiva y analítica con inversa analítica, demuestre que f es conforme.
10. Sea $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \to az + b$. Muestre que f puede ser escrita como una rotación, seguida de una amplificación, seguida de una traslación.
11. El teorema del mapeo de Riemann explícitamente excluye de ser considerado el caso en que $A = \mathbf{C}$.

    a) ¿Existe un mapeo conforme uno a uno y sobre de $\mathbf{C}$ en el disco unitario D?
    b) ¿Existe un mapeo conforme uno a uno y sobre de D en $\mathbf{C}$?

12. Muestre que toda transformación conforme biyectiva de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}$ es del tipo descrito en el ejercicio 10.
13. Suponga que f es un mapeo conforme de una región acotada A en una región no acotada B. Muestre que f no puede ser extendida de tal manera que sea continua en $A \cup \text{fr}(A)$. (Observación: no se necesita toda la fuerza de la conformalidad en este problema.)

5.2. FRACCIONALES LINEALES Y TRANSFORMACIONES DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

En esta sección se investigan algunas maneras de obtener mapeos conformes específicos entre dos regiones dadas. No se puede dar una prescripción general para obtener estos mapeos; sin embargo, después de un poco de práctica, el estudiante debe ser capaz de combinar transformaciones fraccionales lineales (estudiadas en esta sección) con otras transformaciones familiares (como z^2, e^z o sen z) y así poder manejar muchas situaciones útiles. Para ayudar en este esfuerzo, se ilustran algunas transformaciones comunes en la figura 5.2.11, al final de esta sección. Además, se estudiará brevemente la fórmula de Schwarz-Christoffel, aun cuando da respuestas que usualmente sólo pueden ser dadas en términos de integrales.

Transformaciones fraccionales lineales

Se discutirá primero la clase más simple, y una de las más útiles, de mapeos conformes. Una *transformación fraccional lineal* (también llamada una transformación bilineal o transformación de Möbius) es un mapeo de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

donde a, b, c y d son números complejos fijos. Supondremos que $ad - bc \neq 0$, puesto que de otra manera T sería una constante (¿por qué?) y queremos omitir este caso. Las propiedades de estas transformaciones se desarrollarán en las siguientes cuatro proposiciones.

Proposición 5.2.1. *El mapeo* T, *definido por la ecuación* (1), *es biyectivo y conforme, de*

$$\mathrm{A} = \left\{ \mathrm{z} \;\middle|\; \mathrm{cz} + \mathrm{d} \neq 0, \textit{ esto es, } \mathrm{z} \neq \frac{-\mathrm{d}}{\mathrm{c}} \right\} \textit{ sobre } \mathrm{B} = \left\{ \mathrm{w} \;\middle|\; \mathrm{w} \neq \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}} \right\}$$

De hecho, la inversa de T *es también una transformación fraccional lineal dada por*

$$\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{-\mathrm{dw} + \mathrm{b}}{\mathrm{cw} - \mathrm{a}} \tag{2}$$

Demostración. Ciertamente T es analítica en A y $S(w) = (-dw + b)/(cw - a)$ es analítica en B. El mapeo T será biyectivo si podemos mostrar que $T \circ S$ y $S \circ T$ son la identidad, ya que esto significa que T tiene a S como su inversa. En efecto, esto se ve en estos cálculos:

$$\begin{aligned} T(S(w)) &= \frac{a\left(\dfrac{-dw + b}{cw - a}\right) + b}{c\left(\dfrac{-dw + b}{cw - a}\right) + d} \\ &= \frac{-adw + ab + bcw - ab}{-cdw + bc + dcw - da} \\ &= \frac{(bc - ad)w}{bc - ad} = w \end{aligned}$$

Podemos cancelar porque $cw - a \neq 0$ y $bc - ad \neq 0$. Similarmente, $ST(z) = z$. Finalmente, $T'(z) \neq 0$ pues

$$\frac{d}{dz} S(T(z)) = \frac{d}{dz} z = 1$$

y así

$$S'(T(z)) \cdot T'(z) = 1$$

Por lo tanto, $T'(z) \neq 0$. ■

Algunas veces es conveniente escribir $T(-d/c) = \infty$ (aunque, como siempre, debemos ser cuidadosos para evitar las respuestas erróneas que obtendríamos si cancelamos ∞/∞ o 0/0). En efecto, podemos mostrar que todas las transformaciones fraccionales lineales son mapeos conformes del plano extendido $\bar{\mathbf{C}}$ en sí mismo. Algunos casos especiales deben señalarse. Por ejemplo, si $a = 1$, $c = 0$ y $d = 1$, obtenemos $T(z) = z + b$, la cual es una traslación o "deslizamiento" que únicamente traslada por el vector b (véase la figura 5.2.1). En el caso en que $b = c = 0$, $d = 1$, T resulta $T(z) = az$. Este mapeo, multiplicación por a, es una rotación por arg a y una amplificación por $|a|$. El estudiante debe revisar el significado geométrico en este caso. Finalmente, $T(z) = 1/z$ es una inversión. Esto se ilustra en la figura 5.2.2.

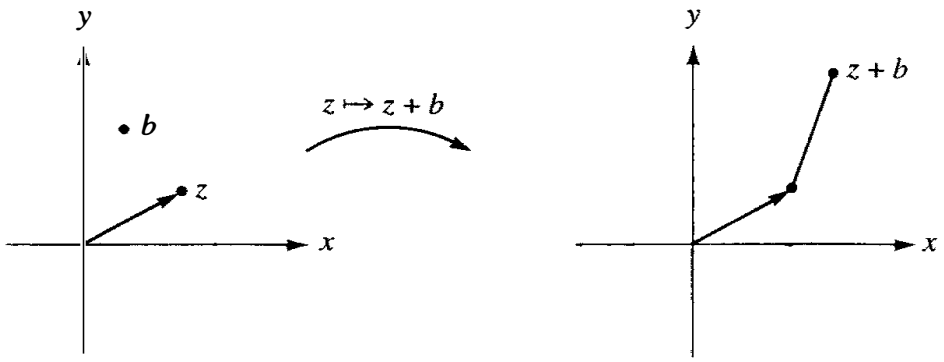


Figura 5.2.1. Traslación.

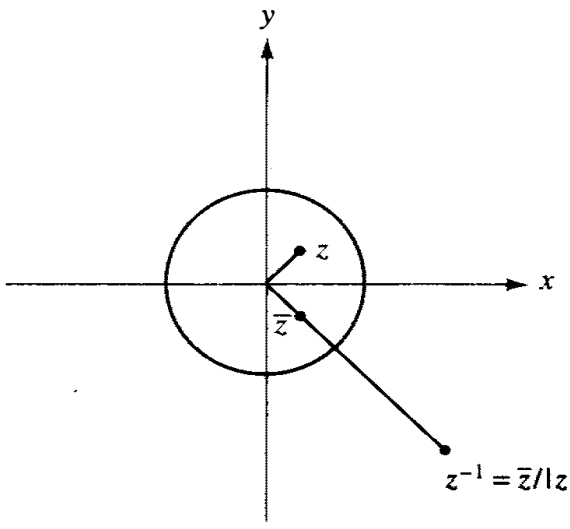


Figura 5.2.2. Inversión.

Proposición 5.2.2. *Cualquier mapeo conforme de* D {z tal que |z| < 1} *sobre sí mismo es una transformación fraccional lineal de la forma*

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \tag{3}$$

para alguna $z_0 \in$ D *fija y* $\theta \in [0, 2\pi[$; *más aún, cualquier* T *de esta forma es un mapeo conforme de* D *sobre* D.

Demostración. Primero verificaremos que para T de esta forma, $|z| = 1$ implica que $|T(z)| = 1$. En efecto,

$$|T(z)| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z|\,|z^{-1} - \bar{z}_0|}$$

Pero $|z| = 1$ y, por tanto, $z^{-1} = \bar{z}$. Así, obtenemos

$$|T(z)| = \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = 1$$

ya que $|w| = |\bar{w}|$. La única singularidad de T está en $z = \bar{z}_0^{-1}$, que está fuera del círculo unitario.

Entonces, por el teorema del módulo máximo, T transforma D en D. Pero por la proposición 5.2.1,

$$T^{-1}(w) = e^{-i\theta} \left[\frac{w - (-e^{i\theta} z_0)}{1 - (-e^{-i\theta} \bar{z}_0) w} \right]$$

la cual, puesto que tiene la misma forma que T, es también un mapeo de D en D. Así que T es conforme de D sobre D.

Sea R: $D \to D$ cualquier mapeo conforme. Sea $z_0 = R^{-1}(0)$ y sea $\theta = \arg R'(z_0)$. El mapeo T definido por la ecuación (3), también tiene $T(z_0) = 0$ y $\theta = \arg T'(z_0)$; en efecto,

$$T'(z) = e^{i\theta} \left[\frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} \right]$$

el cual, en $z = z_0$, es igual a

$$e^{i\theta} \left(\frac{1}{1 - |z_0|^2} \right)$$

una constante real por $e^{i\theta}$. Así, por la unicidad de los mapeos conformes (véase el teorema del mapeo de Riemann (5.1.4) y el ejercicio 7, sección 5.1), $R = T$. ■

El resultado de esto es que la única forma de transformar un disco sobre sí mismo conformemente, es por medio de una transformación fraccional lineal. Esta transformación tiene dos propiedades adicionales, como se mostrará en los dos resultados que siguen.

Proposición 5.2.3. *Sea* T *una transformación fraccional lineal. Si* L $\subset$ C *es una línea recta y* S $\subset$ C *es un círculo, entonces* T(L) *es una línea recta o un círculo, y* T(S) *es una línea recta o un círculo.*

Una línea puede transformarse en un círculo o en una línea. Si vemos a las líneas como círculo de radio infinito, entonces este resultado puede resumirse diciendo que círculos se transforman en círculos.

Demostración. Escribiremos $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, donde $T_1(z) = z + d/c$, $T_2(z) = 1/z$, $T_3(z) = (bc - ad)z/c^2$ y $T_4(z) = z + a/c$. (Si $c = 0$, sólo escribimos $T(z) = (a/d)z + b/d$). Esto es fácil de verificar (véase el ejercicio 11). Es obvio que T_1, T_3 y T_4 transforman líneas en líneas, y círculos en círculos. Así que si podemos verificar la conclusión para $T(z) = 1/z$, la demostración estará completa. Sabemos, de la geometría analítica, que una línea o un círculo está determinado por la ecuación

$$Ax + By + C(x^2 + y^2) = D$$

para constantes A, B, C, D, con A, B, C, no todas cero. Sea $z = x + iy$, suponga que $z \neq 0$ y sea $1/z = u + iv$, de modo que $u = x/(x^2 + y^2)$ y $v = -y(x^2 + y^2)$. Así, la ecuación precedente es equivalente a

$$Au - Bv - D(u^2 + v^2) = -C$$

la cual es también un círculo o una línea. ■

Otra propiedad de las transformaciones fraccionales lineales se describe en el siguiente resultado.

Razón cruzada 5.2.4. *Dados dos conjuntos de puntos distintos* z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 *(esto es,* $z_1 \neq z_2, z_1 \neq z_3, z_2 \neq z_3$ y $w_1 \neq w_2, w_2 \neq w_3, w_1 \neq w_3$, *pero podemos tener* $z_1 = w_2$, *y así sucesivamente), existe una única transformación fraccional lineal* T *que manda* $z_i \to w_i$, i = 1, 2, 3, *De hecho, si* T(z) = w, *entonces*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \tag{4}$$

El estudiante encontrará que frecuentemente es más fácil proceder directamente que tratar de recordar la ecuación (4) (véase el ejemplo resuelto 5.2.13).

Demostración. La ecuación (4) define una transformación fraccional lineal $w = T(z)$ (¿por qué?). Al sustituir directamente vemos que tiene las propiedades deseadas $T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$. (Véase el ejercicio 20.) Vamos a probar que es única. Defina

$$S(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Entonces S es una transformación fraccional lineal que manda z_1 a 0, z_3 a 1, y z_2 a ∞. (z_2 es la singularidad de S.) Sea R cualquier otra transformación fraccional lineal, $R(z) = (az + b)/(cz + d)$ con $R(z_1) = 0$, $R(z_3) = 1$ y $R(z_2) = \infty$ (esto es, $cz_2 + d = 0$.) Entonces $az_1 + b = 0$, $cz_2 + d = 0$ y $(az_3 + b)/(cz_3 + d) = 1$. De este modo obtenemos que $a = -b/z_1$ y $c = -d/z_2$, así que la última condición da $b(z_1 - z_3)/z_1 = d(z_2 - z_3)/z_2$. Al sustituir en R, vemos, después de simplificar (lo cual debe hacer el estudiante), que $R = S$.

Usamos este resultado para probar que T es única, como sigue. Sea T cualquier transformación fraccional líneal que manda z_i a w_i, $i = 1, 2, 3$, La transformación fraccional lineal ST^{-1} manda $w_1 = Tz_1$ a 0, $w_3 = Tz_3$ a 1, y $w_2 = Tz_2$ a ∞. Por lo tanto, ST^{-1} está determinado de esta manera única, por los cálculos precedentes. Así, T está determinada de manera única, ya que $T = (ST^{-1})^{-1}S$. ■

Se sigue que podemos usar una transformación fraccional lineal para transformar cualesquiera tres puntos en otros tres. Tres puntos están en un único círculo o línea y así, por la proposición 5.2.3, la transformación manda el círculo (o línea) a través de z_1, z_2, z_3, en el círculo (o línea) que pasa por w_1, w_2, w_3, Por ejemplo, podemos tener la situación descrita en la figura 5.2.3. El interior del disco se transforma en uno de los dos semiplanos. Para determinar cuál, uno puede ver a dónde va el

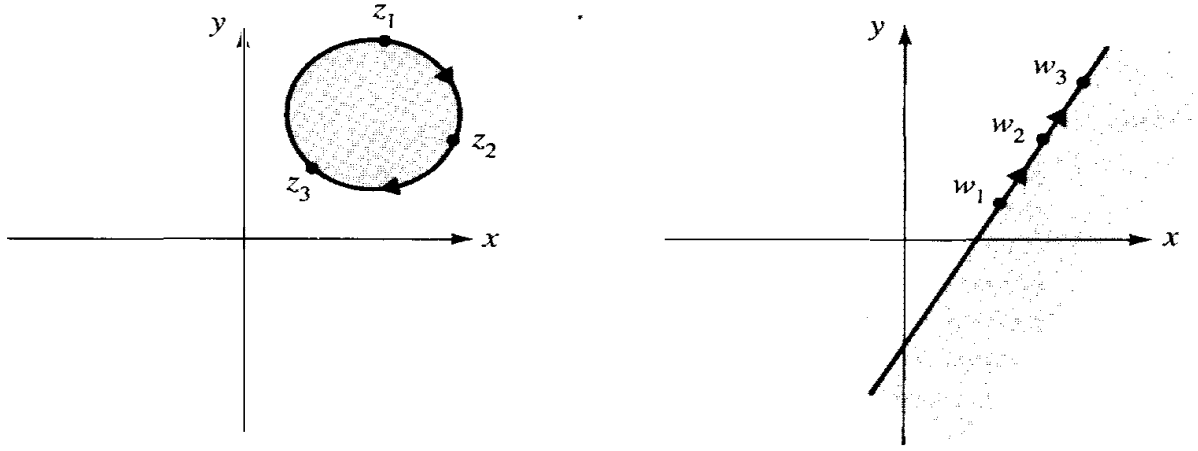


Figura 5.2.3. Efecto de una transformación fraccional lineal.

centro del círculo (o cualquier otro punto, especialmente si sucede que el centro va a ∞). Otra manera de hacer esto es comprobando la orientación. Conforme avanzamos desde z_1, a través de z_2, hasta z_3, localizados como en la figura 5.2.3, vamos en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del círculo con el disco a la derecha. La imagen debe avanzar desde w_1, a través de w_2, hasta w_3, a lo largo de la línea, con la imagen del disco a la derecha, como se muestra. El semiplano que es la imagen puede cambiarse al intercambiar z_1 y z_3. Suponga que z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 determinan los círculos C_1 y C_2 que acotan a los discos D_1 y D_2. Si la transformación fraccional lineal que manda z_1, z_2 y z_3 a w_1, w_2, y w_3 es analítica en D_1, entonces debe transformar a D_1 sobre D_2 y al exterior de C_1 sobre el exterior de C_2.

Si el cero del denominador está en D_1, entonces transforma a D_1 en el exterior de C_2, junto con el punto al infinito. Otra vez puede determinarse la situación al examinar la orientación de los puntos a lo largo de los círculos y puede invertirse al cambiar la orientación de una de las ternas de puntos. Algunas de estas ideas y técnicas se ilustran en el ejemplo resuelto 5.2.15.

Como mencionamos antes, las transformaciones fraccionales lineales pueden combinarse con otras transformaciones para obtener una clase bastante grande de mapeos conformes. Esto se ilustra en los ejemplos resueltos.

Reflexión en un círculo

La idea de la reflexión en un círculo, que fue usada en la demostración de la fórmula de Poisson en la sección 2.5, puede generalizarse rápidamente a círculos con centros distintos de 0. Esto puede discutirse en forma puramente geométrica y funciona también para transformaciones fraccionales lineales. En el espíritu de esta sección, las líneas rectas pueden ser pensadas como círculos de radio infinito. En este caso la nueva noción de reflexión resulta la reflexión usual. En particular, la reflexión en el eje real es la conjugación compleja. La proposición clave es una bonita ilustración del uso del análisis complejo en un contexto aparentemente puramente geométrico.

Proposición 5.2.5. *Sea* C *un círculo (o una línea recta) y* z *un punto que no está en* C. *Entonces, todos los círculos (o líneas) a través de* z *que cruzan a* C *en un ángulo recto, se intersecan uno con respecto de otro en un solo punto* $\tilde{z}$. *(Si sucede que* $\tilde{z}$ *es el centro de* C, *entonces* z *es el punto al infinito.)*

Demostración. Sea f una transformación fraccional lineal que manda a C a la línea real y al interior de C al semiplano superior. La familia de círculos que pasan por z y cruzan a C en un ángulo recto deben transformarse en la familia de círculos que pasan a través de $w = f(z)$ y cruzan el eje real en un ángulo recto, ya que f transforma círculos en círculos y preserva ángulos. Pero en la última familia claramente todos se intersecan en $\bar{w}$. En consecuencia, en la primera familia deben todos cruzarse uno a otro en un solo punto $\tilde{z} = f^{-1}(w)$. Véase la figura 5.2.4. ■

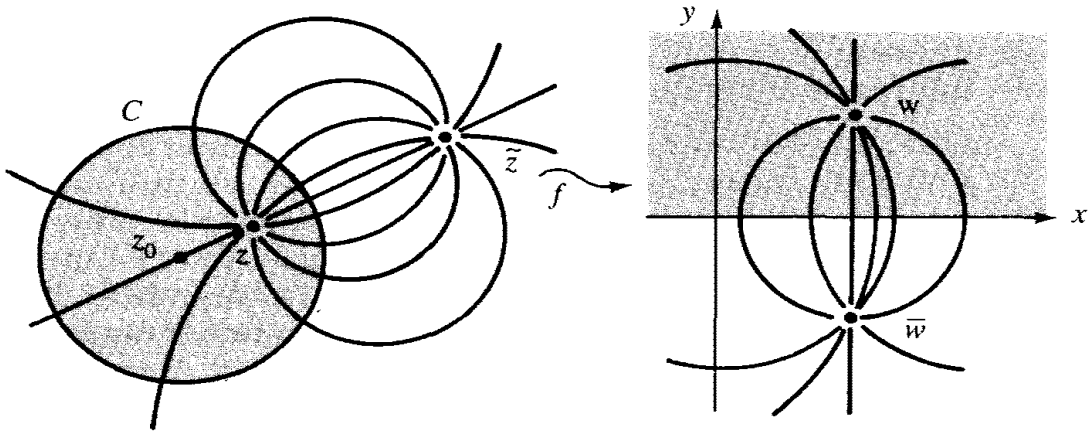


Figura 5.2.4. Los círculos que emanan de z y que cruzan C en ángulos rectos, todos pasan a través de $\tilde{z}$.

Definición 5.2.6. *Sea* C *un círculo o una línea recta y* z *un punto que no está en* C. *El único punto* $\tilde{z}$ *obtenido en la proposición* 5.2.5 *es llamado la* ***reflexión*** *de* z *en* C. *Si* z *está sobre* C, *hágase* $\tilde{z} = z$.

Puesto que las transformaciones fraccionales lineales mandan círculos en círculos y preservan ángulos, la siguiente afirmación no debe ser sorprendente.

Proposición 5.2.7. *Si* g *es una transformación fraccional lineal y* C *es un círculo (o una línea), entonces* g *manda la reflexión de* z *en* C *a la reflexión de* g(z) *en* g(C).

Esta afirmación puede ser parafraseada en la siguiente forma, algo imprecisa pero fácil de recordar: *Una transformación fraccional lineal preserva reflexiones en círculos:* esto es,

$$g(\tilde{z}) = [g(z)]^{\sim}$$

Demostración. La familia de círculos ortogonales a C que pasan por z es llevada a la familia de círculos ortogonales a $g(C)$ que pasan por $g(z)$, ya que g manda círculos en círculos y preserva ángulos. De este modo, la intersección de la primera familia, que es $\tilde{z}$, debe transformarse en la intersección de la segunda familia, que es $g(\tilde{z})$. ■

De hecho, la reflexión es casi una transformación fraccional lineal por sí misma.

Proposición 5.2.8. *Si* C *es un círculo (o una línea), entonces el mapeo* $z \to \tilde{z}$ *de reflexión en* C, *es una composición de transformaciones fraccionales lineales y conjugación compleja. Si* C *es el círculo con centro* z_0 *y radio* R, *entonces*

$$\tilde{z} = \overline{\left(\frac{z_0 z + R^2 - |z_0|^2}{z - z_0} \right)}$$

Demostración. Sea f como en la demostración de la proposición 5.2.5. El final de esa demostración fue la ecuación $\tilde{z} = f^{-1}(\bar{w}) = f^{-1}(\overline{f(z)})$, la cual es justamente la afirmación general de la proposición. Para obtener la fórmula concreta, construimos una función f que manda C al círculo unitario mediante $z \mapsto (z - z_0)/R$, y entonces componemos con el mapeo del círculo unitario al semiplano superior dado en la figura 5.2.11 (vi). (Véase también el ejemplo resuelto 5.2.13.) El resultado es

$$f(z) = i \frac{R + z - z_0}{R - z + z_0}$$

Hágase $f(\tilde{z}) = \overline{f(z)}$ y resuelva para $\tilde{z}$, para obtener la fórmula deseada. ■

A partir de la fórmula de la proposición 5.2.8, podemos rápidamente calcular otra descripción geométrica de $\tilde{z}$.

Proposición 5.2.9. *Si* C *es un círculo con centro* z_0 *y radio* R *y si* $z \neq z_0$, *entonces* $\tilde{z}$ *es el punto sobre el mismo rayo que va de* z_0 *a* z, *y se selecciona de modo que el producto de las distancias desde* z_0 *es* R^2: i.e.,

$$|z - z_0| \cdot |\tilde{z} - z_0| = R^2$$

Demostración. Use el hecho de que $|\tilde{z} - z_0| = |\overline{\tilde{z}} - \overline{z}_0|$ y calcule $|z - z_0| \cdot |\overline{\tilde{z}} - \overline{z}_0|$ usando la fórmula de la proposición 5.2.8. (Véase el ejercicio 23 y la figura 5.2.5.) ■

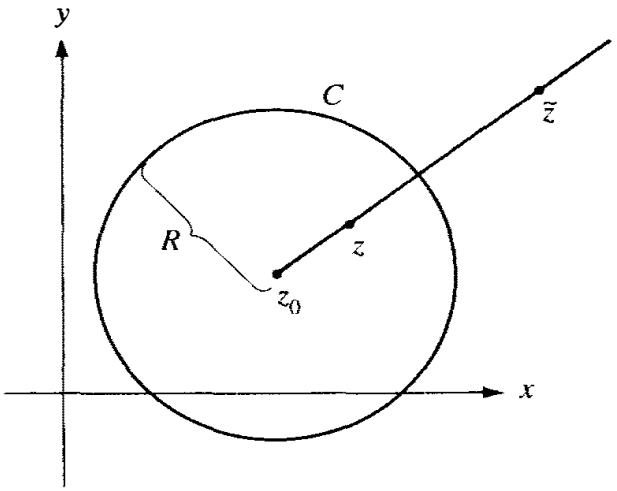


Figura 5.2.5. La reflexión de *z* en *C*.

A partir de las caracterizaciones anteriores, la mayoría de los siguientes resultados deben resultar ahora claros.

Proposición 5.2.10

(i) $\tilde{\tilde{z}} = z$.
(ii) *El mapeo* $z \mapsto \tilde{z}$ *no es conforme, pero se preserva la magnitud de los ángulos y se invierte su dirección (justo como en la conjugación compleja).*
(iii) *Si* C *es una línea recta,* $\tilde{z}$ *es el punto sobre la línea perpendicular a* C *a través de* z *y a una distancia igual en el lado opuesto de* C.
(iv) *El mapeo* $z \mapsto \tilde{z}$ *manda círculos en círculos (las línea rectas cuentan como círculos de radio infinito).*

La fórmula de Schwarz-Christoffel

La fórmula de Schwarz-Christoffel da una expresión integral para transformar el semiplano superior o un círculo unitario, en el interior de un polígono dado. El caso del semiplano superior se discutirá aquí; el caso de un círculo se deja como ejercicio.

Fórmula de Schwarz-Christoffel 5.2.11. *Suponga que* P *es un polígono en el* w*-plano, con vértices en* $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *y con ángulos exteriores* $\pi\alpha_i$, *donde* $-1 < \alpha_i < 1$ *(véase la figura 5.2.6). Entonces, los mapeos conformes de* $A = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ *sobre* B, *el interior de* P, *tienen la forma*

$$f(z) = a\left(\int_{z_0}^{z} (\zeta - x_1)^{-\alpha_1} \cdots (\zeta - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}}\, d\zeta\right) + b \tag{5}$$

donde a *y* b *son constantes y la integración es a lo largo de cualquier trayectoria en* A *que une a* $z_0 \in A$ *con* z*; se usa la rama principal para las potencias en el integrando. Más aún,*

(i) *Se pueden escoger arbitrariamente dos de los puntos* $x_1, \ldots, x_n$.
(ii) a *y* b *determinan el tamaño y la posición de* P;
(iii) $f(x_i) = w_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$;
y
(iv) f *manda el punto al infinito a* w_1.

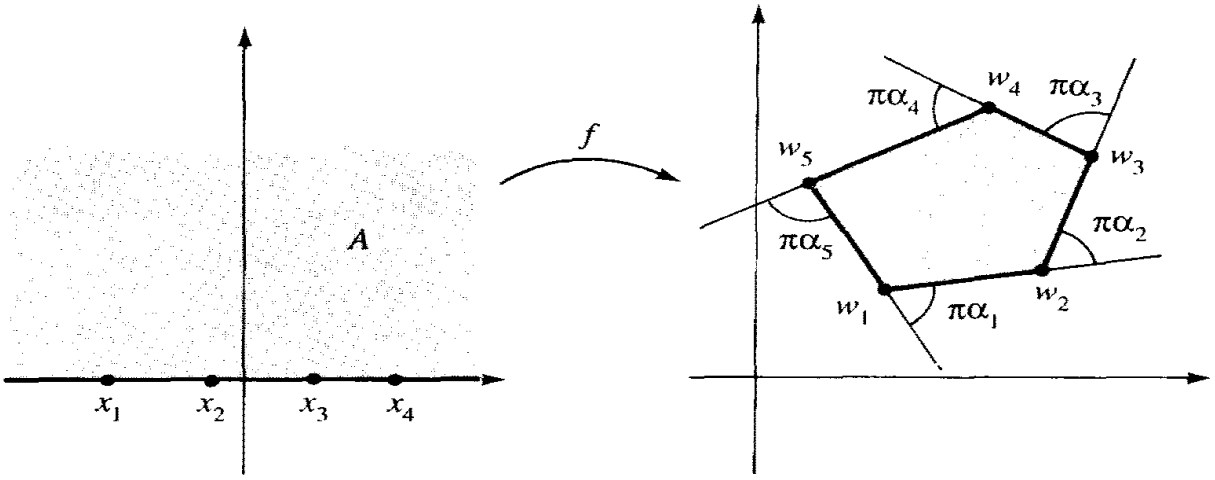


Figura 5.2.6. La fórmula de Schwarz-Christoffel.

El significado geométrico de las constantes *a* y *b* se explica con más detalle en la siguiente demostración. Se puede mostrar que la función *f* puede extenderse para que sea continua en el eje *x* y que *f* transforma al eje *x* en el polígono *P*. Sin embargo, la función *f* no es analítica en el eje *x*, porque no preserva ángulos en x_i. Pero *f* será analítica en *A* misma. Únicamente se darán las principales ideas de la demostración de la ecuación (5), puesto que dar una demostración absolutamente precisa sería bastante tedioso.

Bosquejo de la demostración de la fórmula de Schwarz-Christoffel. El primer paso es mostrar que si $x_1, \ldots, x_{n-1}$ han sido ya escogidos, entonces *f* transforma al eje real en un polígono que tiene los ángulos correctos. Sea

$$g(z) = a(z - x_1)^{-\alpha_1} \cdots (z - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}}$$

así que, en *A*, $f'(z) = g(z)$. Entonces

$$= \arg a - \alpha_1 \arg (z - x_1) - \cdots - \alpha_{n-1} \arg (z - x_{n-1})$$

En un punto donde $f'(z)$ existe, $\arg f'(z)$ representa la cantidad que f rota a los vectores tangentes. Así, conforme f se mueve a lo largo del eje real, $f(z)$ se mueve a lo largo de una línea recta, para z en cada uno de los segmentos $]-\infty, x_1[, \ldots,]x_i, x_{i+1}[, \ldots,]x_{n-1}, \infty[$. Conforme z cruza x_i, $\arg f(z)$ salta por una cantidad $\alpha_i\pi$. (Si $z - x_i < 0$, $\arg(z - x_i) = \pi$; si $z - x_i > 0$, $\arg(z - x_i) = 0$.) En consecuencia, el eje real es transformado en un polígono con los ángulos correctos. El último ángulo del polígono está determinado pues debemos tener $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\pi = 2\pi$.

Enseguida, ajustamos este polígono para obtener P. La igualdad de los ángulos obliga a la semejanza de polígonos sólo para triángulos. (Por ejemplo, no todos los rectángulos son cuadrados.) Ésta es la razón básica de por qué deben escogerse arbitrariamente dos de los puntos (tres, si contamos el punto al infinito). Las posiciones de los otros puntos relativa a estos puntos, controla las razones de las longitudes de los lados del polígono imagen. Al escoger la x_i correctamente, obtenemos entonces un polígono similar a P. Otra manera de entender este problema es considerar la transformación del semiplano superior en un disco. Sabemos que esto puede ser efectuado mediante una transformación fraccional lineal y que esta transformación está determinada completamente por su valor en tres de los puntos frontera. (Dos de los puntos finitos y el valor en el infinito son especificados.) Escoger apropiadamente a a y b significa realizar un ajuste de escala, una rotación y una traslación para llevar este polígono a P. ■

Ejemplos resueltos

5.2.12. *Encuentre un mapeo conforme que mande a* $A = \{z \mid 0 < \arg z < \pi/2, 0 < |z| < 1\}$ *al conjunto* $D = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$.

Solución. La respuesta no está dada por $z \mapsto z^4$, porque este mapeo no transforma A sobre D; su imagen omite al eje real positivo.
Primero considere $z \mapsto z^2$. Éste transforma A en B, donde B es la intersección de D y del semiplano superior (figura 5.2.7). Enseguida (consulte la figura 5.2.11(iv)) transforme a B en el primer cuadrante mediante $z \mapsto (1 + z)/(1 - z)$ y eleve al cuadrado para obtener el semiplano superior; entonces transforme $z \mapsto (z - i)/(z + i)$ para obtener el círculo unitario.

Así obtenemos nuestra transformación mediante sustituciones consecutivas:

$$w_1 = z^2; \; w_2 = \frac{1 + w_1}{1 - w_1} = \frac{1 + z^2}{1 - z^2}; \; w_3 = w_2^2 = \left(\frac{1 + z^2}{1 - z^2}\right)^2;$$

$$w_4 = \frac{w_3 - i}{w_3 + i} = \frac{\left(\dfrac{1 + z^2}{1 - z^2}\right)^2 - i}{\left(\dfrac{1 + z^2}{1 - z^2}\right)^2 + i}$$

Por lo tanto,

$$f(z) = \frac{(1+z^2)^2 - i(1-z^2)^2}{(1+z^2)^2 + i(1-z^2)^2}$$

es la transformación requerida.

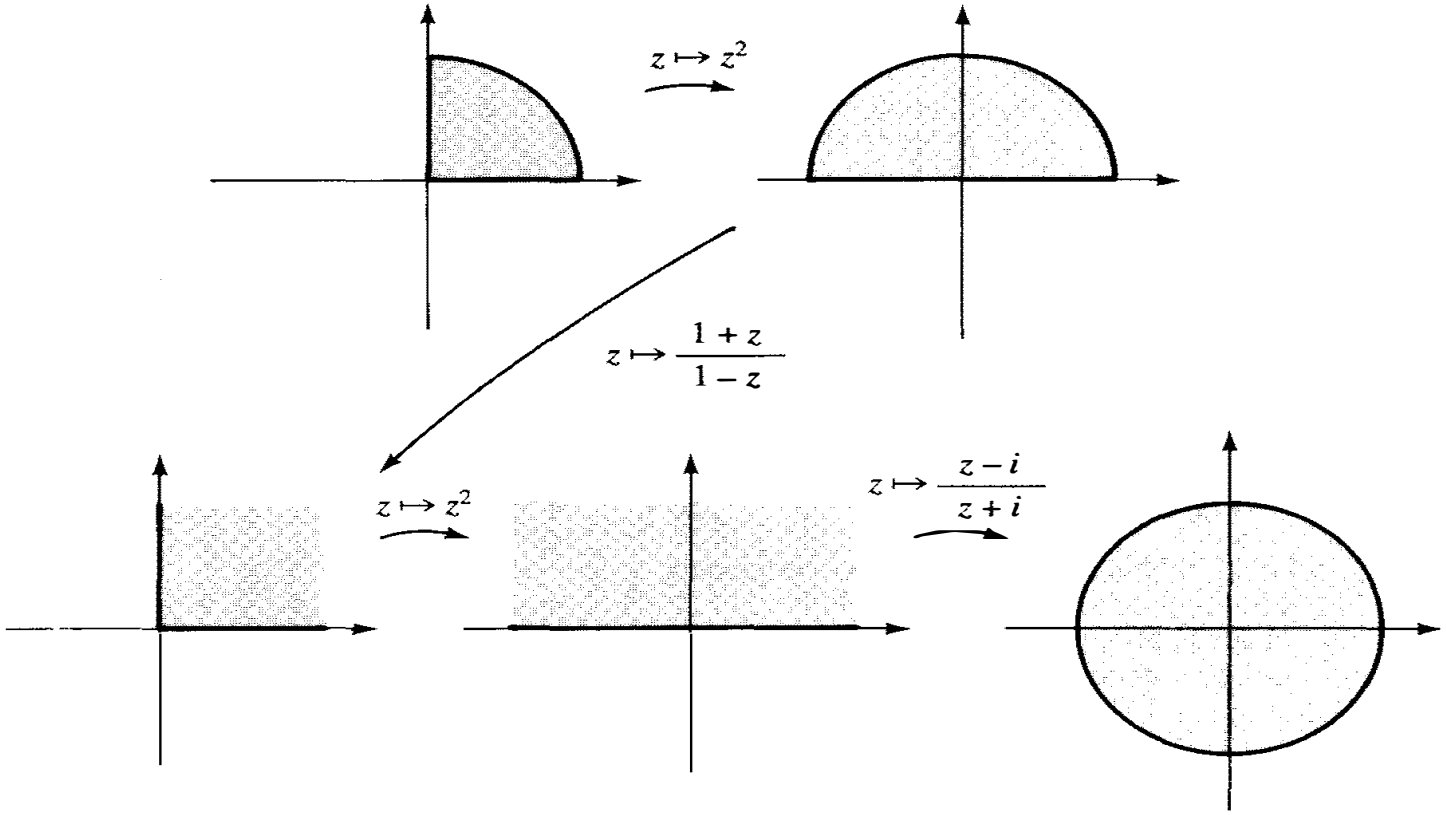


Figura 5.2.7. Transformaciones sucesivas que mandan al cuarto de círculo en el círculo completo.

5.2.13. *Verifique la figura* 5.2.11(vi).

Solución. Buscamos una transformación fraccional lineal $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ tal que $T(-1) = i$, $T(0) = -1$, $T(1) = -i$. Así $(-a + b)/(-c + d) = i$, $b = -d$, y $(a + b)/(c + d) = -i$. Al resolver resulta $-a - d = i(-c + d)$, $b = -d$, $a - d = -i(c + d)$. Al sumar la primera y la última ecuaciones, obtenemos $-2d = i(-2c)$ o $d = ic$ y al restar nos da $a = -id$. Podemos hacer, digamos, $b = 1$ (pues el numerador y el denominador se pueden multiplicar por una constante), así que $d = -1$, $a = i$, $c = i$ y en consecuencia

$$T(z) = \frac{iz + 1}{iz - 1} = \frac{z - i}{z + i}$$

Debemos comprobar que $T(i)$ está dentro del círculo unitario. Esto es cierto pues $T(i) = 0$. (Si se encontrara fuera, podríamos intercambiar $A = -1$ y $B = 0$.)

5.2.14. *Encuentre un mapeo conforme que mande al semiplano mostrado en la figura* 5.2.8 *sobre el disco unitario.*

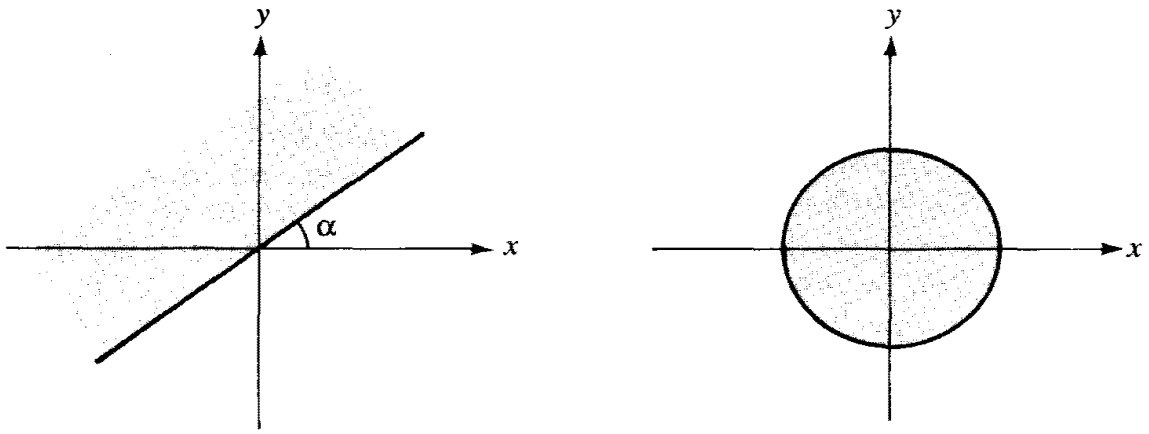


Figura 5.2.8. Mapeo de un semiplano rotado en el disco.

Solución. Considere $S(z) = e^{-i\alpha} z$. Éste transforma la región A en el semiplano superior (¿por qué?). Entonces, al usar la figura 5.2.11(vi) obtenemos

$$T(z) = \frac{e^{-i\alpha}z - i}{e^{-i\alpha}z + i}$$

como la transformación requerida.

5.2.15. *Estudie la acción de las funciones* $f(z) = (z-1)/(z-3)$ y $g(z) = (z+1)/(3z+1)$ *en el círculo unitario, el disco unitario y el eje real.*

Solución. Primero calculemos las imágenes de algunos puntos adecuados

a) $f(1) = 0$	$g(1) = \frac{1}{2}$	*b)* $f(i) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$	$g(i) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$
c) $f(-1) = \frac{1}{2}$	$g(-1) = 0$	*d)* $f(0) = \frac{1}{3}$	$g(0) = 1$
e) $f(3) = \infty$	$g(-\frac{1}{3}) = \infty$		

Así, f manda al círculo que pasa por 1, i y -1, al círculo que pasa por 0, $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ y $\frac{1}{2}$. El mapeo g manda al círculo unitario al mismo círculo pero con la orientación invertida, f manda al disco unitario al interior del círculo imagen mientras que g lo manda al exterior. Esto puede determinarse al examinar las imágenes de 0 o al notar que $g(-\frac{1}{3}) = \infty$.

Podría no ser obvio cuál es el círculo imagen, pero es más fácil después de observar que tanto f como g mandan al eje real sobre el eje real. (La línea que pasa por -1, 0 y 1, va a la línea que pasa por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y 0, en el caso de f y va a la línea que pasa por 0, 1 y $\frac{1}{2}$, en el caso de g. Considere a dónde van las diferentes partes de la línea.) El círculo unitario cruza al eje real en ángulo recto en ± 1 y, por ende, el círculo imagen debe cruzar el eje en ángulo recto en 0 y $\frac{1}{2}$. Entonces, es el círculo de radio $\frac{1}{4}$ cencentrado en $\frac{1}{4}$ compruebre que éste pasa por $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$. Los efectos de este mapeo se indican en la figura 5.2.9.

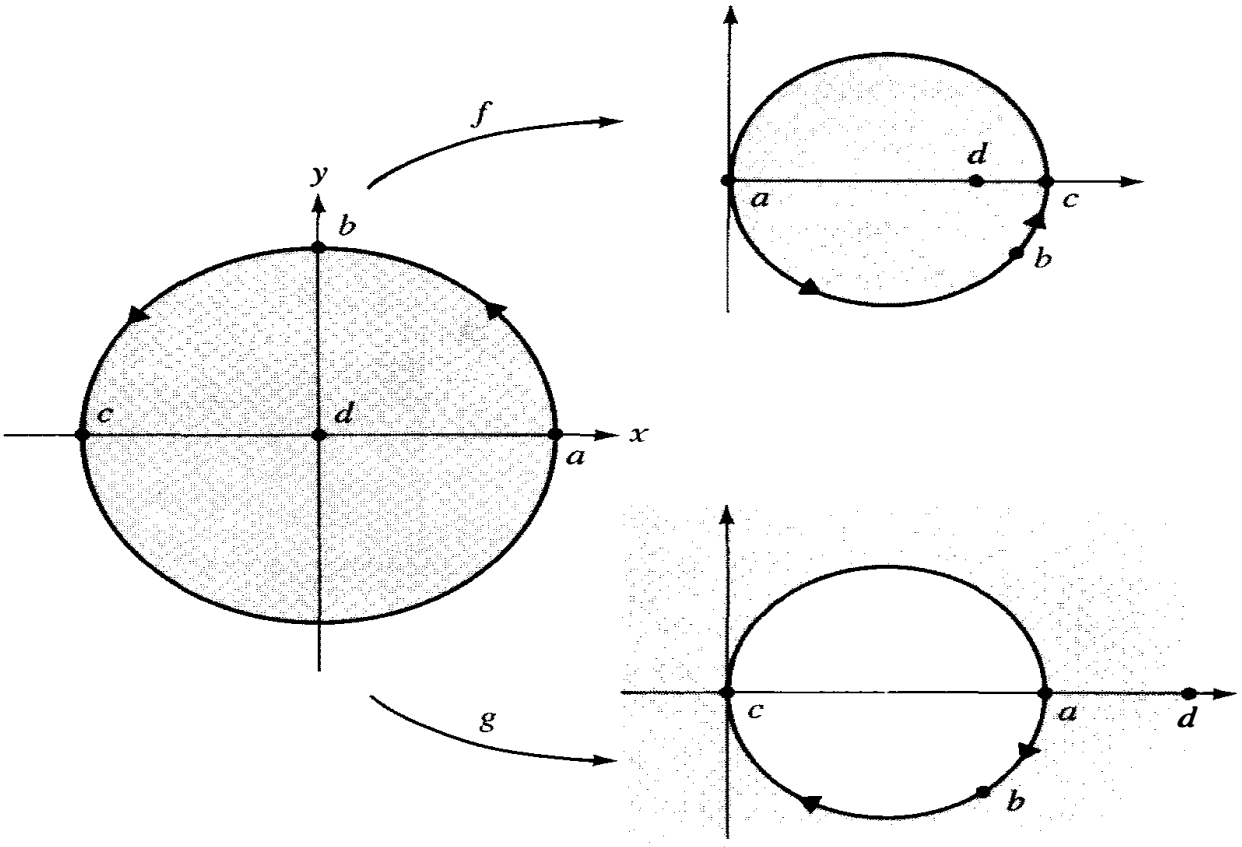


Figura 5.2.9. Los mapeos para el ejemplo resuelto 5.2.15.

5.2.16. *Sea* $A = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ y } 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}$.

a) *Encuentre un mapeo conforme* f *uno a uno y sobre, de* A *en el semiplano superior.*
b) *Encuentre un mapeo conforme* g, *uno a uno y sobre, de* A *en el disco unitario.*

Primera solución. Considere las siguientes funciones:

$$f_1(z) = -iz$$
$$f_2(z) = z^2$$
$$f_3(z) = z^2 - 1$$
$$f_4(z) = \sqrt{z} \quad \text{(corte de rama en el eje real negativo)}$$
$$f_5(z) = iz$$
$$f_6(z) = \frac{1 - z}{1 + z}$$

El mapeo f_1 rota a A 90° para obtener el semiplano derecho con un corte de 0 a 1. f_2 lo extiende a todo el plano con un corte desde $-\infty$ a 1, y f_3 traslada esto al plano con un corte desde $-\infty$ a 0. f_4 manda esto de regreso al semiplano derecho. Finalmente, f_5 rota el semiplano derecho en el semiplano superior, mientras que f_6 manda al semiplano derecho al disco unitario. Así $f(z) = f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(z)))))$ debe funcionar para la parte *a*), y $g(z) = f_6(f_4(f_3(f_2(f_1(z)))))$ debe funcionar para la parte *b*). Calculamos

$$f_4(f_3(f_2(f_1(z)))) = \sqrt{(-iz)^2 - 1} = \sqrt{-1}\sqrt{z^2 + 1}$$

Escójase $\sqrt{-1}$ con cuidado: -1 está en el corte de rama. Con $\sqrt{-1} = -i$ tenemos $f(z) = i(-i)\sqrt{z^2+1} = \sqrt{z^2+1}$ y la imagen es el semiplano superior. Para llegar al disco unitario, tómese

$$g(z) = f_6(-i\sqrt{z^2+1}) = \frac{1 + i\sqrt{z^2+1}}{1 - i\sqrt{z^2+1}}$$

Véase la figura 5.2.10.

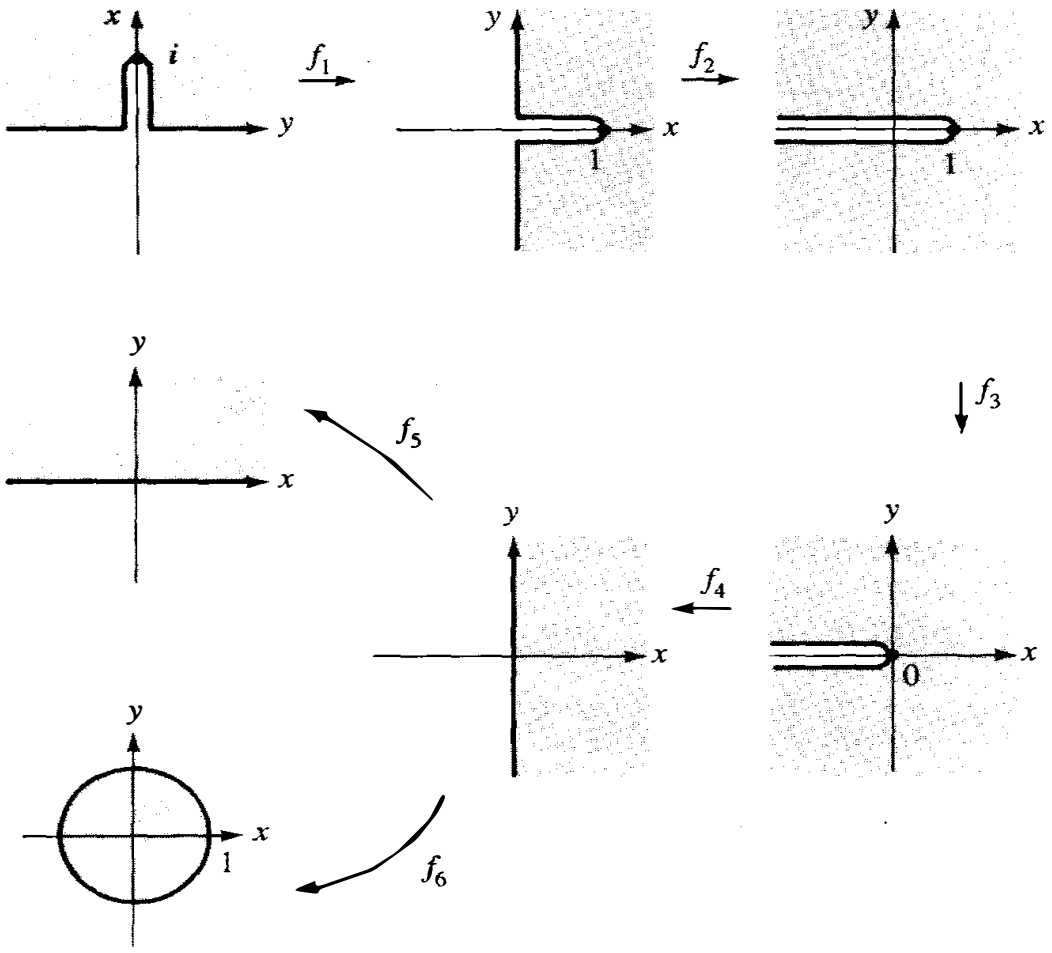


Figura 5.2.10. Los mapeos conformes f_1 a f_6 usados en el ejemplo resuelto 5.2.16.

Segunda solución (para la parte *a*)). La región A puede ser considerada como un polígono (extraño) con ángulos exteriores de 90° en 0, $-180°$ en i, 90° otra vez en 0, y 0° en ∞. Pruebe la fórmula de Schwarz-Christoffel usando los puntos $-\sqrt{2}$, 0 y $\sqrt{2}$ en el eje x. La fórmula de Schwarz-Christoffel debe dar un mapeo que manda a z en el semiplano superior, en w en A. Así, probamos

$$w = f(z) = a\int (\zeta + \sqrt{2})^{-1/2}\zeta(\zeta - \sqrt{2})^{-1/2}\, d\zeta + b$$

$$= a\int \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 2}}\, d\zeta + b = a\sqrt{z^2-2} + b$$

Si $a = 1/\sqrt{2}$ y $b = 0$, éste manda al semiplano superior a A, con 0 yendo a i. Por lo tanto obtenemos $w = \sqrt{z^2 - 2}/\sqrt{2}$. Al resolver para z nos da $z = \sqrt{2}\sqrt{w^2 + 1}$ como un mapeo de A en el semiplano superior. La función f obtenida en la primera solución ha sido multiplicada por $\sqrt{2}$. Pero esto es correcto ya que transforma al semiplano superior en sí mismo. ▼

La figura 5.2.11 recopila algunas de las transformaciones comunes.

Ejercicios

1. Sea $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$. ¿Cuál es la imagen bajo f de

   a) la línea real?
   b) el círculo con centro en 0 y radio 2?
   c) el círculo con centro en 0 y radio 1?
   d) el eje imaginario?

2. Sea $f(z) = (z - i)/(z + i)$. ¿Cuál es la imagen bajo f de

   a) la línea real?
   b) el círculo con centro en 0 y radio 2?
   c) el círculo con centro en 0 y radio 1?
   d) el eje imaginario?

3. Encuentre las transformaciones fraccionales lineales f, que satisfagan que $f(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$ si

   a) $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = 2; w_1 = 0, w_2 = -1, w_3 = -3$
   b) $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = 2; w_1 = -3, w_2 = -1, w_3 = 0$

4. Encuentre las transformaciones fraccionales lineales f, que satisfagan que $f(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$, si

   a) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -1; w_1 = 0, w_2 = -i, w_3 = \infty$
   b) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -1; w_1 = -i, w_2 = 0, w_3 = \infty$

5. Encuentre una transformación fraccional lineal que mande al disco unitario en el semiplano superior, con $f(0) = 2 + 2i$.
6. Encuentre una transformación fraccional lineal que mande al disco unitario en el semiplano derecho, con $f(0) = 3$.
7. Encuentre un mapeo conforme del disco unitario sobre sí mismo que mande $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$.
8. Encuentre un mapeo conforme del disco unitario sobre sí mismo que mande $\frac{1}{4}$ a $-\frac{1}{3}$.
9. Encuentre un mapeo conforme uno a uno, de $A = \{z \text{ tal que } |z - 1| < \sqrt{2} \text{ y } |z + 1| < \sqrt{2}\}$ sobre el primer cuadrante abierto.
10. Transforme la región del ejercicio 9, en el semiplano superior.
11. Demuestre: Cualquier transformación fraccional lineal, con $c \neq 0$, puede escribirse como $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, donde $T_1(z) = z + d/c$, $T_2(z) = 1/z$, $T_3(z) = [(bc - ad)/c^2]z$, y $T_4(z) = z + a/c$. Interprete geométricamente a T.

12. Demuestre que si tanto T como R son transformaciones fraccionales lineales, entonces también lo es $T \circ R$.

13. Encuentre un mapeo conforme del disco unitario sobre sí mismo que mande $\frac{1}{2}$ al 0.

14. Muestre que $K(z) = z/(1-z)^2$ manda en forma uno a uno y sobre, al disco unitario abierto en $\mathbf{C}\backslash\{z \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ e } \operatorname{Im} z < -\frac{1}{4}\}$.

15. Encuentre todos los mapeos conformes que manden al disco de radio R y centro en 0, sobre el disco unitario.

16. Establezca las partes (iii), (iv) y (v) de la figura 5.2.11.

17. Demuestre: La transformación conforme más general que manda al semiplano superior sobre el disco unitario es

$$T(z) = e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$$

donde $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

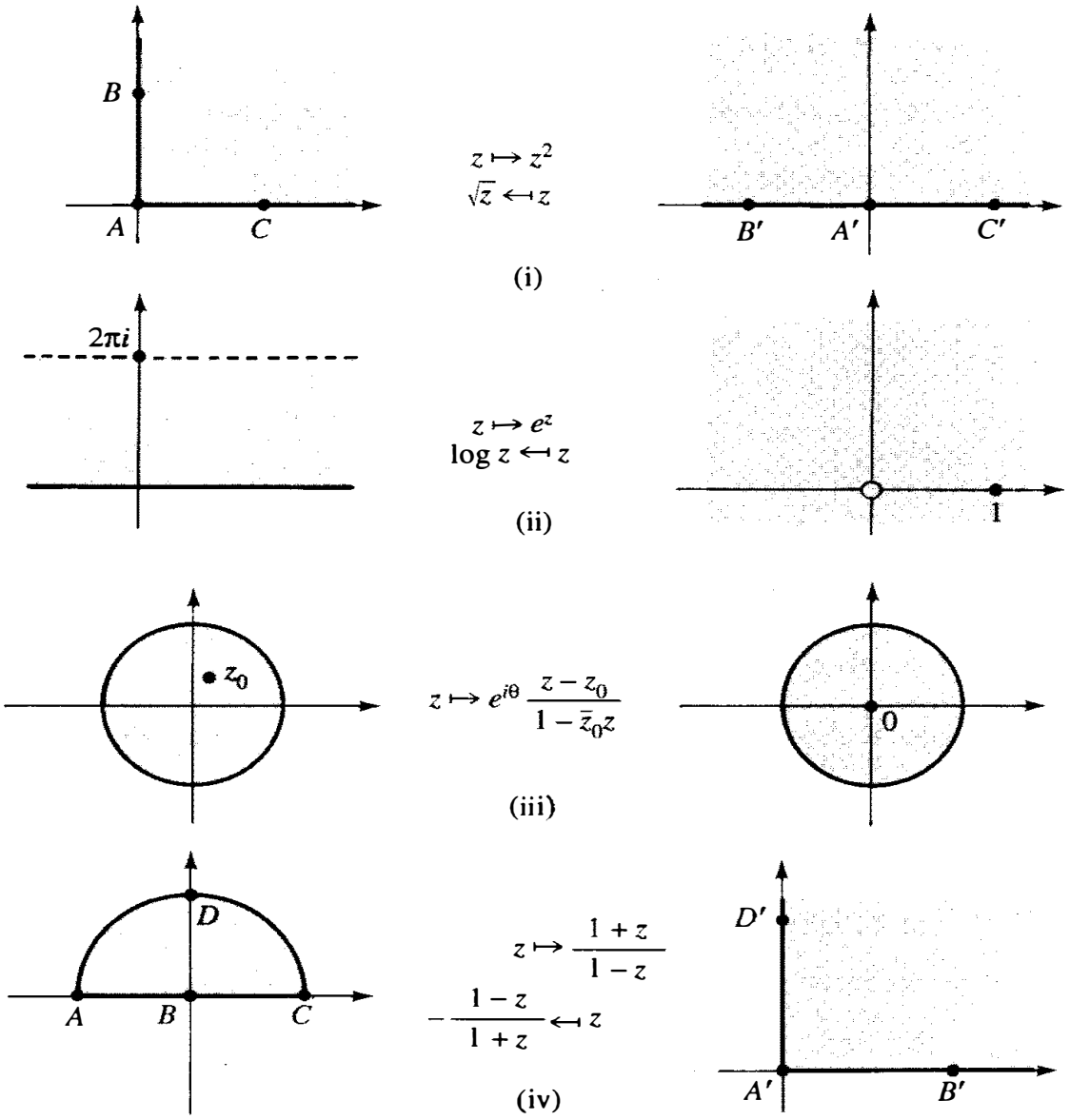
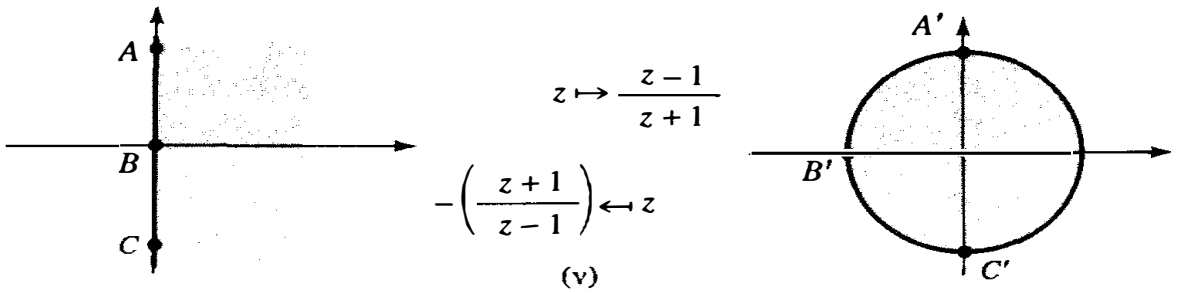


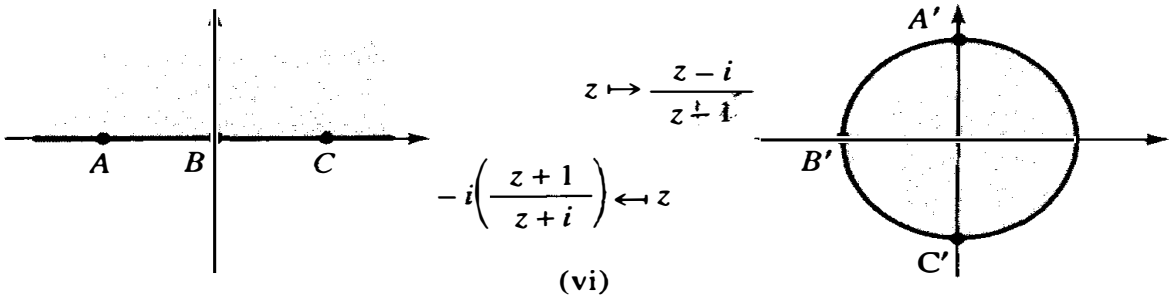
Figura 5.2.11. Algunas transformaciones comunes.



$$z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$$

$$-\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \leftarrow\!\shortmid z$$

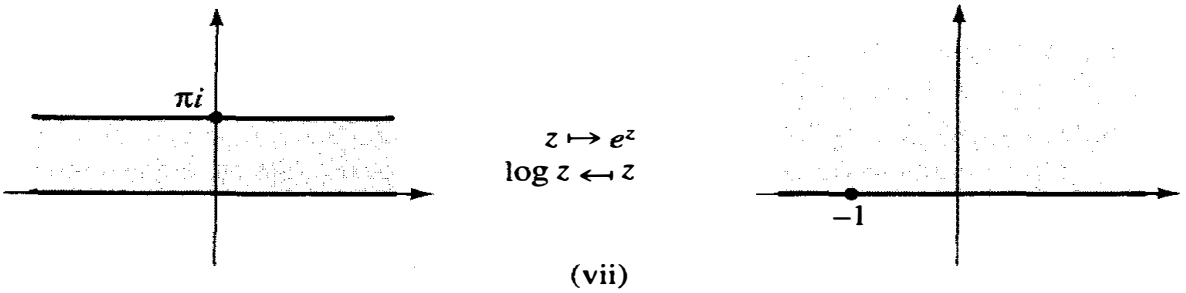
(v)



$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

$$-i\left(\frac{z+1}{z+i}\right) \leftarrow\!\shortmid z$$

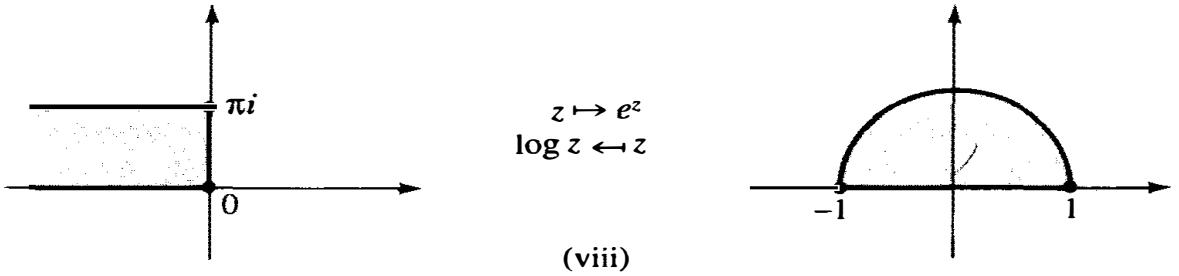
(vi)



$$z \mapsto e^z$$

$$\log z \leftarrow\!\shortmid z$$

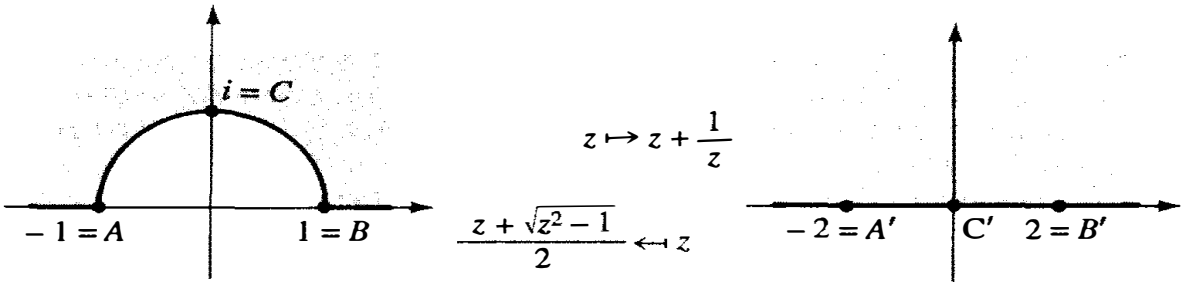
(vii)



$$z \mapsto e^z$$

$$\log z \leftarrow\!\shortmid z$$

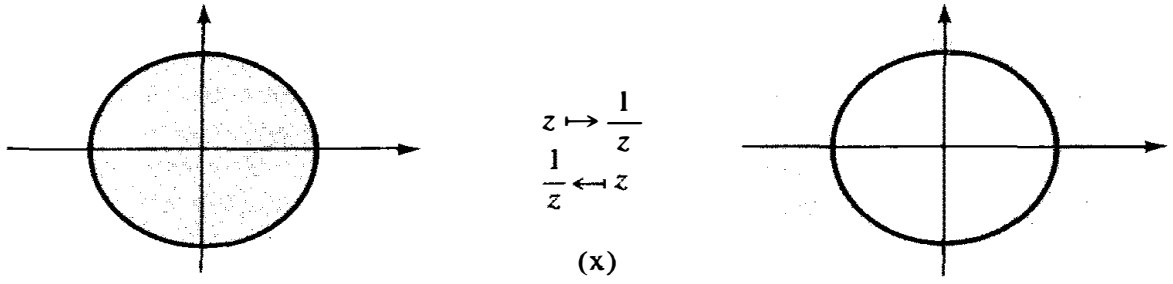
(viii)



$$z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

$$\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2} \leftarrow\!\shortmid z$$

(ix)



$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{z} \leftarrow\!\shortmid z$$

(x)

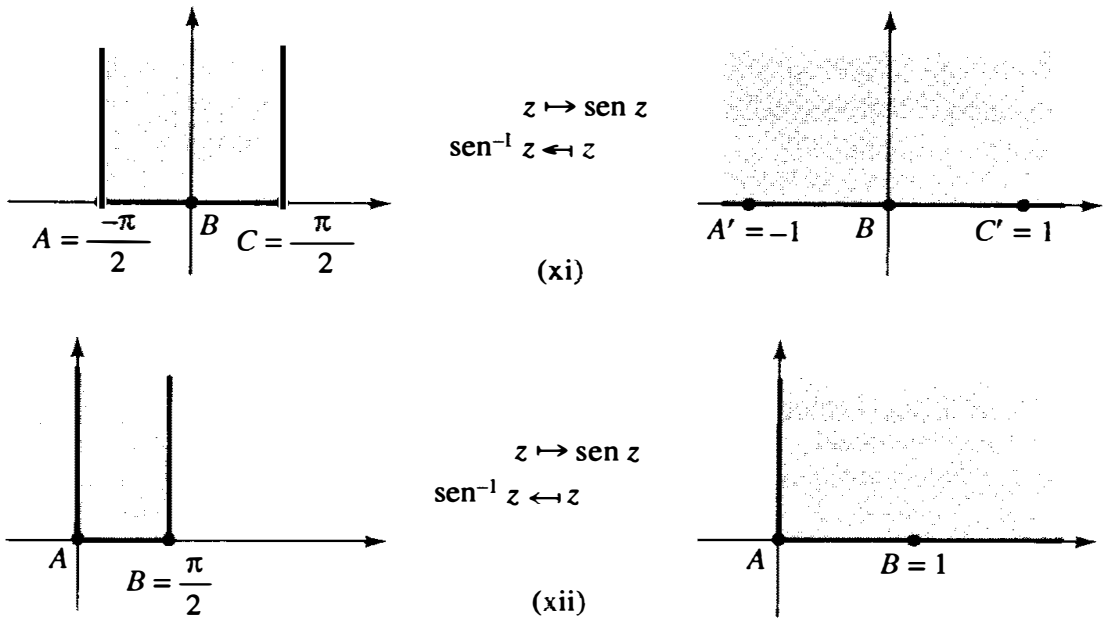


Figura 5.2.11. (*Continuación.*)

18. Suponga que a, b, c y d son números reales y que $ad > bc$; muestre que $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ deja invariante el semiplano superior. Muestre que cualquier mapeo conforme del semiplano superior sobre sí mismo, es de esta forma.

19. Encuentre un mapeo conforme que mande a $\{z \mid 0 < \arg z < \pi/8\}$ sobre el disco unitario.

20. La *razón cruzada* de cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3, z_4, está definida como

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Muestre que cualquier transformación fraccional lineal tiene la propiedad de que $[T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. (*Sugerencia:* utilice el ejercicio 11.)

21. Sean γ_1 y γ_2 dos círculos que se intersecan ortogonalmente. Sea T una transformación fraccional lineal. ¿Qué podemos decir acerca de $T(\gamma_1)$ y $T(\gamma_2)$?

22. (Véase el ejercicio 20.) Muestre que $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ es real si z_1, z_2, z_3, z_4 están en una línea o en un círculo. Use el ejercicio 20 para dar otra demostración de la proposición 5.2.3.

23. Complete los cálculos en la demostración de la proposición 5.2.9.

24. Muestre que una transformación fraccional lineal T que no es el mapeo identidad, tiene a lo más dos puntos fijos (esto es, puntos z para los cuales $T(z) = z$). Dé un ejemplo para mostrar que T no necesariamente tiene puntos fijos. Encuentre los puntos fijos de $T(z) = z/(z + 1)$.

25. Transforme conformemente a $A = \{z \mid \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ sobre el primer cuadrante.

26. Transforme conformemente a $A = \{z$ tal que $|z - 1| < 1\}$ sobre $B = \{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$.

27. Transforme conformemente a $\mathbf{C}\backslash\{$eje real no positivo$\}$ sobre la región $A = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

28. Demuestre que los mapeos conformes que mandan $|z| < 1$ al interior de un polígono con vértices $w_1, \ldots, w_n$, y a los puntos $z_1, \ldots, z_n$ en el círculo unitario $|z| = 1$, a los puntos $w_1, \ldots, w_n$, están dados por

$$f(z) = a\left[\int_0^z (\zeta - z_1)^{-\alpha_1} \cdots (\zeta - z_n)^{-\alpha_n} d\zeta\right] + b$$

donde las α_i son como en la fórmula de Schwarz-Christoffel (5.2.11).

29. Muestre que

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - c)}}$$

donde $c > 0$, transforma al semiplano superior en un rectángulo. Esta integral es llamada una *integral elíptica* y generalmente no se puede calcular explícitamente.)

30. Verifique la parte (ix) de la figura 5.2.11.

31. ¿Es posible transformar conformemente al semiplano superior en un triángulo, usando transformaciones fraccionales lineales? Invente una fórmula que esté basada en la fórmula de Schwarz-Christoffel.

32. Verifique, a partir de la fórmula de Schwarz-Christoffel, que $z \mapsto \text{sen}^{-1} z$ es un mapeo conforme del semiplano superior en $\{z \mid \text{Im } z > 0 \text{ y } -\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2\}$.

33. Muestre que $f(z) = 4/z$ transforma en forma uno a uno y sobre, a la región $A = \{z \text{ tal que } |z - 1| > 1 \text{ y } |z - 2| < 2\}$ en la banda $B = \{z \mid 1 < \text{Re } z < 2\}$.

34. Suponga que C_1 y C_2 son dos círculos tangentes, con C_2 en el interior de C_1. Muestre que se pueden colocar un número infinito de círculos en la región comprendida entre C_1 y C_2, cada uno de ellos tangente a C_1 y C_2 y cada uno tangente al siguiente, como se muestra en la figura 5.2.12. Muestre que los puntos de tangencia de cada círculo con el siguiente, están en un círculo. (*Sugerencia:* considere el ejercicio 33.)

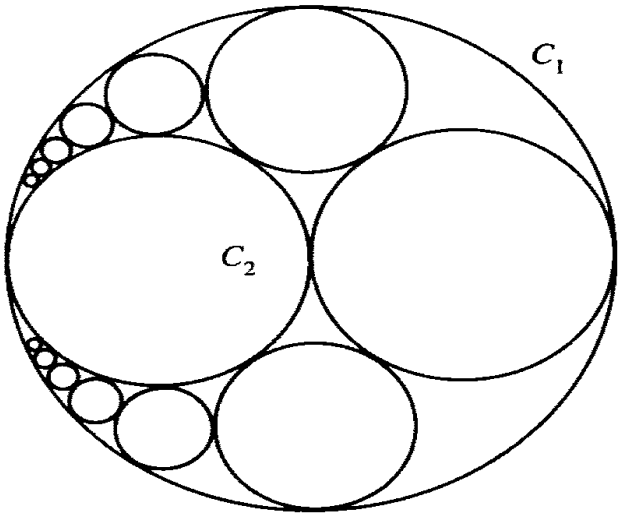


Figura 5.2.12. Se puede utilizar una transformación fraccional lineal para llenar el disco con círculos.

35. Considere una transformación fraccional lineal de la forma

$$f(z) = a\left(\frac{z - b}{z - d}\right)$$

Muestre que

a) Los círculos que pasan por los puntos b y d, son transformados en líneas que pasan por el origen.

b) Los *círculos de Apolonio*, con ecuación $|(z - b)/(z - d)| = r/|a|$, son transformados en círculos con centro en 0, radio r.

c) Los círculos en *a*) y *b*), cuando están localizados en el plano z, son llamados *círculos de Steiner*. Bosquéjelos y verifique que tanto estos círculos como sus imágenes se intersecan en ángulos rectos.

5.3. APLICACIÓN DE LOS MAPEOS CONFORMES A LA ECUACIÓN DE LAPLACE, LA CONDUCCIÓN DEL CALOR, ELECTROSTÁTICA E HIDRODINÁMICA

Estamos ahora en posición de aplicar la teoría de los mapeos conformes, desarrollada en las secciones 5.1 y 5.2, a algunos problemas físicos. Al hacer esto, resolveremos el problema de Dirichlet[1] y algunos problemas relacionados, para ciertos tipos de regiones bidimensionales. Aplicaremos entonces estos resultados a las tres clases de problemas físicos que se mencionan en el título de esta sección. Sólo se necesita un escaso conocimiento de la física elemental, para entender estos ejemplos. Se previene al estudiante que la variedad de problemas que se pueden resolver explícitamente de esta manera, es un tanto limitada y que los métodos discutidos se aplican únicamente a problemas bidimensionales.

Los problemas de Dirichlet y de Neumann

Recordemos que se dice que $u(x, y)$ satisface la *ecuación de Laplace* (o es *armónica*) en una región A, cuando

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Además de esta condición, generalmente se especifica cierto comportamiento en la frontera, determinado por el problema físico a resolver. Este comportamiento en la frontera (o condiciones de frontera) usualmente determinan a u en forma única. Por ejemplo, el teorema de unicidad para el problema de Dirichlet (2.5.12) indica que una función armónica $u(x, y)$, cuyos valores en la frontera de A son especificados, está determinada en forma única. También tendremos ocasión de considerar condiciones de frontera en las que $\partial u/\partial n = \text{grad } u \cdot \boldsymbol{n}$ se especifica en la frontera. ($\partial u/\partial n$ es igual a la derivada en la dirección normal a la fr (A)). (Para que $\partial u/\partial n$ esté bien definida, la frontera de A debe ser, al menos, suave por tramos, de modo que tenga una dirección normal bien definida.) La dirección normal *exterior* de $\boldsymbol{n}$ puede definirse precisamente, pero ya que el énfasis general de esta sección está en los métodos de cálculo, no se dará aquí un tratamiento matemático preciso. Así, aceptaremos como conocido lo que se entiende por normal unitaria exterior $\boldsymbol{n}$ (véase la figura 5.3.1).

El problema de encontrar una función armónica u, con $\partial u/\partial n$ especificada en la frontera, es llamado el *problema de Neumann*. No podemos especificar $\phi = \partial u/\partial n$ arbitrariamente porque si tal u existe, entonces afirmamos que

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

[1] El problema de encontrar una función armónica en una región A cuyos valores estén especificados en la frontera de A, es llamado el *problema de Dirichlet*. Este problema fue discutido en la sección 2.5.

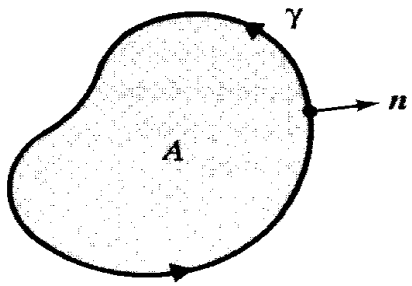


Figura 5.3.1. Problema de Neumann.

donde γ es la frontera de A. Para demostrar esto, aplicamos el teorema de Green (véase la sección 2.2), que puede escribirse en su forma divergente (frecuentemente llamado el teorema de Gauss)

$$\int_\gamma \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \int_A \operatorname{div} \boldsymbol{X}\, dx\, dy$$

donde $\boldsymbol{X}$ es una función vectorial dada, con componentes (X^1, X^2) y donde la divergencia de $\boldsymbol{X}$ se define como

$$\operatorname{div} \boldsymbol{X} = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} \tag{1}$$

Al aplicar la ecuación (1) a $\boldsymbol{X} = \operatorname{grad} u$, nos da

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \int_\gamma (\operatorname{grad} u) \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \int_A \operatorname{div} \operatorname{grad} u\, dx\, dy = \int_A \nabla^2 u\, dx\, dy = 0$$

puesto que div grad $u = \nabla^2 = 0$. Esto demuestra nuestra afirmación.

Si en γ damos una condición en la frontera ϕ, con $\int_\gamma \phi = 0$, entonces se puede demostrar que el problema de Neumann tiene, en efecto, una solución. Sin embargo, podemos demostrar el siguiente hecho: *La solución al problema de Neumann en una región acotada y simplemente conexa es única excepto por la suma de una constante.* Sean u_1 y u_2 dos soluciones, con $\partial u_1/\partial n = \partial u_2/\partial n$ en $\gamma = \text{fr}\,(A)$. Sean v_1 y v_2 las conjugadas armónicas de u_1 y u_2 y hágase $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$. Ahora bien, $\partial u/\partial n = 0$ y así, por la proposición 1.5.12, v es constante a lo largo de γ. En consecuencia, de la unicidad de la solución del problema de Dirichlet, v es constante en A. Por lo tanto, puesto que $-u$ es el conjugado armónico de v, u también es constante en A. Esto muestra nuestra afirmación.

Si los valores sobre a frontera, especificados en los problemas de Dirichlet y Neumann, no son continuos, los resultados de unicidad son aún válidos, en cierto sentido, pero son mucho más difíciles de obtener. Sin embargo, se previene al estudiante de que en una región no acotada, no tenemos unicidad. Por ejemplo, sea A el semiplano superior. Entonces, $u_1(x, y) = x$ y $u_2(x, y) = x + y$ tienen los mismos valores en la frontera (en $y = 0$) y son armónicas, pero no son iguales. Para recuperar la unicidad en regiones no acotadas, se debe también especificar una "condición al

∞": "u acotada en todo A" es una de tales condiciones. En los ejemplos que se integran en esta sección se ilustrarán algunas de estas condiciones.

Los problemas de Dirichlet y de Neumann también pueden combinarse; por ejemplo, u puede especificarse en una parte de la frontera y $\partial u/\partial n$ puede especificarse en otra.

Método de solución

El método básico para resolver los problemas de Dirichlet y de Neumann en una región A, es el siguiente: Tome la región A dada y transfórmela, mediante un mapeo conforme, en una región "más simple" B, en la cual el problema pueda ser resuelto. Este procedimiento se justifica por el hecho de que bajo un mapeo conforme f, funciones armónicas se transforman nuevamente en funciones armónicas (véase la proposición 5.1.3). Cuando hemos resuelto el problema en B, podemos transformar la respuesta de regreso a A.

Para el problema de Dirichlet damos los valores de frontera en fr (A). Obviamente estos valores son transformados en los valores correspondientes en B. (Asumimos que el mapeo conforme f está definido en la frontera.) La especificación de $\partial u/\partial n$ es un poco más complicada. Sin embargo, el caso especial $\partial u/\partial n = 0$ es fácil de entender. Sea $u \circ f = u_0$ la solución que buscamos; esto es $u_0(x, y) = u(f(x, y))$ (véase la figura 5.3.2). Entonces afirmamos que $\partial u_0/\partial n = 0$ si $\partial u/\partial n = 0$ sobre las *porciones correspondientes.* Esto se sigue porque $\partial u_0/\partial n = 0$ y $\partial u/\partial n = 0$ significa que las conjugadas son constantes en esas porciones y si v es el conjugado de u, entonces $v \circ f = v_0$ es el conjugado de u_0. Esto demuestra nuestra afirmación. Éstos son los únicos tipos de condiciones de frontera para $\partial u/\partial n$ que desarrollaremos dentro de este texto.

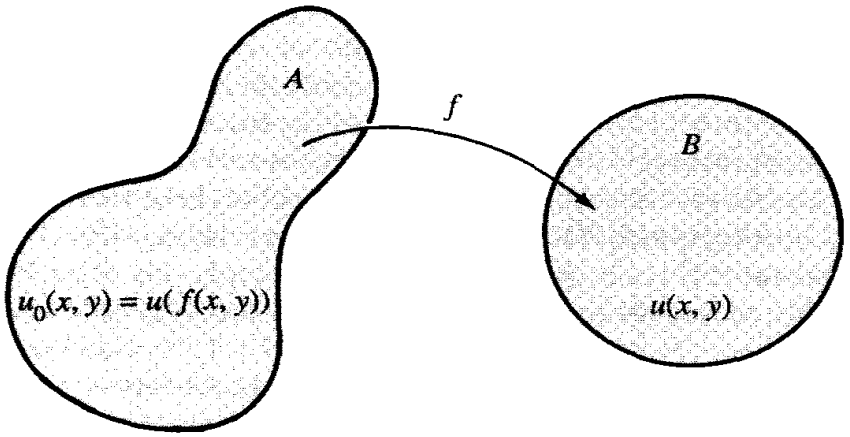


Figura 5.3.2. Transformación de funciones armónicas.

Para usar este método, necesitamos ser capaces de resolver el problema en alguna región sencilla B. Ya vimos en la sección 2.5 que el disco unitario es adecuado para este propósito porque en ese caso tenemos la fórmula de Poisson para la solución del problema de Dirichlet. Sin embargo, algunas veces podemos obtener soluciones más explícitas que aquellas que se consiguen mediante esa fórmula.

La siguiente situación se usa para ilustrar el método y será usado en los ejemplos subsecuentes. Consideremos el semiplano superior H y el problema de encontrar una función armónica que mande al valor constante en la frontera c_0, en $]-\infty, x_1[$, a c_1 en $]x_1, x_2[$,..., y a c_n en $]x_n, \infty[$, donde $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ son puntos en el eje real. Afirmamos que la solución está dada por

$$u(x, y) = c_n + \frac{1}{\pi}\left[(c_{n-1} - c_n)\,\theta_n + \cdots + (c_0 - c_1)\theta_1\right] \tag{2}$$

donde $\theta_1, \ldots, \theta_n$ son como se indica en la figura 5.3.3.; $0 \le \theta_i \le \pi$.

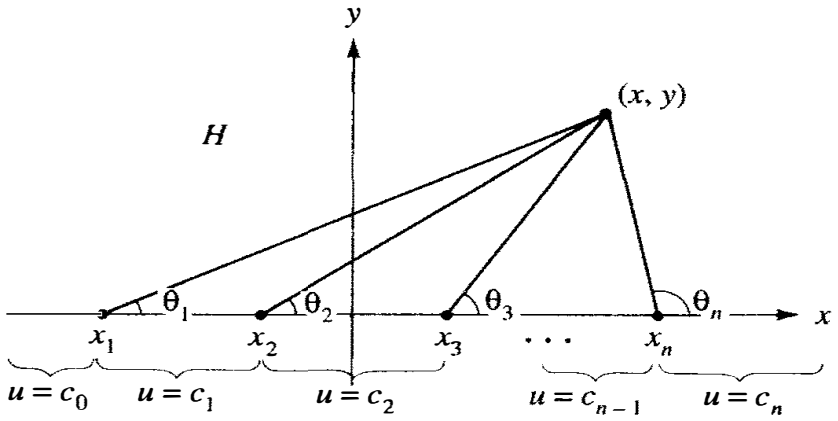


Figura 5.3.3. La ecuación (2) da la solución de este problema de Dirichlet en el semiplano superior.

Esto es fácil de ver. Primero, ya que u es la parte real de

$$c_n + \frac{1}{\pi i}\left[(c_{n-1} - c_n)\log(z - x_n) + \cdots + (c_0 - c_1)\log(z - x_1)\right]$$

ésta es armónica. También, en $]x_i, x_{i+1}[$ u se reduce a c_i. (El estudiante debe comprobar esto.) Como lo mencionamos anteriormente, el problema de Dirichlet no tiene una solución única, así que surge la pregunta: ¿Por qué se escogió esta solución? Se pudo haber obtenido otra solución al sumar $u(x, y) = y$ a la solución dada por la ecuación (2). La respuesta es que la u que está dada por la ecuación (2), es acotada (¿por qué?). El estudiante encontrará esta respuesta físicamente razonable después de estudiar los ejemplos que siguen.

Así, si un problema puede ser transformado en uno como en el descrito por la figura 5.3.3, podemos usar la ecuación (2) para encontrar una solución. Esto se hará en los ejemplos de esta sección.

Conducción del calor

Las leyes físicas nos dicen que si una región bidimensional se mantiene a una temperatura fija T (esto es, una temperatura que no cambia con el tiempo,

producido esto al fijar la temperatura en las paredes, o al aislarlas), entonces T debe ser armónica. [2]

El negativo del gradiente de T, representa la dirección en la que el calor fluye. Así, podemos, usando la proposición 1.5.12, *interpretar a las superficies de nivel de la armónica conjugada de* T, ϕ, *como las líneas a lo largo de las cuales fluye el calor y la temperatura decrece.* Líneas donde T es constante, son llamas *isotérmicas;* líneas en las cuales la conjugada ϕ es constante, son llamadas *líneas de flujo* (figura 5.3.4).

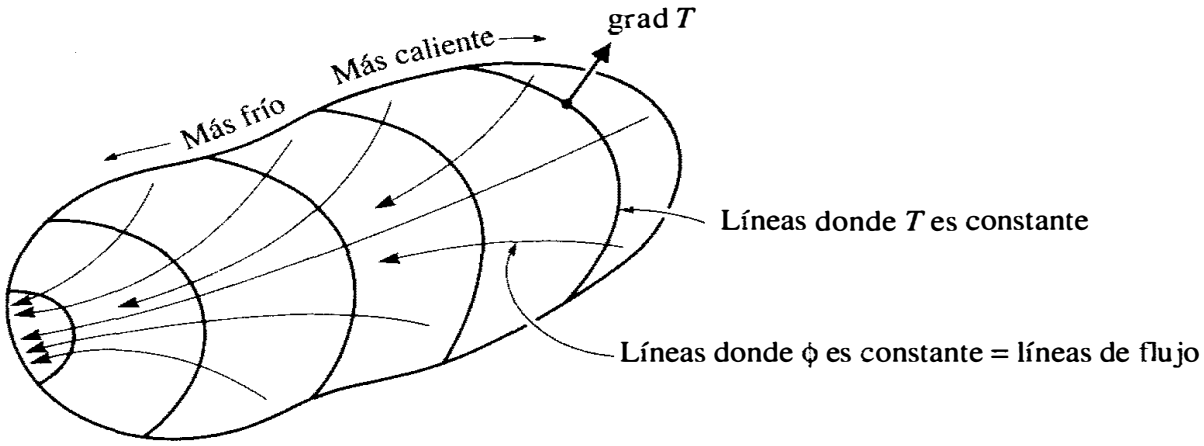


Figura 5.3.4. Conducción de calor.

Así, decir que T es prescrita en una porción de la frontera, significa que la porción es mantenida a una temperatura preasignada (por ejemplo, mediante un dispositivo de calefacción). La condición $\partial T/\partial n = 0$ significa que la línea de flujo (o $-\text{grad } T$) es paralela a la frontera; en otras palabras, la frontera está *aislada.* (No fluye calor a través de la frontera.)

Ejemplo 5.3.1. *Sea* A *el primer cuadrante: el eje* x *se mantiene a* T = 0 *mientras que el eje* y *se mantiene a* T = 100. *Encuentre la distribución de la temperatura en* A. *(Físicamente, la región puede ser aproximada mediante una delgada hoja de metal.)*

Solución. Transformamos al primer cuadrante en el semiplano superior mediante $z \mapsto z^2$ (figura 5.3.5).

[2] Esto es una consecuencia de la conservación de la energía y del teorema de Gauss (véase la ecuación (1)). El calor fluye en la dirección del campo vectorial $= \kappa\nabla T$ (κ = conductividad) y la densidad de la energía es $c\rho T$ (c = calor específico, ρ = densidad). Entonces, la ley de la conservación de la energía establece que la razón de cambio de la energía en cualquier región V es igual a la razón a la cual entra a V; esto es

$$\frac{d}{dt}\int_V c\rho T\, dx = -\int_{fr(v)} -\kappa\nabla T \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

Por el teorema de Gauss, esta condición es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho T) = \kappa\nabla^2 T$$

Si c, ρ y T son independientes de t, concluimos que T es armónica.

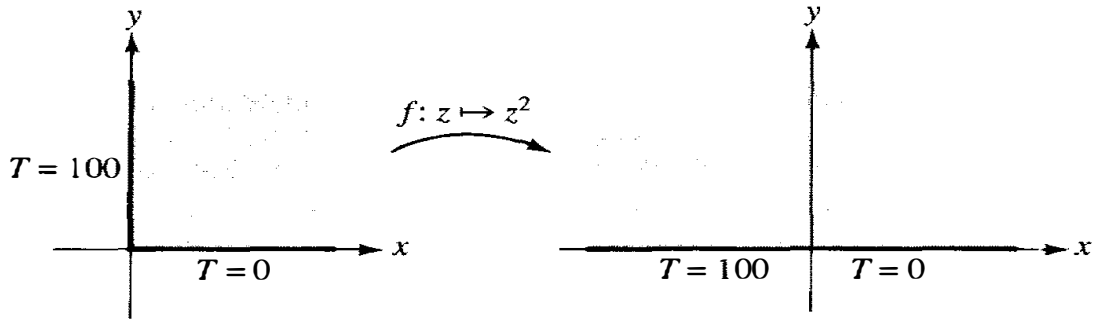


Figura 5.3.5. Transformación de la región A en el semiplano superior.

Es físicamente razonable que la temperatura sea una función acotada; de otra manera obtendríamos temperaturas arbitrariamente altas (o bajas). Por lo tanto, la solución en el semiplano superior está dada por la ecuación (2):

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}(100 \arg z) = \frac{100}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Así que la solución que buscamos es

$$u_0(x, y) = u(f(x, y))$$

donde $f(x, y) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy)$. Por lo tanto,

$$u_0(x, y) = \frac{100}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right)$$

es la respuesta deseada. Se sobreentiende que $\tan^{-1}$ es tomada en el intervalo $[0, \pi]$. Otra forma de la respuesta puede ser obtenida como sigue:

$$u_0(x, y) = u(z^2) = \frac{100}{\pi} \arg(z^2) = \frac{200}{\pi} \arg z = \frac{200}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Las líneas isotérmicas y de flujo, están indicadas en la figura 5.3.6. ▼

Ejemplo 5.3.2. *Sea* A *la mitad superior del disco unitario* $|z| \leq 1$. *Encuentre la temperatura interior si la porción circular es aislada;* $T = 0$ *para* $x > 0$ *y* $T = 10$ *para* $x < 0$ *en el eje real.*

Solución. Para este tipo de problema, donde hay una porción de la frontera donde $\partial T/\partial n = 0$ (aislada), es conveniente transformar la región en una semibanda. Esto puede ser hecho para A por medio de $\log z$ (usando la rama principal). Véase la figura 5.3.7 (y 5.2.11(viii)). Para la banda B obtenemos, por inspección, la solución

$$T_0(x, y) = \frac{10y}{\pi}$$

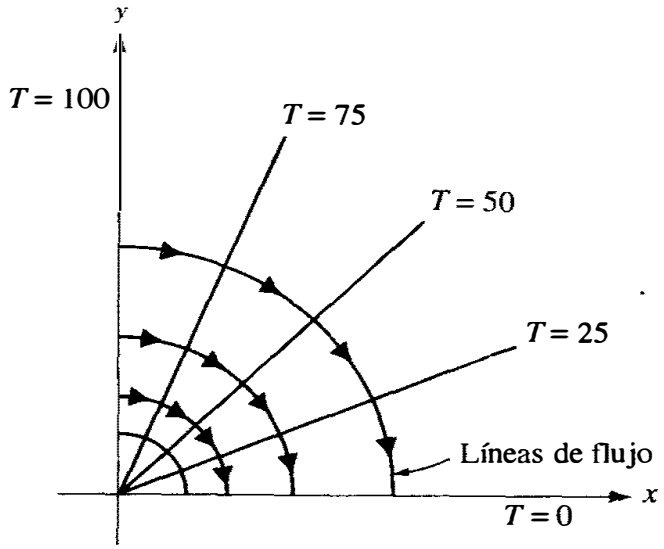


Figura 5.3.6. Líneas isotérmicas y de flujo para el ejemplo resuelto 5.3.1.

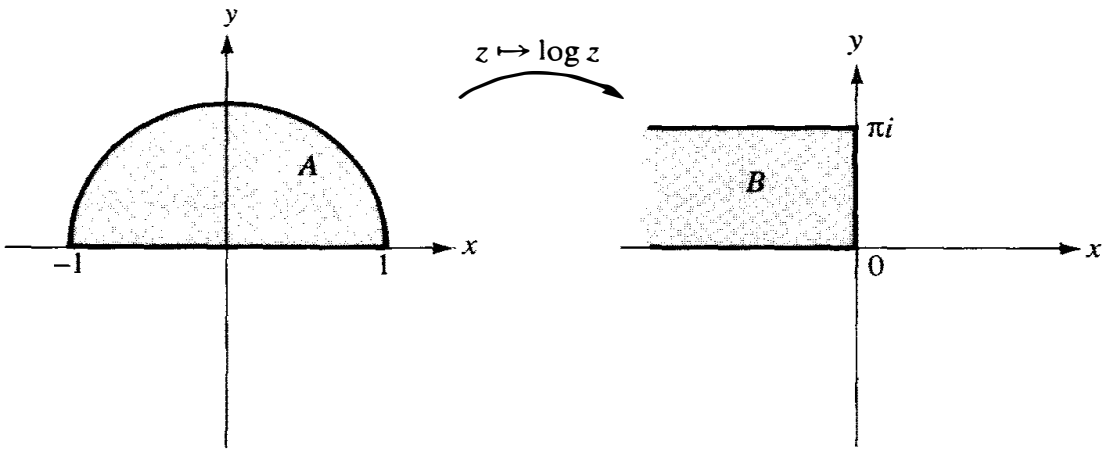


Figura 5.3.7. Transformación de la región semicircular A en la semibanda B en el ejemplo 5.3.2.

(Note que a lo largo del eje y, $\partial T_0/\partial n = \partial T_0/\partial x = 0$.)
Así, nuestra respuesta es

$$T(x, y) = T_0(\log (x + iy)) = \frac{10}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \blacktriangledown$$

Potencial eléctrico

De la física aprendimos que si un potencial eléctrico ϕ está determinado por cargas eléctricas estáticas, ϕ debe satisfacer la ecuación de Laplace (esto es, ser armónica). La función conjugada Φ de ϕ se interpreta como sigue: Líneas a lo largo de las cuales Φ es constante, son líneas a lo largo de las cuales viajaría una pequeña carga prueba. Éstas son llamadas *líneas de flujo*. Los vectores tangentes a

tales líneas son $-\text{grad}\ \phi = \boldsymbol{E}$, llamado el *campo eléctrico* (véase la figura 5.3.8). Así, las *líneas de flujo y las líneas equipotenciales (líneas donde ϕ es constante) se intersecan ortogonalmente.*

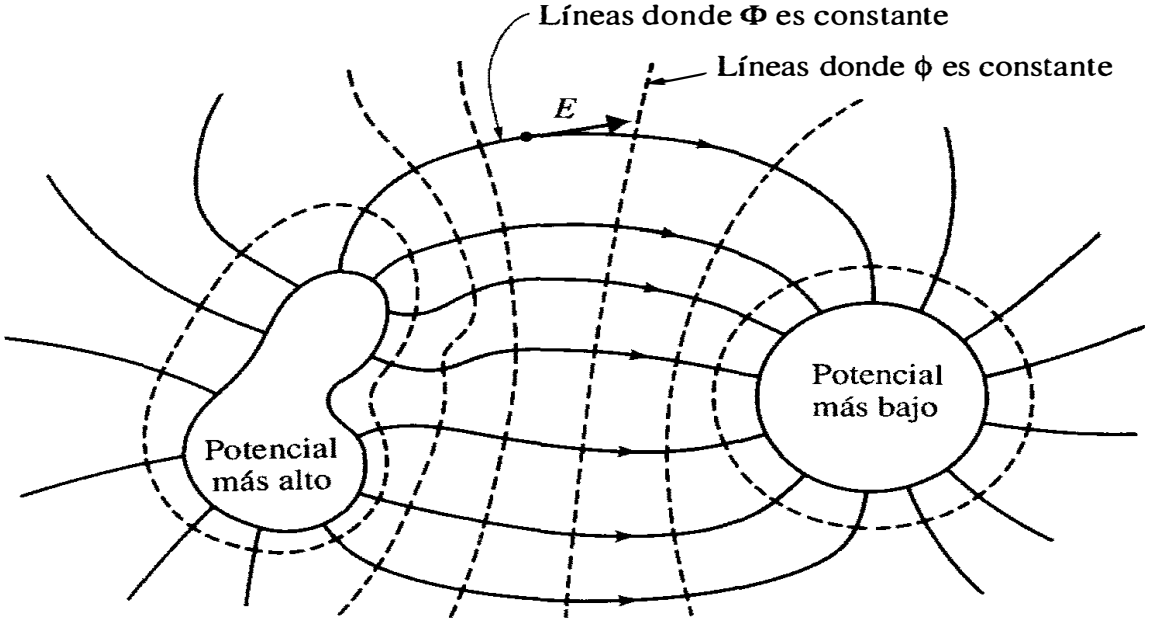


Figura 5.3.8. Potencial eléctrico.

El problema de Dirichlet surge en electrostática cuando la frontera se mantiene en un potencial dado (por ejemplo, por medio de una batería o haciendo tierra).

Ejemplo 5.3.3. *Considere el círculo unitario. El potencial eléctrico es mantenido en $\phi = 0$ en el semicírculo inferior y en $\phi = 1$ en el semicírculo superior. Encuentre la ϕ interior.*

Solución. Usamos el procedimiento general para resolver el problema de Dirichlet transformando nuestra región dada en el semiplano superior. En el presente caso, podemos usar una transformación fraccional lineal (véanse las figuras 5.2.11(vi) y 5.3.9).

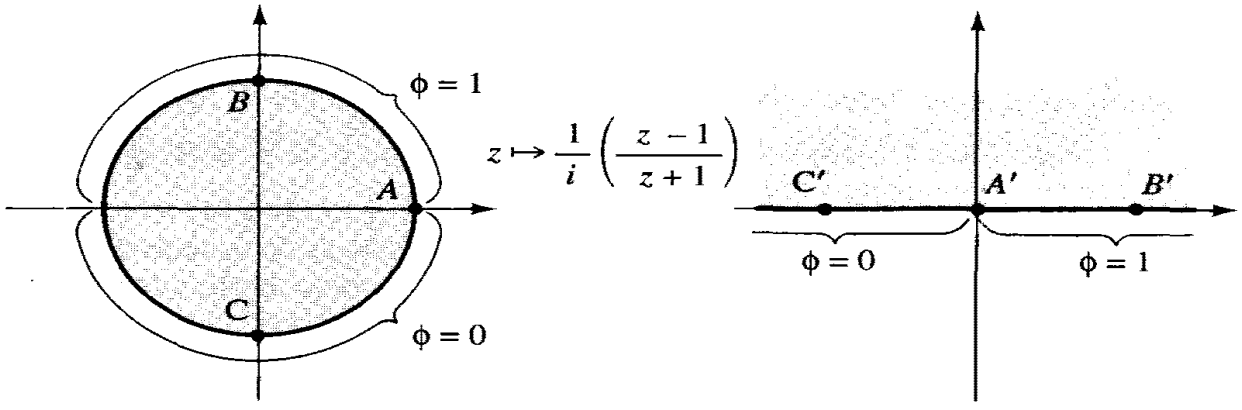


Figura 5.3.9. Mapeo conforme utilizado para resolver el problema de Dirichlet en el disco.

Como con la temperatura, es físicamente razonable que el potencial esté acotado. Así, por la ecuación (2), la solución en el semiplano superior es

$$\phi_0(x, y) = 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

y por lo tanto, la solución en el círculo unitario es

$$\phi(x, y) = \phi_0(f(x, y))$$

donde $f(z) = (z - 1)/i(z + 1)$. Si hacemos $(z - 1)/i(z + 1) = u + iv$, entonces

$$u = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1} \quad \text{y} \quad v = -\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

Por ende, la solución es

$$\phi(x, y) = 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{1 - x^2 - y^2}{2y}$$

Las líneas equipotenciales y de flujo se muestran en la figura 5.3.10.

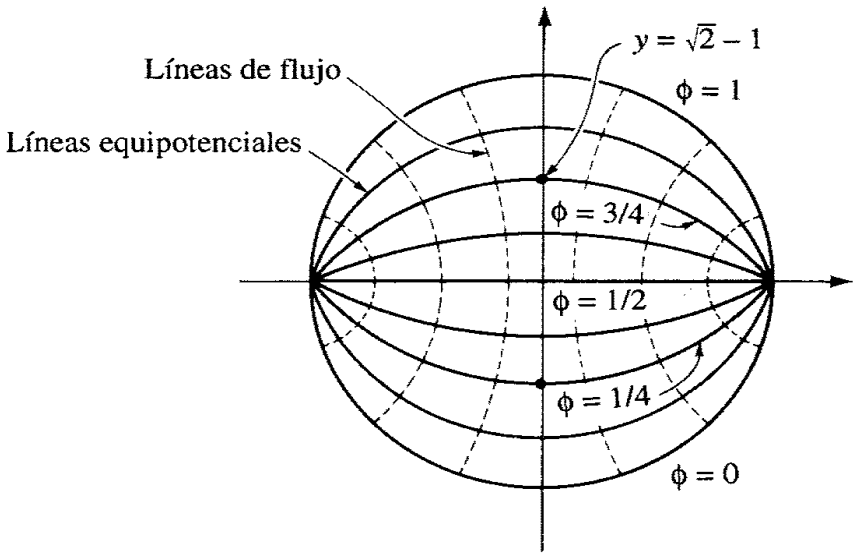


Figura 5.3.10. Líneas equipotenciales y de flujo para el potencial.

Este ejemplo también pudo haber sido resuelto usando la fórmula de Poisson. Las dos respuestas deben ser iguales, aun cuando esto podría no ser obvio a partir de sus formas. ▼

Ejemplo 5.3.4. *La función armónica* $\phi(z) = (Q/2\pi) \log |z - z_0| + K$ *para una constante* K, *la cual es la parte real de* $(Q/2\pi) \log (z - z_0) + K$, *representa el potencial*

de una carga Q *localizada en* z_0. *(Esto es debido a que* ϕ *es un campo radial tal que si* $\mathbf{E} = -\text{grad}\ \phi$ *es el campo eléctrico de fuerzas, entonces la integral de* $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ *alrededor de una curva rodeando a* z_0 *es* Q, *por el teorema de Gauss).*[3] *La constante* K *puede ajustarse de modo que en cualquier lugar conveniente, como infinito, o algún objeto conectado con tierra, tenga potencial* 0. *(Esto es razonable ya que únicamente la fuerza* E *es realmente observada y no hay cambio al variar* K.) *Bosqueje las líneas equipotenciales para dos cargas de signos iguales* u *opuestos.*

Solución. El potencial de dos cargas se obtiene al sumar los respectivos potenciales. Por lo tanto, dos cargas $Q > 0$, localizadas en z_1 y z_2, tienen el potencial electrostático $(Q/2\pi) \log (|z - z_1|\,|z - z_2|)$; una carga $Q > 0$ en z_1 y $-Q$ en z_2, tienen potencial $(Q/2\pi) \log (|z - z_1|/|z - z_2|)$. Las líneas equipotenciales se bosquejan en la figura 5.3.11. Las curvas ϕ = constante en el dibujo de la izquierda son llamadas lemniscatas; en el dibujo de la derecha son llamadas círculos de Apolonio. Las líneas de fuerza son la familia de círculos ortogonales a ellos que pasan a través de dos puntos. Juntos forman los círculos de Steiner que se discutieron en el ejercicio 35 de la sección 5.2. ▼

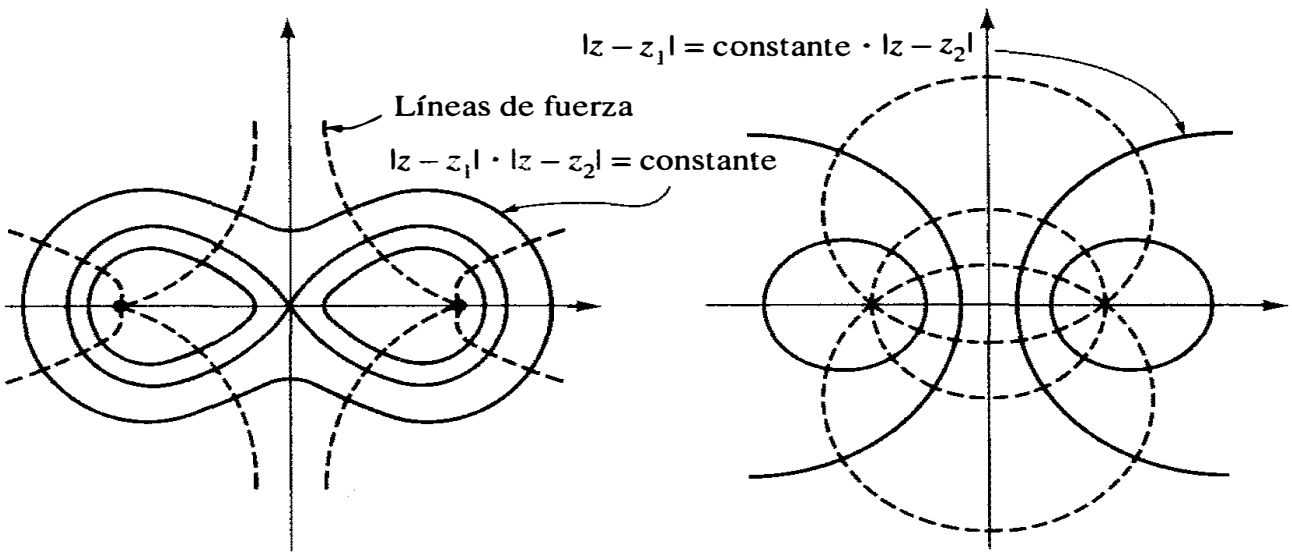


Figura 5.3.11. El campo de cargas iguales (*izquierda*) y el campo de cargas opuestas (*derecha*).

Ejemplo 5.3.5. *Suponga que una carga puntual de* + 1 *se localiza en* $z_0 = \frac{1}{2}$ *y el círculo unitario es un conductor conectado a tierra mantenido a un potencial* 0. *Encuentre el potencial de cada punto* $z \neq z_0$ *dentro del círculo unitario.*

Primera solución. La función $f(z) = (2z - 1)/(2 - z)$ transforma al disco unitario D en sí mismo mandando $z_0 = \frac{1}{2}$ a 0. La función $u(z) = (1/2\pi) \log |z|$ es una solución en el disco imagen (carga puntual de +1 en 0 y potencial 0 alrededor del círculo unitario). Así, $\phi(z) = u(f(z)) = (1/2\pi) \log |(2z - 1)/(2 - z)|$ resuelve el problema original. (Véase la figura 5.3.12.)

[3] Este es el potencial para una carga en el *plano*. En el espacio esto corresponde al potencial producido por una carga lineal.

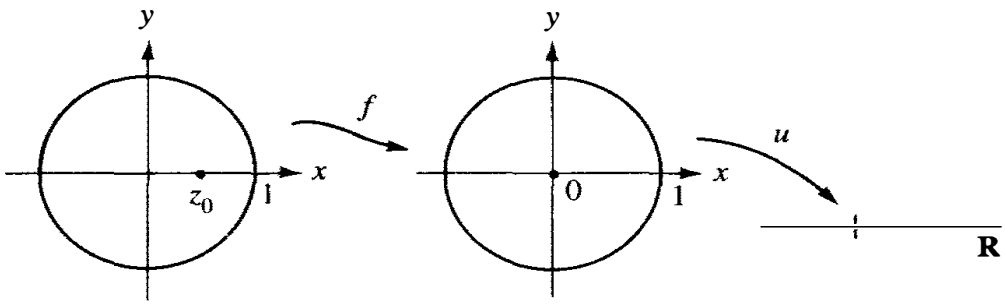


Figura 5.3.12. El mapeo conforme f, traslada la carga puntual de $z_0 = \frac{1}{2}$ a 0.

Segunda solución. Damos una segunda solución que ilustra el método de reflexión en un círculo de la sección 5.2 y una interesante idea de la electrostática llamada *carga imagen*. Necesitamos un campo ϕ dentro del disco unitario D que tenga al círculo unitario C como una curva equipotencial. Las líneas de fuerza eléctrica deben ser una familia de curvas que terminan en z_0, las cuales cruzan a C en ángulos rectos. Esto puede realizarse poniendo una "carga imagen" artificial de -1 en la reflexión $\tilde{z}_0$ de z_0 en C. Como en el último ejemplo, las líneas de fuerza eléctrica para tal par de cargas, son la familia de círculos que pasan por z_0 y $\tilde{z}_0$. Sabemos, de la última sección, que éstas cruzan a C en ángulos rectos, como se quería. Véase la figura 5.3.13. Con cargas de $+1$ en $z_0 = \frac{1}{2}$ y -1 en $\tilde{z}_0 = 2$, tenemos

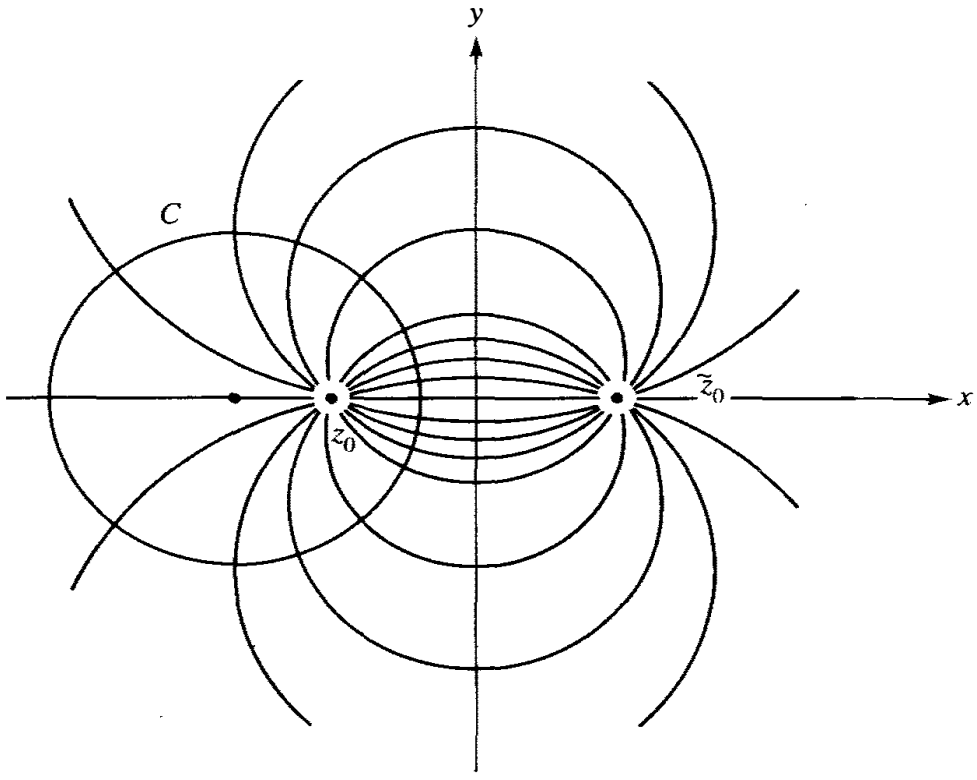


Figura 5.3.13. Reflexión y carga de imagen.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z - \tfrac{1}{2}| - \frac{1}{2\pi} \log |z - 2| + K$$

$$= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{z - \frac{1}{2}}{z - 2} \right| + K$$

$$= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{2z - 1}{2 - z} \right| - \frac{1}{2\pi} \log 2 + K$$

Al hacer la constante K igual a $(1/2\pi) \log 2$ el potencial se hace 0 alrededor de C y nos da la misma respuesta que en la primera solución. ▼

Hidrodinámica

Si tenemos un fluido viscoso e incompresible (estado estacionario), estamos interesados en encontrar su campo de velocidades, $\boldsymbol{V}(x, y)$. Del análisis vectorial elemental, sabemos que "incompresible" significa que la divergencia div $\boldsymbol{V} = 0$. (Decimos que $\boldsymbol{V}$ es de *libre divergencia*.) Vamos a suponer que $\boldsymbol{V}$ es también un *flujo potencial* y, por lo tanto, es de circulación libre; esto es, $\boldsymbol{V} = \text{grad } \phi$ para alguna ϕ llamada *potencial de velocidad*. Así, ϕ es armónica pues $\nabla^2\phi = \text{div grad } \phi = \text{div } \boldsymbol{V} = 0$. Entonces, cuando resolvemos para ϕ obtenemos $\boldsymbol{V}$ al tomar $\boldsymbol{V} = \text{grad } \phi$.

El conjugado ψ de la función armónica ϕ (ψ existirá en cualquier región simplemente conexa) es llamada la *función de corriente* y la función analítica $F = \phi + i\psi$ es llamada el *potencial complejo*. Líneas donde ψ es constante tienen a $\boldsymbol{V}$ como sus tangentes (¿por qué?) y, por lo tanto, las *líneas donde ψ es constante, pueden ser interpretadas como las líneas a lo largo de las cuales se mueven las partículas del fluido*; de allí el nombre de función de corriente (véase la figura 5.3.14).

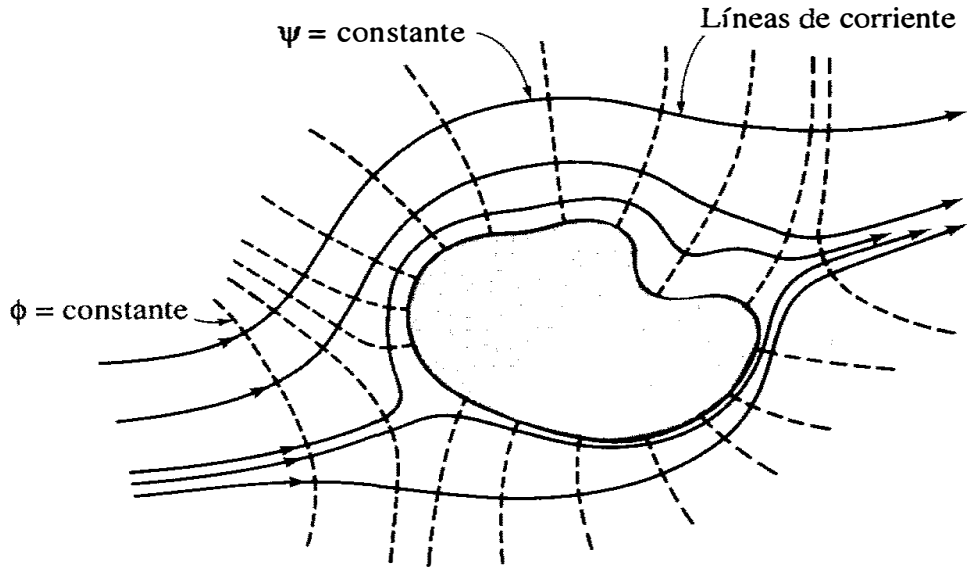


Figura 5.3.14. El flujo de un fluido.

La condición natural en la frontera es que $\boldsymbol{V}$ debe ser paralela a la frontera. (El fluido fluye paralelo a las paredes.) Esto significa que $\partial\phi/\partial n = 0$, así hemos llegado al problema de Neumann para ϕ.

Vamos a considerar otra vez al semiplano superior. Un movimiento físicamente aceptable se obtiene al hacer $\boldsymbol{V}(x, y) = \alpha = (\alpha, 0)$ o $\phi(x, y) = \alpha x = \text{Re}\,(\alpha z)$, donde α es real. El fluido correspondiente a $\boldsymbol{V}$ es paralelo al eje x, con velocidad α. Observe que ahora ϕ no está acotada; en consecuencia el comportamiento en ∞ para fluidos, para la temperatura y para el potencial eléctrico, es diferente debido a las diferentes circunstancias físicas (véase la figura 5.3.15).

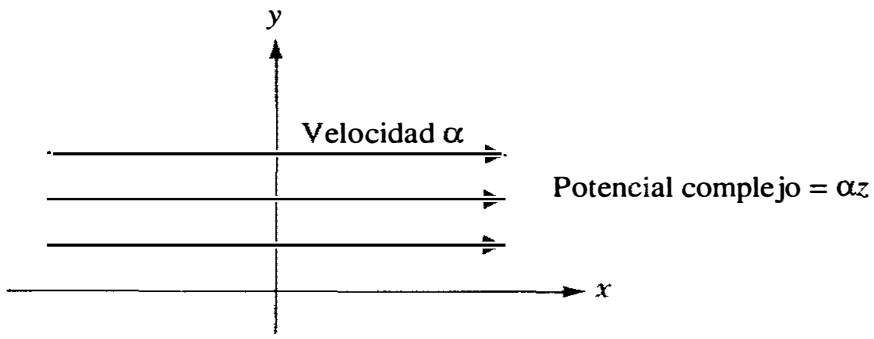


Figura 5.3.15. Flujo en el semiplano superior.

Así, para encontrar el fluido en una región, debemos transformar la región en el semiplano superior y usar la solución $\phi(x, y) = \alpha x$. α debe especificarse como la velocidad al infinito. Debe ser claro que f es un mapeo conforme de la región dada en el semiplano superior, el potencial complejo requerido está dado como $F(z) = \alpha f(z)$.

Ejemplo 5.3.6. *Encuentre el fluido alrededor de la mitad superior del círculo unitario, si la velocidad es paralela al eje* x *y es* α *en infinito.*

Solución. Vamos a transformar el exterior de la región dada en el semiplano superior. Tal mapeo conforme es $z \mapsto z + 1/z$ (figura 5.3.16). En consecuencia $F_0(z) = \alpha z$ es el potencial complejo en el semiplano superior y, por lo tanto, el potencial complejo requerido es

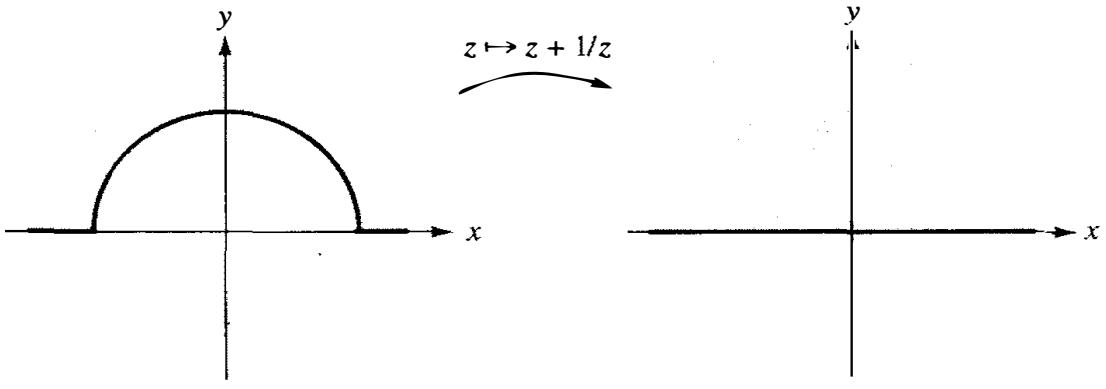


Figura 5.3.16. Efecto de $z \mapsto z + 1/z$.

$$F(z) = \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Es conveniente usar coordenadas polares r y θ para expresar ϕ y ψ. Entonces obtenemos

$$\phi(r, \theta) = \alpha\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \quad \text{y} \quad \psi(r, \theta) = \alpha\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta$$

en la figura 5.3.17 se muestran algunas líneas de corriente.

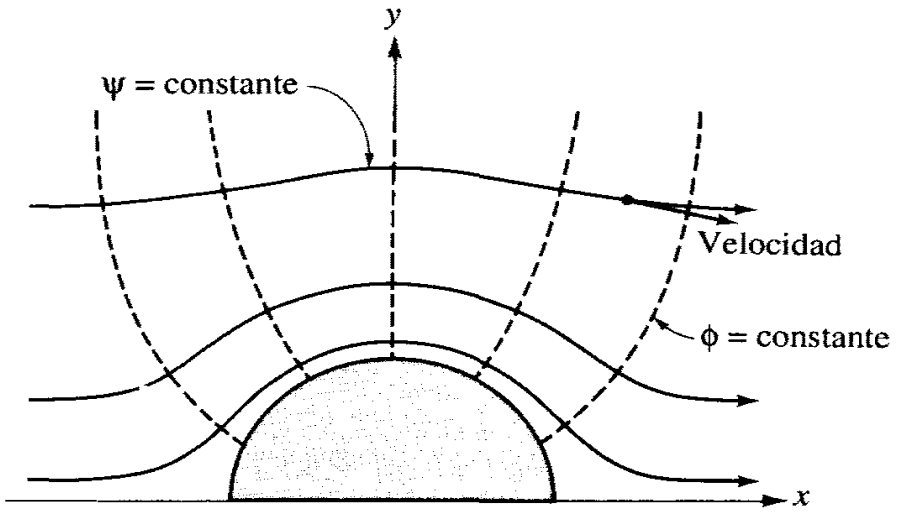


Figura 5.3.17. Líneas de corriente para el flujo alrededor de un cilindro.

NOTA. Modificando ligeramente la transformación $z \mapsto z + 1/z$ mediante la adición de términos de orden mayor escogidos apropiadamente, el semicírculo puede ser remplazado por algo más parecido a un ala de un aeroplano; éstas son llamadas las *transformaciones de Joukowski.* ▼

Ejercicios

1. Encuentre una fórmula para determinar la temperatura en la región mostrada en la figura 5.3.18, con los valores en la frontera indicados.

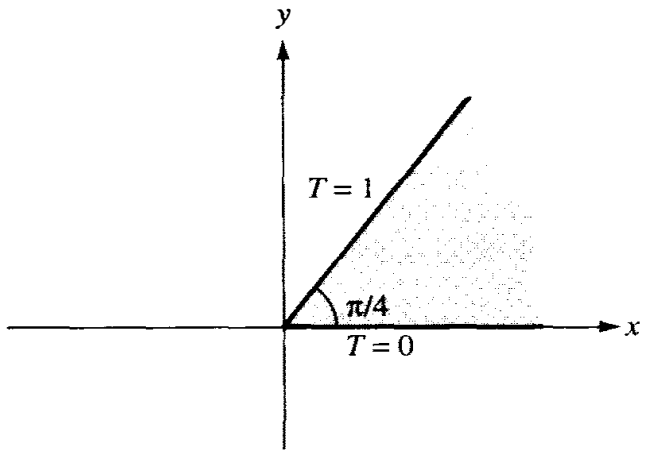


Figura 5.3.18. Encuentre T para esta región.

2. Encuentre una fórmula para determinar la temperatura en la región ilustrada en la figura 5.3.19. (*Sugerencia:* considere el mapeo $z \mapsto \text{sen } z$.)

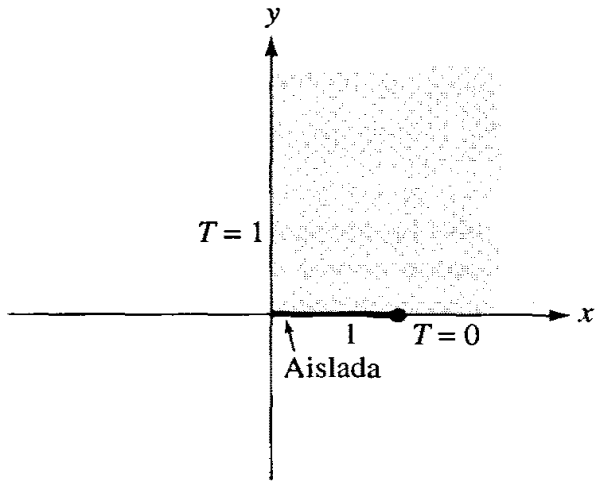


Figura 5.3.19. Encuentre la temperatura en esta región.

3. Encuentre el potencial eléctrico en la región ilustrada en la figura 5.3.20. Bosqueje unas cuantas curvas equipotenciales.
4. Encuentre el potencial eléctrico en la región ilustrada en la figura 5.3.21.
5. Encuentre el flujo alrededor de un disco circular, si el flujo forma un ángulo θ con el eje x, con velocidad α en infinito (figura 5.3.22).
6. Suponga que una carga puntual de +1 se localiza en $z_0 = (1 + i)/\sqrt{2}$ y los ejes positivo e imaginario (las fronteras del primer cuadrante $A = \{z \mid \text{Re } z > 0 \text{ e Im } z > 0\}$) son conductores conectados a tierra, mantenidos a potencial 0. Encuentre el potencial en cualquier punto $z \neq z_0$ dentro de la región A.

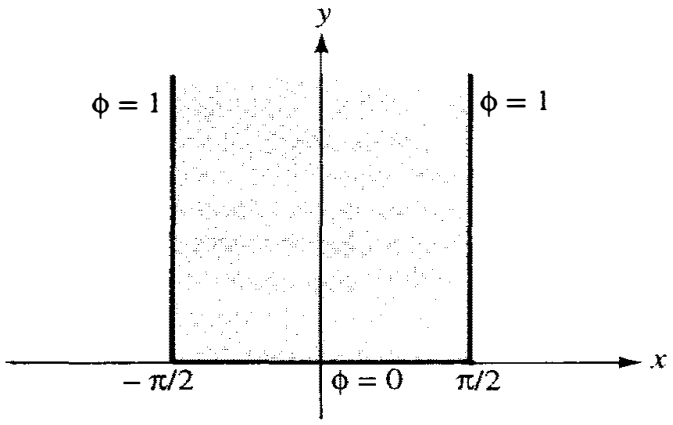


Figura 5.3.20. Encuentre el potencial eléctrico.

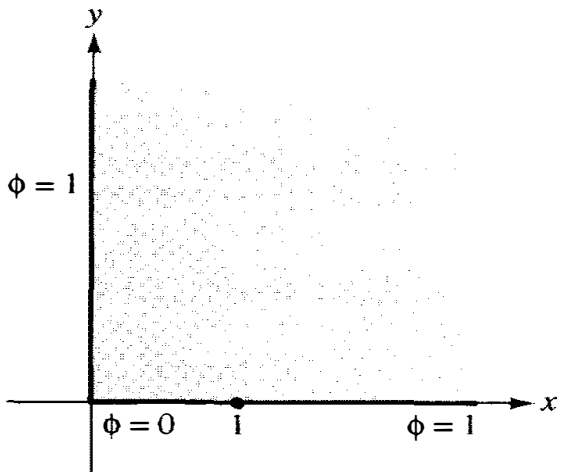


Figura 5.3.21. Encuentre ϕ para esta región.

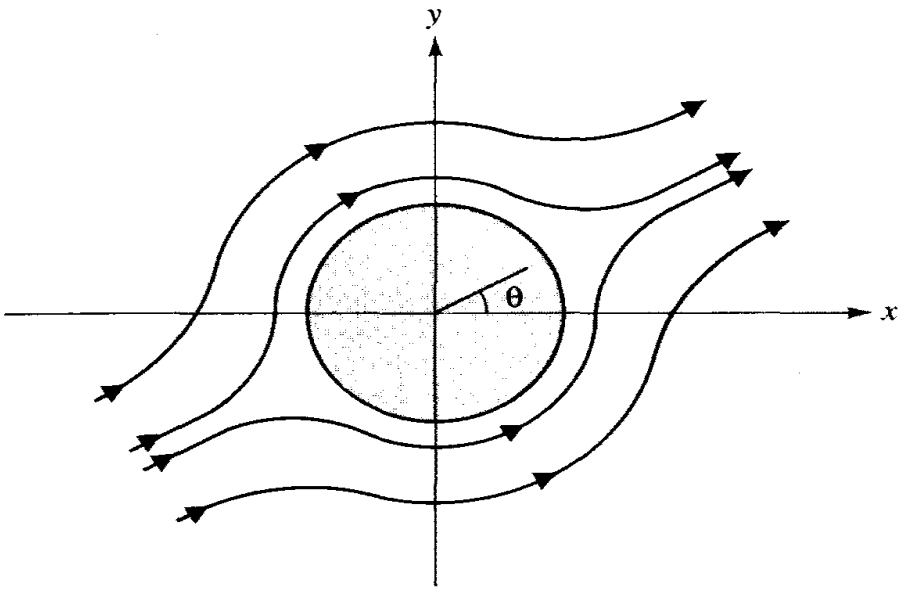


Figura 5.3.22. Flujo alrededor de un disco (ejercicio 5).

7. Obtenga una fórmula para determinar el flujo de un fluido, en la región ilustrada en la figura 5.3.23. (La velocidad en ∞ es α.)

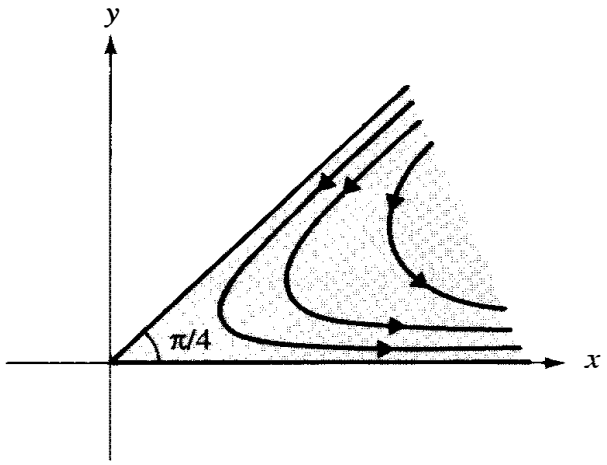


Figura 5.3.23. El fluido de un flujo en una cuña (ejercicio 7).

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

1. Considere el mapeo $z \mapsto z^3$. ¿En qué conjuntos $A \subset \mathbf{C}$ es este mapeo conforme (sobre su imagen)?
2. Verifique directamente que el mapeo $z \mapsto z^n$ preserva la ortogonalidad entre los rayos que parten del 0 y los círculos alrededor de 0.
3. Encuentre un mapeo conforme que mande al disco unitario sobre sí mismo y mande $i/2$ al 0.
4. Encuentre un mapeo conforme del disco unitario sobre sí mismo con $f(1/4) = -\frac{1}{3}$ y $f'(\frac{1}{4}) > 0$.
5. Encuentre un mapeo conforme que mande a la región $A = \{z \text{ tal que } |z-1| > 1 \text{ y } |z-2| < 2\}$ sobre $B = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.
6. Sean $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ y $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Muestre que

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = a$$

define un círculo y que z_1, z_2 son puntos inversos en el círculo (esto es, son colineales con el centro z_0, y $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = \rho^2$, donde ρ es el radio del círculo).
7. Examine la imagen del conjunto $\{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z \geq 0,\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/2\}$ bajo el mapeo $z \mapsto \operatorname{sen} z$, considerando que es la composición de los mapeos $z \mapsto e^{iz}$, $z \mapsto z - 1/z$, $z \mapsto z/2i$.
8. Sea $f\colon A \to B$ un mapeo conforme, sea γ una curva en A y sea $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Muestre que

$$l(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |f'(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$

Si f preserva las longitudes de todas las curvas, demuestre que $f(z) = e^{i\theta}z + a$ para alguna $a \in \mathbf{C}$ y para $\theta \in [0, 2\pi[$.

9. Encuentre un mapeo conforme que mande $A = \{z \text{ tal que } |z - i| < 1\}$ sobre $B = \{z \text{ tal que } |z - 1| < 1\}$.

10. Muestre que la función $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$ transforma la región $A = \{z \text{ tal que } |z| > 1 \text{ y } |z - 1| < 2\}$ en forma uno a uno y sobre, en $B = \{z \mid 0 < \text{Re } z < \frac{1}{2}\}$.

11. La región A en el ejercicio 10 está acotada por dos círculos, como lo es la región $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$. ¿Puede transformarse conformemente esta región en B, mediante una transformación fraccional lineal? Si se puede, muestre la función. Si no se puede, por qué no.

12. Sea $T(z) = (az + b)/(cz + d)$. Muestre que $T(T(z)) = z$ (esto es, $T \circ T$ = identidad) si y sólo si $a = -d$.

13. ¿Es posible encontrar un mapeo conforme del interior del círculo unitario sobre su exterior? ¿Es $f(z) = 1/z$ tal mapeo?

14. Encuentre un mapeo conforme del cuadrante $A = \{z \mid \text{Re } z > 0 \text{ e Im } z > 0\}$ uno a uno y sobre en el disco unitario, que mande $1 + i$ al 0, con derivada positiva en $1 + i$.

15. Sean F_1 y F_2 mapeos conformes del disco unitario sobre sí mismo y sea $F_1(z_0) = F_2(z_0) = 0$ para alguna z_0 fija, $|z_0| < 1$. Muestre que existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $F_1(z) = e^{i\theta}F_2(z)$.

16. Suponga que f es un mapeo conforme uno a uno y sobre, del semiplano superior en si mismo, con $f(-1) = 0, f(0) = 2$ y $f(1) = 8$. Encuentre $f(i)$.

17. Dé una lista completa de todos los mapeos conformes del primer cuadrante $A = \{z \mid \text{Re } z > 0 \text{ e Im } z > 0\}$ sobre sí mismo.

18. Describa la región $\left\{A = z \text{ tal que } \left|\frac{z + 3}{z - 1}\right| < 3\right\}$. (*Sugerencia:* ¿$f(z) = (z + 3)/(z - 1)$ manda qué puntos al círculo $|w| = 3$?).

19. Encuentre un mapeo conforme que mande la región de la figura 5.R.1 en el semiplano superior. Utilice este mapeo para encontrar el potencial eléctrico ϕ con las condiciones de frontera establecidas. (*Sugerencia:* considere una rama de $z \mapsto \sqrt{z^2 - 1}$ después de rotar la figura 90°. Véase también el ejemplo resuelto 5.2.16.)

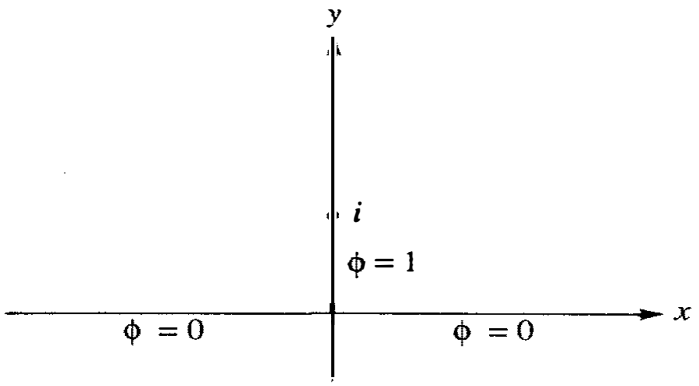


Figura 5.R.1. Datos de frontera para el ejercicio 19.

20. Encuentre el flujo de un fluido en la región mostrada en la figura 5.R.2.

21. Utilice el ejercicio 19 o el ejemplo resuelto 5.2.16 para encontrar el fluido de un fluido sobre el obstáculo de la figura 5.R.3 y trace unas cuantas líneas de corriente.

22. Sea B el primer cuadrante abierto, esto es, $B = \{z \mid \text{Re } z > 0 \text{ e Im } z > 0\}$ y sea $S = \{z \mid 0 < \text{Im } z < \pi\}$.

a) Encuentre una función analítica que transforme en forma uno a uno y sobre a B en S.

b) Encuentre una función u armónica en B y continua en la cerradura de B excepto en $(0, 0)$ la cual satisface que $u(x, y) = 0$ y $u(iy) = \pi$ para $y > 0$.

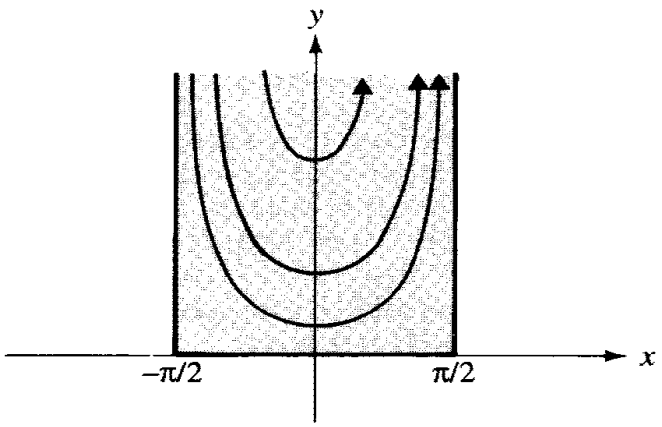


Figura 5.R.2. La región para el ejercicio 20.

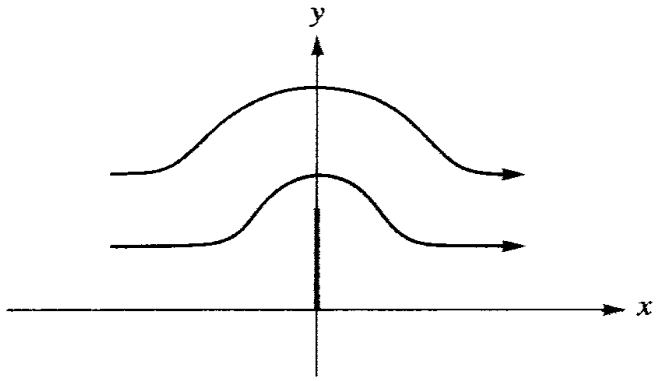


Figura 5.R.3. Flujo sobre un obstáculo.

23. Encuentre el potencial eléctrico en la región mostrada en la figura 5.R.4.

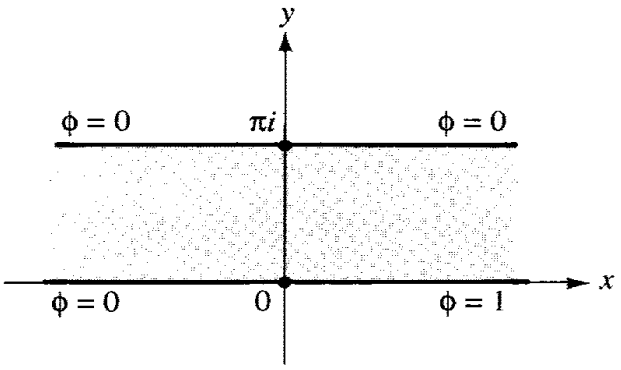


Figura 5.R.4. Datos de frontera para el ejercicio 23.

24. Suponga que una carga puntual de +1 se coloca en $z_0 = i$ en el semiplano superior y que el eje es un conductor conectado a tierra, mantenido con potencial constante 0. Encuentre el potencial en cualquier punto $z \neq i$ en el semiplano superior.

25. Use la fórmula de Schwarz-Christoffel para encontrar un mapeo conforme entre las dos regiones mostradas en la figura 5.R.5($A = -1$ $B = 1$, $B' = 0$.)

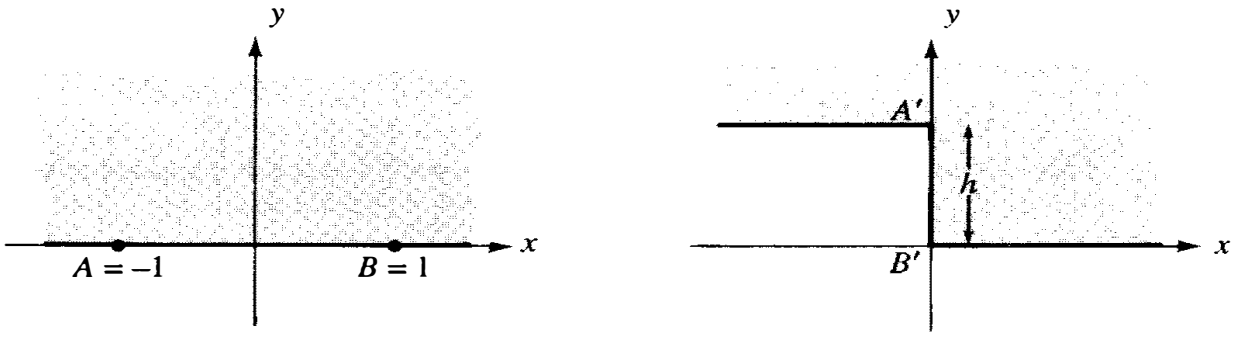


Figura 5.R.5. Regiones para los ejercicios 25 y 26.

26. Use el ejercicio 25 para encontrar las líneas de flujo sobre el escalón del lecho del canal profundo que se muestra en la figura 5.R.5.

27. Encuentre la temperatura en la región ilustrada en la figura 5.R.6. (*Sugerencia:* use $z \mapsto \text{sen}^{-1} z$.)

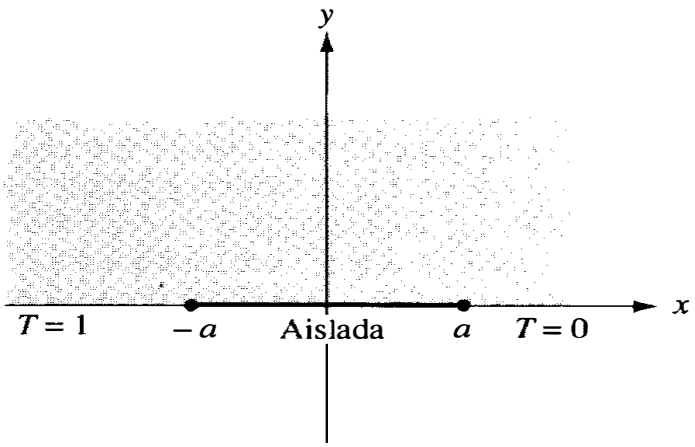


Figura 5.R.6. Datos de frontera para el ejercicio 27.

28. Sea g_n una sucesión de funciones analíticas definida en una región A. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(z)|$ converge uniformemente en A. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} |g'_n(z)|$ converge uniformemente en los discos cerrados de A.

29. Evalúe mediante residuos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 3}\, dx$$

30. Sea f analítica en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Suponga que $f(z) \to \bullet\infty$ conforme $z \to 0$ y $f(z) \to \infty$ conforme $z \to \infty$. Demuestre que f puede escribirse en la forma

$$f(z) = \frac{c_k}{z^k} + \cdots + \frac{c_1}{z} + c_0 + d_1 z + \cdots + d_l z^l$$

para constantes c_i y d_j.

31. Si $\sum_0^\infty a_n z^n$ tiene radio de convergencia ρ, ¿cuál es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^\infty a_n z^{2n}$? ¿De $\sum_{n=0}^\infty a_n^2 z^n$?

32. Encuentre la expansión de Laurent de $f(z)=z^4/(1-z^2)$ que sea válida en el anillo $1 < |z| < \infty$.

6

Desarrollo adicional de la teoría

En este capítulo se continúa el desarrollo de la teoría de las funciones analíticas que se empezó en los capítulos 3 y 4. Las principales herramientas usadas en este desarrollo, son las series de Taylor y el teorema del residuo.

El primer tópico de este capítulo es la continuación analítica; esto es, el esfuerzo de hacer el dominio de una función analítica lo más grande que sea posible. Investigaciones adicionales de las funciones analíticas nos conducen naturalmente al concepto de superficie de Riemann, el cual será brevemente discutido. Propiedades adicionales de las funciones analíticas se desarrollan en las subsecuentes secciones. Algunas de estas propiedades tienen que ver con tópicos como el conteo de ceros de una función analítica; otros son generalizaciones del teorema de la función inversa.

6.1. CONTINUACIÓN ANALÍTICA Y SUPERFICIES DE RIEMANN ELEMENTALES

El primer teorema que se demostrará en esta sección, es llamado el principio de continuación analítica, el cual también es referido como el teorema de identidad. Este teorema y su demostración, conducen a la discusión de las superficies de Riemann, las cuales facilitan un tratamiento más satisfactorio de lo que previamente fue referido como "funciones multivaluadas", tales como $\log z$ y $\sqrt{z}$. La discusión es heurística, está pensada principalmente para motivar trabajos más avanzados.

Continuación analítica

Si dos funciones coinciden en una parte pequeña de una región (conexa), entonces ellas coinciden en toda la región en la cual ambas son analíticas. Esto se establece precisamente en el siguiente teorema.

Principio de continuación analítica o teorema de identidad 6.1.1. *Sean* f *y* g *analíticas en una región* A. *Suponga que existe una sucesión* $z_1, z_2, \ldots$ *de puntos distintos de A que converge a* $z_0 \in$ A, *tal que* $f(z_n) = g(z_n)$ *para toda* n = 1, 2, 3,... *Entonces* f = g *en todo* A (véase la figura 6.1.1). *La conclusión es válida, en particular, si* f = g *en alguna vecindad de algún punto en* A.

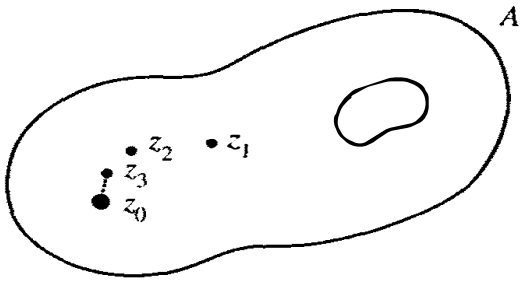


Figura 6.1.1. El teorema de identidad: $\{ f = g \text{ en } z_1, z_2, \ldots \} \Rightarrow \{ f(z) = g(z) \text{ para toda } z \in A \}$.

Demostración. Debemos demostrar que $f - g = 0$ en A. Haremos esto demostrando que para una función analítica h en A, las siguientes cuatro afirmaciones son equivalentes:

(i) Para alguna z_0, la n-ésima derivada en z_0 se anula:

$$h^{(n)}(z_0) = 0, n = 1, 2, \ldots$$

(ii) $h = 0$ en alguna vecindad de z_0.
(iii) $h(z_k) = 0$, donde z_k es alguna sucesión de puntos distintos que converge a z_0.
(iv) $h = 0$ en todo A.

Después que estas equivalencias sean demostradas, el teorema se sigue al tomar $f - g = h$ y aplicar (iv).

Primero, (i) $\Leftrightarrow$ (ii), por el teorema de Taylor. (El estudiante debe escribir los detalles de esta afirmación si ésta no es clara.) Enseguida mostramos que (iii) $\Rightarrow$ (ii) al mostrar que los ceros de una función analítica h son aislados, a menos que $h = 0$ en una vecindad de z_0. En efecto, si h no es idénticamente 0 en un disco alrededor de z_0, podemos escribir $h(z) = (z - z_0)^k \phi(z)$, donde $\phi(z) \neq 0$ y k es un entero ≥ 1 (¿por qué?). Ahora bien, $\phi(z) \neq 0$ en toda una vecindad de z_0, por continuidad, así que en esa vecindad $h(z) \neq 0$ excepto en $z = z_0$. Esta afirmación contradice el que $h(z_n) = 0$ puesto que, para n suficientemente grande, z_n está en la vecindad y podemos suponer que $z_n \neq z_0$.

Claramente, (iv) $\Rightarrow$ (iii). La demostración estará completa cuando demostremos que (ii) $\Rightarrow$ (iv). Sea $B = \{ z \in A \mid h \text{ es cero en una vecindad de } z \}$. Por definición, B es abierto y es no vacío por hipótesis. Vamos a demostrar que B es también cerrado en A, mostrando que si $z_k \to z$, $z_k \in B$, entonces $z \in B$. Es suficiente (por el resultado previo (i) $\Rightarrow$ (ii) aplicado al punto z) probar que $h^{(n)}(z) = 0$ para toda n. Pero $h^{(n)}(z) = \lim_{k \to \infty} h^{(n)}(z_k) = 0$. Entonces, B es cerrado, abierto y no vacío y, por lo tanto, $B = A$,

puesto que se supone que A es conexo (recuerde que una región es abierta y conexa, por definición). ■

Una interesante aplicación de este teorema es la siguiente. Existe exactamente una función analítica en $\mathbf{C}$ que coincide con e^x en el eje x, a saber, e^z. Ésta es una consecuencia inmediata del teorema de identidad puesto que el eje x contiene una sucesión convergente de puntos distintos (por ejemplo, $1/n$).

Las siguientes consecuencias del teorema de identidad son lo suficientemente importantes que merecen ser enunciadas explícitamente.

Corolario 6.1.2. *Los ceros (o, más generalmente, los puntos donde se asume un valor específico) de una función analítica no constante, son aislados en el siguiente sentido. Si* f *es analítica y no constante en una región* A, *y* $f(z_0) = w_0$ *para un punto* z_0 *en* A, *entonces existe un número* $\varepsilon > 0$ *tal que* f(z) *no es igual a* w_0 *para ninguna* z *en la vecindad agujerada* $\{z \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Demostración. Si no existiera tal ε, entonces f coincidiría con la función constante $h(z) = w_0$ al menos en alguna sucesión de puntos que convergen a z_0. Pero entonces coincidiría con h en todo A, por el teorema de identidad y, por lo tanto, sería constante. ■

Observe que puede haber un punto límite de ceros en la frontera de la región de analiticidad. (Esto se ilustra en el ejemplo resuelto 6.1.11 con la función sen $(1/z)$.) El teorema de identidad dice que una función no constante no puede tener un punto límite de ceros en el *interior* de la región de analiticidad.

Corolario 6.1.3. *Sean* $f : A \to \mathbf{C}$ *y* $g : B \to \mathbf{C}$ *analíticas en las regiones* A *y* B. *Suponga que* $A \cap B \neq \varnothing$ *y* $f = g$ *en* $A \cap B$. *Defínase*

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in A \\ g(z) & \text{si } z \in B \end{cases}$$

Entonces h *es analítica en* $A \cup B$ *y es la única función analítica en* $A \cup B$ *que es igual a* f *en* A (*o a* g *en* B). *Decimos que* h *es una* ***continuación analítica*** *de* f (*o de* g) (véase la figura 6.1.2).

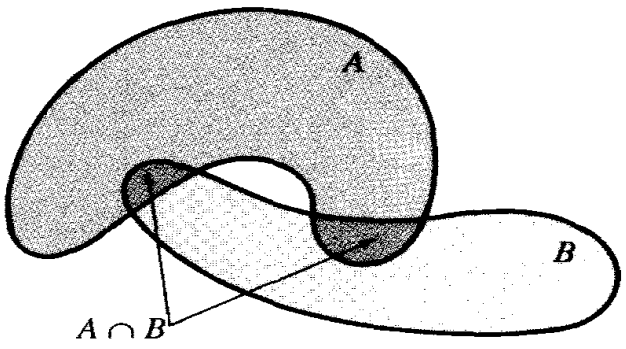


Figura 6.1.2. Continuación analítica.

Demostración. Que h es analítica es obvio, ya que f y g lo son. La unicidad de h resulta a la vez del teorema de identidad y de los hechos de que $A \cup B$ es una región y de que $A \cap B$ es abierto. ■

La continuación analítica es importante porque proporciona un método para hacer el dominio de una función analítica tan grande como sea posible. Sin embargo, puede ocurrir el siguiente fenómeno: Sea f en A, continuada a la región A_1 y sea A_2 como se muestra en la figura 6.1.3. Si continuamos f para que sea analítica en A_1, luego continuamos esta nueva función de A_1 a A_2, el resultado no necesariamente

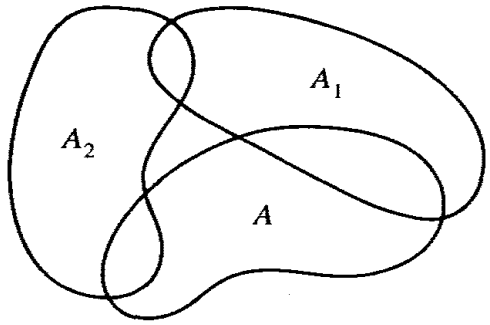


Figura 6.1.3. Continuación de una función de A a A_1 y de A_1 a A_2.

coincide con la función original f en A. Un ejemplo específico puede clarificar este punto. Considere el log z, la rama principal ($-\pi < \arg z < \pi$) en la región A, consistente del semiplano derecho unión el semiplano inferior. La función log puede continuarse únicamente para que incluya a A_1 = el semiplano superior, en su dominio. Similarmente, podemos continuar otra vez el log, del semiplano superior a fin de que incluya a A_2 = el semiplano izquierdo, en su dominio, al escoger la rama $0 < \arg z < 2\pi$. Pero estas ramas no coinciden en el tercer cuadrante; difieren en $2\pi i$ (véase la figura 6.1.4). Por lo tanto, al continuar una función, debemos estar seguros de que la función, en la región extendida B, coinciden con la original en toda la intersección $A \cap B$ y no únicamente en una parte de ella.

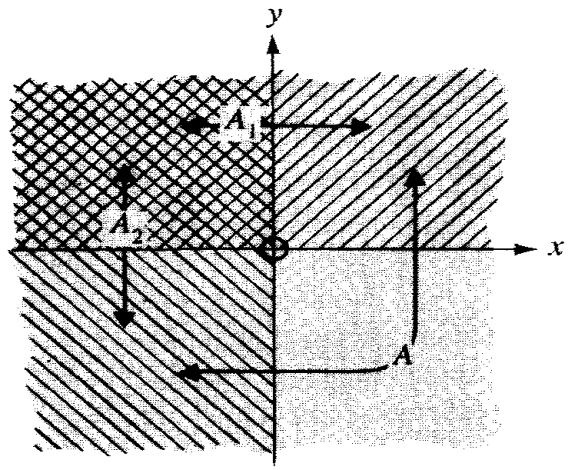


Figura 6.1.4. Continuación del log.

No siempre es posible extender una función analítica a un dominio mayor. En el ejercicio 5 se le pide al lector confirmar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ converge a una función analítica $f(z)$ en el disco unitario abierto, pero que esta función no puede ser continuada analíticamente a ningún conjunto abierto más grande. El círculo unitario es llamado una *frontera natural* para esta función. En las dos siguientes subsecciones examinaremos las técnicas mediante las cuales puede algunas veces llevarse a cabo la continuación analítica.

Principio de reflexión de Schwarz

Hay un caso especial de continuación analítica que puede tratarse directamente como sigue.

Principio de reflexión de Schwarz 6.1.4. *Sea* A *una región en el semiplano superior cuya frontera* fr (A) *intersecta al eje real en un intervalo* [a, b] *(o en la unión finita de intervalos ajenos). Sea* f *analítica en* A *y continua en* A $\cup$] a, b[. *Sea* $\bar{A} = \{z \mid \bar{z} \in A\}$, *la reflexión de* A (véase la figura 6.1.5), *y defina* g *en* $\bar{A}$ *como* g(z) = $\overline{f(\bar{z})}$. *Asuma que* f *es real en*]a, b[. *Entonces,* g *es analítica y es la única continuación analítica de* f *en* A $\cup$]a, b[$\cup$ $\bar{A}$.

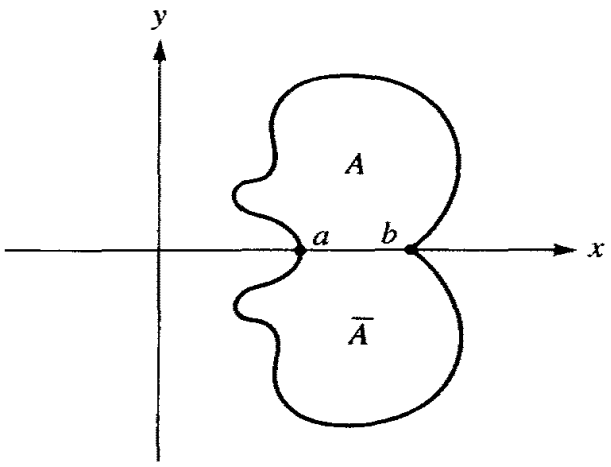


Figura 6.1.5. $\bar{A}$ es la reflexión de A.

Demostración. El teorema de identidad implica la unicidad, porque f es igual a g en un conjunto (a saber, $]a, b[$) que contiene una sucesión convergente de puntos distintos; note que $f = g$ en el eje real porque aquí, $z = \bar{z}$ y $\bar{f} = f$. (f es asumida real en el eje real.) La analiticidad de g en $\bar{A}$ se sigue directamente de las ecuaciones de Cauchy-Riemann y fue establecida en el ejemplo resuelto 1.5.18. Si h está definida en $A \cup]a, b[\cup \bar{A}$, al hacer la igual a $f(z)$ en $A \cup]a, b[$ y a $g(z)$ en $\bar{A}$, entonces h es continua ya que $f = g$ en el eje real. ($\bar{z} = z$ y $\bar{f} = f$ allí, pues f es real en el eje real). Así, h es analítica en A y $\bar{A}$, y es continua en $A \cup]a, b[\cup \bar{A}$. La analiticidad en todo el conjunto se sigue del teorema de Morera y fue establecida en el ejemplo resuelto 2.4.17. ■

Este resultado es notable pues únicamente necesitamos que f sea continua y real en $]a, b[$. Se sigue automáticamente que f es analítica en $]a, b[$ cuando se continua a través del eje real. Para ayudar a ver que g (y, por lo tanto, h) es continua en $\overline{A}$, considere el mapeo en tres pasos:

$$z \mapsto \bar{z}; \quad \bar{z} \mapsto f(\bar{z}); \quad f(\bar{z}) \mapsto \overline{f(\bar{z})}$$

El mapeo de enmedio es conforme; el primero y el último son anticonformes en el sentido que éstos invierten ángulos. Puesto que los ángulos son invertidos dos veces, el resultado preserva ángulos. El mapeo total es entonces conforme.

Un principio de reflexión relacionado puede formularse usando círculos en lugar del eje real y remplazando la conjugación compleja por la reflexión en el círculo. El teorema de reflexión de Schwarz (6.1.4) es un caso especial de líneas que son tratadas como círculos de radio infinito, como en el capítulo 5.

Principio de reflexión de Schwarz para un círculo 6.1.5. *Sea* A *una región en el interior o en el exterior de un círculo* C_1 *(o en uno de los lados de una línea) con parte de su frontera un arco* γ *de* C_1. *Suponga que* f *es analítica en* A *y continua en* $A \cup \gamma$ *y* $f(\gamma)$ *es un arco* Γ *de otro círculo (o línea)* C_2. *Sea* $\tilde{A} = \{z \mid \tilde{z} \in A\}$ *la reflexión de* A *en* C_1 *y defina* g *en* $\tilde{A}$ *como* $g(z) = [f(\tilde{z})]\tilde{}$ *(el segundo ~ denota la reflexión en* C_2*). Entonces* g *es analítica y es la única continuación analítica de* f *hasta* $A \cup \gamma \cup \tilde{A}$.

Demostración. Asumimos que A es interior a C_1 y que $f(A)$ es interior a C_2. Los otros casos son similares. Sean T_i, $i = 1, 2$, transformaciones fraccionales lineales que mandan a C_i en el eje real y a sus interiores en el semiplano superior. Para w en $T_1(A)$, $h(w) = T_2(f(T_1^{-1}(w)))$ es analítica y, por el principio de reflexión de Schwarz (6.1.4), $\overline{h(\bar{w})}$ da una continuación analítica de $\overline{T_1(A)}$. Usando el hecho de que las transformaciones fraccionales lineales preservan la reflexión en círculos (proposición 5.2.7) (y que la conjugación compleja es una reflexión en el eje real), encontramos que $[f(\tilde{z})]\tilde{} = T_2^{-1}(\overline{h(\overline{T_1(z)})})$ y, por lo tanto, es una continuación analítica de f. (Véase la figura 6.1.6.) ■

Un argumento similar al usado anteriormente para establecer el ejemplo resuelto 2.4.17 y el principio de reflexion de Schwarz (6.1.4) se pueden usar para establecer lo siguiente, a partir del teorema de Morera.

Continuación analítica por continuidad 6.1.6. *Sean* A *y* B *dos regiones simplemente conexas ajenas cuyas fronteras se intersecan en una curva simple suave* γ. *Sea* $C = A \cup (\gamma$ *interior*$) \cup B$ *(donde* γ *interior significa la imagen de* γ *sin los extremos) y suponga que*

(i) *Cada punto en* γ *interior tiene una vecindad en* C.
(ii) f *es analítica en* A *y continua en* $A \cup \gamma$.

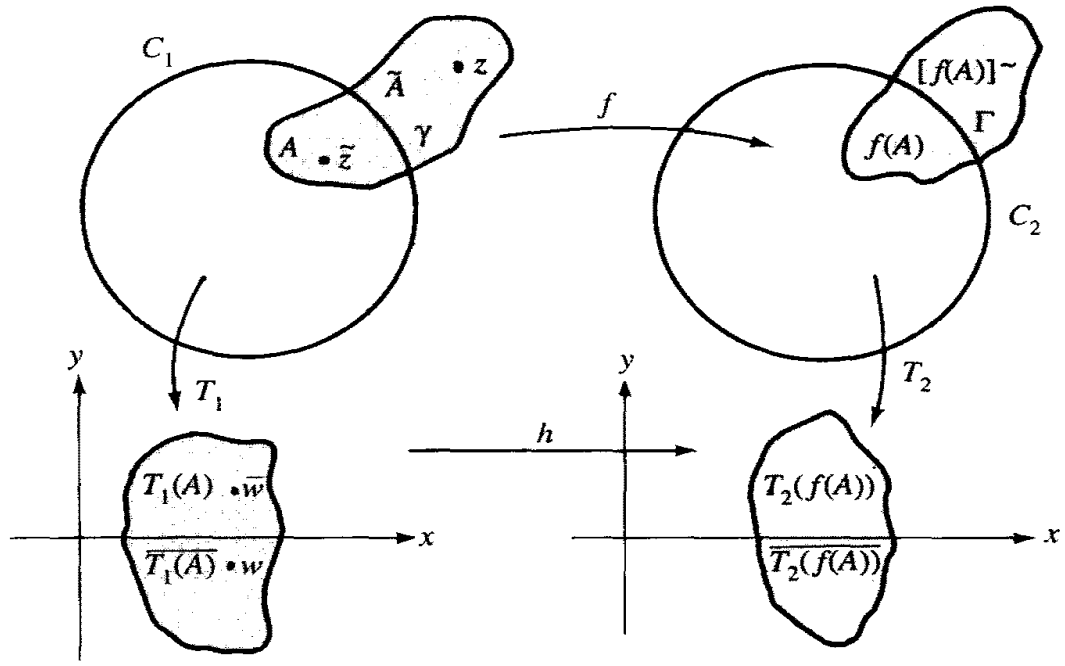


Figura 6.1.6. Continuación analítica mediante reflexión.

(iii) g *es analítica en* B *y continua en* B $\cup \gamma$.

(iv) *Para* $t \in \gamma$, $\lim_{\substack{z \to t \\ z \in A}} f(z) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in B}} g(z)$

Entonces, existe una función analítica h *en* C *que coincide con* f *en* A *y con* g *en* B.

Continuación analítica por series de potencias a lo largo de curvas

Suponga que f es analítica en una vecindad U de z_0 y que γ es una curva que une a z_0 con algún otro punto z' (como en la figura 6.1.7). Si queremos continuar f a z', podemos proceder como sigue. Para z_1 sobre γ en U, considere la serie de Taylor de f expandida alrededor de z_1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n$$

Esta serie de potencias puede tener un radio de convergencia tal que la serie de potencias sea analítica a lo largo de γ más allá de la porción de γ en U. La serie de potencia así obtenida, define entonces una continuación analítica de f. Podemos continuar este camino a lo largo de γ en espera de llegar a z', lo cual será posible si los sucesivos radios de convergencia no se contraen a 0 antes de alcanzar z'. Si tenemos éxito, decimos que f puede ser *continuada analíticamente* a lo largo de γ. Sin embargo, debemos ser cuidadosos, pues la continuación analítica de f así definida, podría no ser una función univaluada si γ se interseca a sí misma (como en la figura 6.1.8).

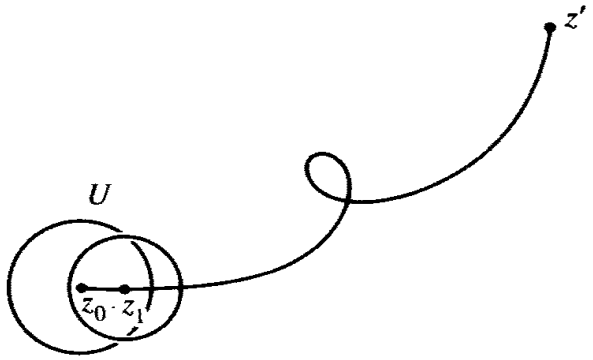


Figura 6.1.7. Continuación mediante series de potencias.

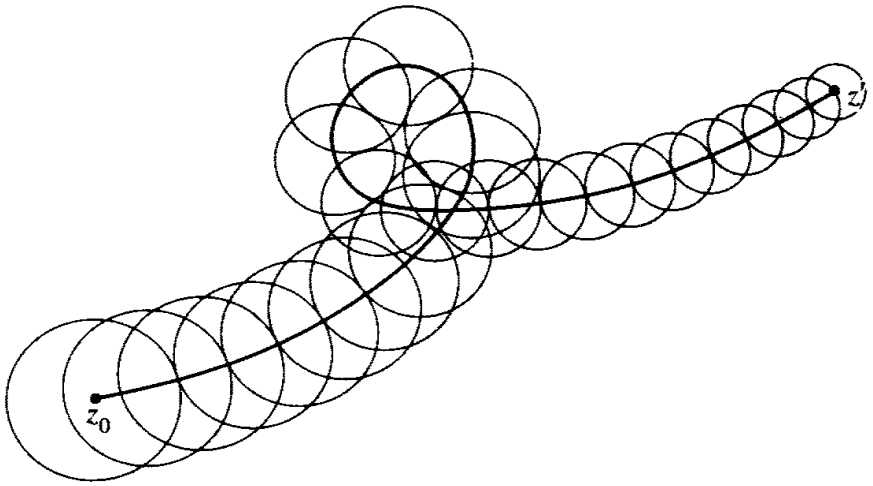


Figura 6.1.8. La continuación puede llevar a autointersecciones.

Los coeficientes de la serie de potencias alrededor del nuevo centro, z_1, pueden calcularse en términos de los coeficientes para la serie de Taylor de f alrededor del centro original z_0. (Véase el ejemplo resuelto 6.1.13.) Si se puede llegar de alguna manera a z' mediante este proceso, entonces esto se puede hacer en un número finito de pasos. Esto se debe esencialmente al lema de la cubierta de una trayectoria. (Véase el ejercicio 7.) Así, la continuación de z' puede calcularse en términos de la función original. (Una discusión de esto que incluye los aspectos numéricos de los cálculos se puede encontrar en el capítulo 3 de *Applied and Computational Complex Analysis*, de Peter Henrici, Nueva York: Wiley-Interscience, 1974.)

El ejemplo $\Sigma z^{n!}$ que se mencionó anteriormente, muestra que puede ocurrir que no haya dirección en la cual una serie de potencias pueda ser continuada. Afortunadamente éste no es siempre el caso. Sin embargo, siempre debe haber una dirección en la cual esto no sea posible.

Proposición 6.1.7. *Suponga que* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *tiene radio de convergencia* $R < \infty$. *Entonces, debe haber al menos un punto* z_1, *con* $|z_0 - z_1| = R$, *tal que* f *no pueda ser continuada analíticamente a algún conjunto abierto que contenga a* z_1.

Demostración. Sea $B = \{ z \text{ tal que } |z - z_0| < R \}$ y sea C su círculo frontera $\{z$ tal que $|z - z_0| = R\}$. Vamos a demostrar que si la afirmación fuera falsa entonces f podría ser continuada analíticamente a un conjunto abierto que contiene al disco cerrado $B \cup C$. Si se hiciera esto, el ejemplo resuelto 1.4.28 mostraría que A contiene un disco más grande $B_\varepsilon = \{z$ tal que $|z - z_0| < R + \varepsilon\}$. (Véase la figura 6.1.9.) Habríamos continuado f a un disco mayor con el mismo centro. Esto no es posible ya que esto implicaría un radio de convergencia mayor que R. (Véase el ejemplo resuelto 6.1.12.)

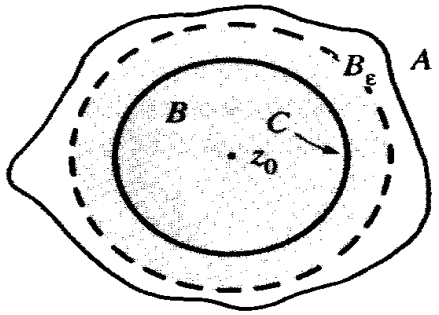


Figura 6.1.9. Si A es un conjunto abierto que contiene a B y a su frontera, entonces A contiene a un disco ligeramente más grande.

Para obtener A, procedemos como sigue. Para cada w sobre C existe una vecindad B_w de w y una continuación analítica f_w de f a $A_w = B \cup B_w$. (Véase la figura 6.1.10.) Entonces $A =$ (unión de todas las A_w) es un conjunto abierto que contiene a $B \cup C$. Tratamos de definir una continuación de f a A haciendo $g(z) = f_w(z)$ para z en A_w. Si esto tiene un significado no ambiguo, ciertamente será analítica en A, ya que f_w es analítica en A_w. Para que g tenga sentido, necesitamos saber que si z está en $A_{w_1} \cap A_{w_2}$, entonces $f_{w_1}(z) = f_{w_2}(z)$. Pero esto es cierto. Las dos funciones son ambas analíticas en la región $A_{w_1} \cap A_{w_2}$ y ambas son iguales a f en el conjunto abierto $B \subset A_{w_1} \cap A_{w_2}$. Por lo tanto, ellas deben coincidir en toda la región, por el teorema de identidad. Así, la definición de g tiene sentido. Esto no depende de la A_w que contiene a z que hayamos seleccionado. ■

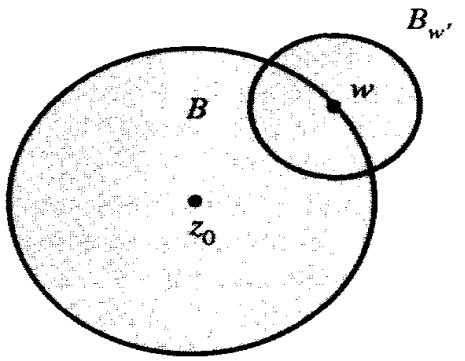


Figura 6.1.10. El conjunto $A_w = B \cup B_w$.

Consecuentemente, el radio de convergencia de una continuación analítica es muy independiente del método que se use para obtenerlo. Esto coincide con lo que fue visto en el capítulo 3; el radio de convergencia debe ser la distancia a la singularidad más cercana que no se puede evitar.

Proposición 6.1.8. *Suponga que* f *es analítica en una vecindad de un punto* z_0 *de una región* A *y que* f *puede ser continuada analíticamente a lo largo de cualquier curva que une a* z_0 *con cualquier otro punto* z_1 *de* A. *Entonces, el radio de convergencia de la serie de Taylor en* z_1 *para cada una de tales continuaciones a* z_1 *es la misma y es al menos tan grande como la distancia de* z_1 *al complemento de A.*

Demostración. Suponga que no. Entonces, al extender la curva radialmente de z_1 a cualquier punto sobre el círculo de convergencia, la extensión podría ser continuada analíticamente aun más allá en toda dirección desde z_1, contrario a la proposición 6.1.7. ■

La proposición *no* asegura que todas las continuaciones son la misma. Esto podría no ocurrir, como lo demuestra el ejemplo del logaritmo. Podríamos obtener simplemente funciones locales definidas en discos pero que no necesariamente coinciden en los traslapes. Esta construcción es una forma básica en la cual surgen las funciones multivaluadas. Un punto es llamado un *punto rama* si una continuación analítica alrededor de una curva cerrada que lo rodee, puede producir un diferente valor al regresar al punto inicial. Los siguientes resultados básicos dicen que las funciones multivaluadas no surgen a partir de continuaciones a lo largo de curvas en regiones simplemente conexas.

Principio de monodromía 6.1.9. *Sea* A *una región simplemente conexa y sea* $z_0 \in$ A. *Sea* f *analítica en una vecindad de* z_0. *Suponga que* f *puede ser continuada analíticamente a lo largo de cualquier arco que une a* z_0 *con cualquier otro punto* $z \in$ A. *Entonces, esta continuación define una continuación analítica (univaluada) de* f *en* A.

Demostración. Necesitamos demostrar que si z_1 es cualquier otro punto de A, entonces el proceso de continuación a lo largo de una curva γ de z_0 a z_1 a través de A, siempre producirá el mismo valor en z_1, sin importar la curva que se haya usado. Con este fin, sean γ_0 y γ_1 dos curvas de z_0 a z_1 en A. Puesto que A es simplemente conexa, éstas son homotópicas con extremos fijos, en A. Esto es, existe una función continua H: $[0, 1] \times [0, 1] \to A$ del cuadrado unitario en A, tal que $H(0, t) = \gamma_0(t)$, $H(1, t) = \gamma_1(t)$, $H(s, 0) = z_0$, y $H(s, 1) = z_1$ para toda s y t entre 0 y 1, inclusive. Las funciones $\gamma_s(t) = H(s, t)$ son una familia de curvas de z_0 a z_1 en A, que se deforman continuamente de γ_0 a γ_1. Véase la figura 6.1.11. Hay una continuación analítica f_s de f, desde z_0 hasta z_1, a lo largo de cada curva γ_s. Vamos a probar que $f_s(z_1)$ no puede cambiar conforme s es trasladada continuamente desde 0 hasta 1 y, por lo tanto, que $f_0(z_1) = f_1(z_1)$. Esto es exactamente lo que necesitamos para establecer el teorema.

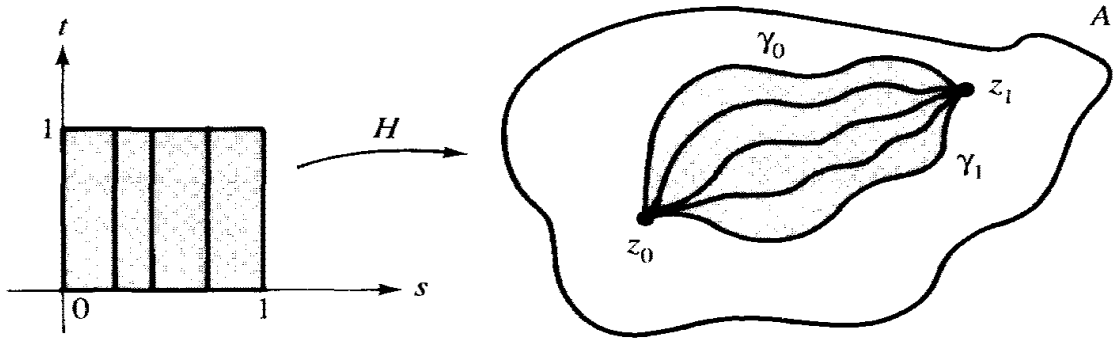


Figura 6.1.11. Homotopía entre γ_0 y γ_1.

La imagen de un cuadrado es un subconjunto cerrado y acotado de A. Así, por el lema de la distancia (1.4.21) ésta está a una distancia positiva ρ del complemento de A. Por la proposición (6.1.8), el radio de convergencia siempre es al menos ρ, conforme continuamos analíticamente a f a lo largo de cualquiera de las curvas γ_s. Por el lema de la cubierta de una trayectoria (1.4.24), la continuación a lo largo de cualquier γ_s, debe ser completada hasta z_1, en un número finito de pasos, usando discos de radio ρ. Para cada s, este procedimiento produce una continuación analítica de f en una función f_s analítica sobre un "tubo" A_s alrededor de γ_s, como en la figura 6.1.12. Con un poco de cuidado, podemos seleccionar un número finito de puntos $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_N = 1$ y los valores de t que definen los centros de los discos, haciendo que los tubos A_s estén lo suficientemente cerca para que γ_{s_k} esté contenido en el tubo precedente $A_{s_{k-1}}$ y en el tubo subsiguiente $A_{s_{k+1}}$. Esto se hace usando la continuidad uniforme de H, exactamente como en la demostración del teorema de deformación (2.3.12); véase, en particular, la figura 2.3.14. Las funciones f_{s_k} son, cada una de ellas, analíticas en la región $A_{s_k} \cap A_{s_{k-1}}$ y coinciden en el conjunto abierto $D(z_0; \rho) \subset A_{s_k} \cap A_{s_{k+1}}$, y, por lo tanto, coinciden en toda la región, por el teorema de identidad en particular, $f_{s_k}(z_1) = f_{s_{k+1}}(z_1)$, así que $f_0(z_1) = f_{s_1}(z_1) = f_{s_2}(z_1)$ $= \cdots = f_{s_N}(z_1) = f_1(z_1)$. La continuación de f a lo largo de γ_0 hasta z_1, coincide con aquella a lo largo de γ_1 en el punto γ_1. Esto es lo que necesitábamos mostrar. ■

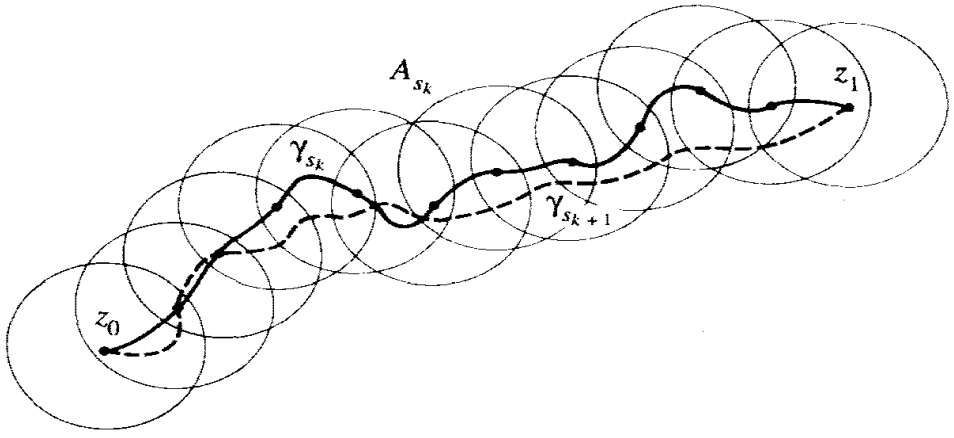


Figura 6.1.12. Cada $\gamma_{s_{k+1}}$ está contenida en A_{s_k}.

Para regiones que no son simplemente conexas, podemos obtener diferentes valores para la continuación de f, cuando recorremos dos trayectorias diferentes. Este hecho fue ya mencionado en el inicio de esta sección en conexión con log z. Por ejemplo, en la figura 6.1.13, al empezar con log definido cerca de 1 y al continuar a lo largo de γ_1, obtenemos $\log(-1) = \pi i$, mientras que a lo largo de γ_2, obtenemos $\log(-1) = -\pi i$. Esto se debe a que la región $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ no es simplemente conexa.

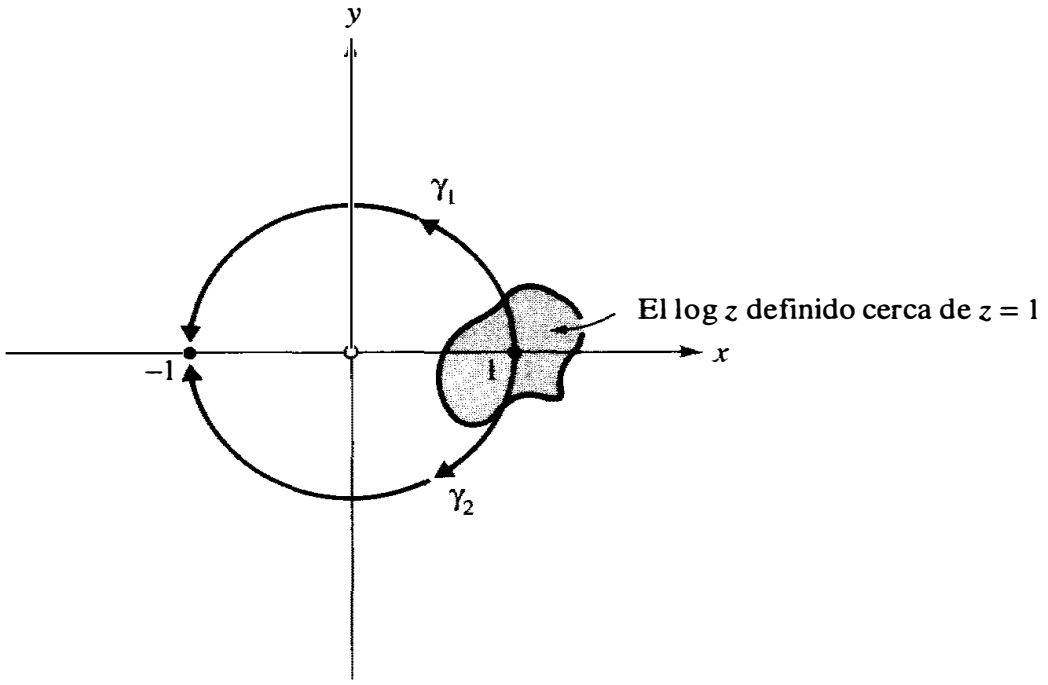


Figura 6.1.13. Continuación del log z a lo largo de dos arcos diferentes, desde 1 a –1.

Superficies de Riemann de algunas funciones elementales

El fenómeno que se acaba de describir, puede llevar al estudiante a preguntarse si existe una definición del log que no introduzca líneas de rama artificiales (las cuales, después de todo, pueden escogerse arbitrariamente). La respuesta está dada por una brillante idea de Georg Riemann en su tesis doctoral en 1851, la cual es descrita aquí brevemente.

Para el logaritmo, si log z se hiciera univaluada, deberíamos considerar a γ_1 y γ_2 en la figura 6.1.13 como si terminaran en lugares distintos. Esto puede representarse como en la figura 6.1.14. Se muestra sólo una parte de la escalera de caracol M, con ejes sobre el origen —ésta deberá extenderse indefinidamente hacia afuera—. Si cortamos desde el 0 hacia afuera en cualquier nivel y en el nivel inmediatamente abajo de éste, obtenemos una parte de la superficie llamada una *hoja* (la porción sombreada en la figura 6.1.14). Esto puede ser identificado con el dominio de cada una de las ramas del log. Así, hemos apilado una cantidad infinita de copias del campo complejo $\mathbf{C}$ unidas a través del 0 y pegadas como se muestra en la figura 6.1.14. Ahora los arcos γ_1 y γ_2 van a diferentes puntos, así que podemos asignar diferentes valores de log z a cada uno, sin ambigüedad.

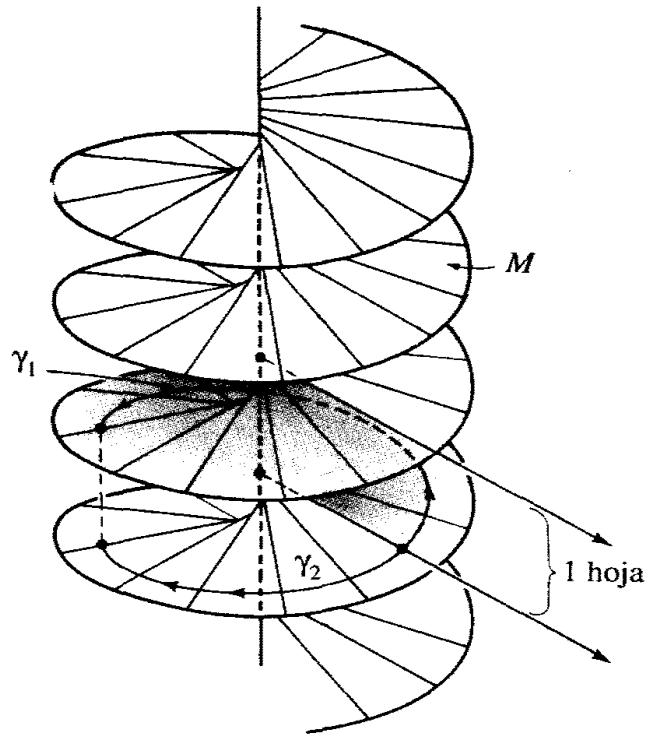


Figura 6.1.14. La superficie de Riemann para log z.

La principal propiedad de esta superficie, que nos permite definir a $\log z = \log |z| + i \arg z$ como una función univaluada, es que en esta superficie, el arg z está bien definido y las diferentes hojas corresponden a los diferentes intervalos de longitud 2π en las cuales el arg z toma sus valores.

Así, podemos considerar a las funciones multivaluadas introduciendo un dominio más grande en el cual la función resulte univaluada.

Consideremos brevemente otro ejemplo, la función raíz cuadrada: $z \mapsto \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$. Aquí la situación es ligeramente diferente a la de la función log. Si rodeamos al origen una vez, $\sqrt{z}$ toma un diferente valor, pero si lo rodeamos dos veces (θ incrementado por 4π), regresamos al mismo valor, así que queremos estar en el mismo punto en la superficie de Riemann. La superficie se ilustra en la figura 6.1.15.

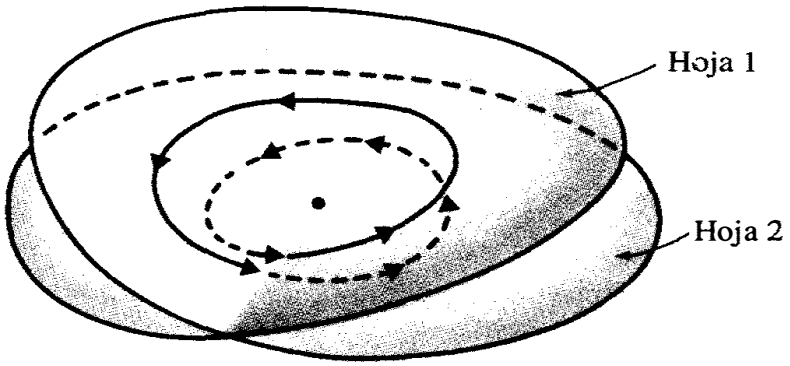


Figura 6.1.15. La superficie de Riemann para $\sqrt{z}$.

Aun cuando parece que las hojas en esta figura se intersecan, se supone que no lo hacen. La falla es nuestro intento de visualizarla en $\mathbf{R}^3$. Uno puede considerar que la superficie de Riemann está en $\mathbf{R}^4$ o en $\mathbf{C}^2$. La figura 6.1.15 es una ilustración de su "sombra" en $\mathbf{R}^3$. Aquí está otra manera de pensar cómo se relaciona a la superficie con la continuación analítica. Sea γ el círculo unitario recorrido dos veces en

contra de las manecillas del reloj, al hacer que t cambie suavemente desde 0 hasta 4π en $\gamma(t) = e^{it}$. Entonces, $f(t) = e^{it/2}$ da una raíz cuadrada que cambia suavemente para $\gamma(t)$. En el inicio, $\gamma(0) = 1$ y $f(0) = 1 =$ "$\sqrt{1}$." Conforme hacemos el primer tránsito alrededor del círculo, $\gamma(t)$ toca sucesivamente a los puntos B, C y D (i, -1 y $-i$), y $f(t)$ toca los correspondientes puntos en el círculo imagen. En $t = 2\pi$, $\gamma(t)$ ha regresado a 1, pero $f(t)$ ha alcanzado la otra "raíz cuadrada", -1. En el segundo tránsito alrededor del círculo, $\gamma(t)$ retoma los puntos que tocó en el primer circuito, mientras que $f(t)$ va a través de las otras posibles raíces cuadradas en el semiplano inferior. Al final del segundo circuito $\gamma(4\pi) = 1$ y $f(4\pi) = 1$ ha regresado al valor original. (Véase la figura 6.1.16.)

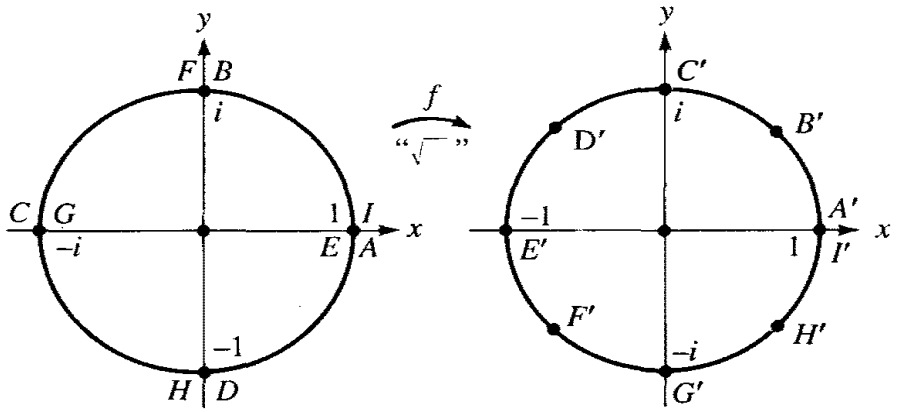


Figura 6.1.16. Siguiendo a $\sqrt{z}$ conforme uno recorre el círculo unitario.

Para funciones más complicadas como $\cos^{-1}(z)$, la superficie de Riemann se puede construir como sigue. En ciertas regiones de $\mathbf{C}$, cos z es uno a uno y definimos $\cos^{-1}(z)$ como la función inversa. Las bandas de periodicidad definidas en la sección 1.3 son ejemplos de tales regiones para e^z y log z. Tal región para cos z se ilustra en la figura 6.1.17.

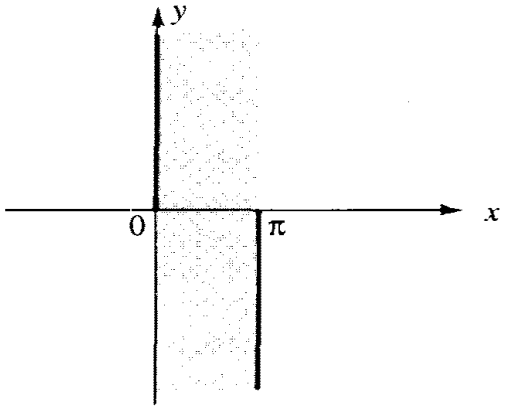


Figura 6.1.17. Una región sobre la cual cos z es uno a uno.

El interior de cada una de tales bandas es transformada conformemente sobre $\mathbf{C}$ menos las porciones $]-\infty, -1]$ y $[1, \infty[$ del eje real, con los semiplanos correspondientes a las semibandas, como se muestra en la figura 6.1.18. Cada una de esas porciones no consideradas es la imagen de dos diferentes porciones de la frontera de cada banda. Cada hoja de la superficie de Riemann es una copia de $\mathbf{C}$ cortada a lo largo de estas porciones del eje real. La superficie es entonces construida al "pegar" las hojas a lo largo de estos cortes en tal forma que los semiplanos estén unidos en la misma forma que las correspondientes semibandas preimágenes.

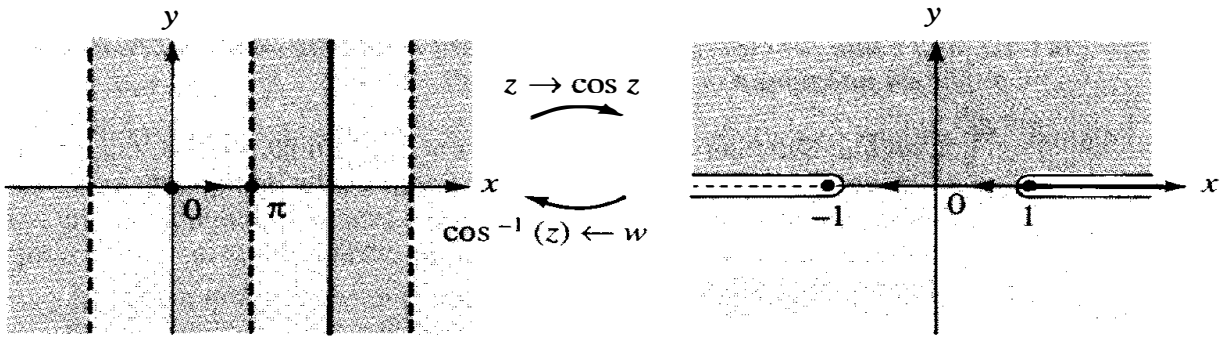


Figura 6.1.18. Construcción de la superficie de Riemann para $\cos^{-1} z$.

Una sección cruzada de la superficie sobre el círculo $C = \{z \text{ tal que } |z| = 2\}$ podría dibujarse algo así como en la figura 6.1.19. Los puntos negros en el diagrama de la derecha, indican los lugares en la superficie sobre 2 y −2, donde el círculo C cruza los cortes a lo largo de las cuales las hojas son pegadas. Para construir el modelo, uno debería enrollar el diagrama de la derecha en un cilindro que una la base y la tapa de tal forma que las marcas sobre las hojas coincidan. Entonces uno podría colocar el cilindro sobre el círculo de tal manera que las hileras de puntos negros estén sobre 2 y −2. Si seguimos una curva escogida adecuadamente que dé vuelta alrededor de 1 y −1 y que pase algunas veces entre ellos, y algunas veces sobre los cortes de rama, podemos pasar desde cualquier hoja a cualquier otra, para obtener todos los posibles valores de $\cos^{-1} z$.

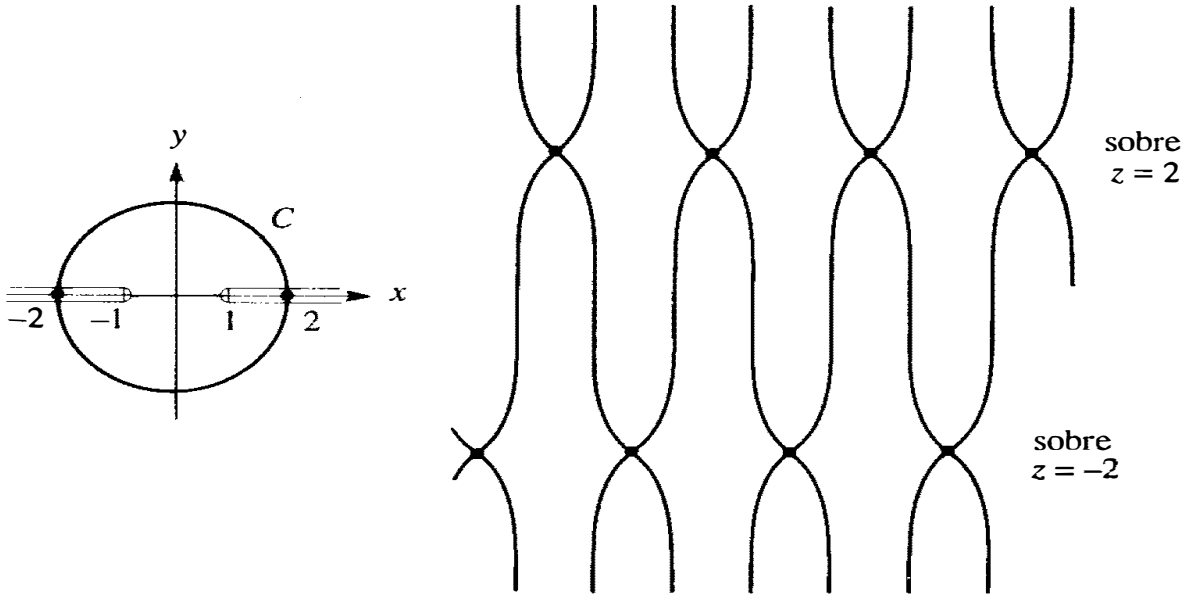


Figura 6.1.19. Sección transversal de la superficie de Riemann para $\cos^{-1} z$ sobre el círculo $|z| = 2$.

Ejemplos resueltos

6.1.10. *Sea* f *una función entera que es igual a un polinomio sobre el eje real. Muestre que* f *es un polinomio.*

Solución. Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ en [0, 1]. Entonces $f(z)$ y $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ coinciden para $z \in [0, 1]$ y ambas son analíticas en **C** (esto es, ambas son enteras). Entonces, por el teorema de identidad, son iguales en todo **C**, ya que [0, 1] contiene una sucesión convergente de puntos distintos (por ejemplo, $z_n = 1/n$). Esto demuestra la afirmación.

6.1.11. *Demuestre que si* $z_n \to 0$ *y* $z_n \neq 0$ *y si* f *está definida en una vecindad agujerada de* 0, *con* $f(z_n) = 0$, *entonces* f *tiene una singularidad no removible en* $z = 0$, *a menos que* f *sea idénticamente 0. Ilustre con* sen(1/z).

Solución. Si la singularidad de f en 0 fuera removible, entonces (por definición) podríamos definir $f(0)$ de tal manera que f fuera analítica en 0. Así, si $f(z_n) = 0$, el teorema de identidad implicaría que f es idénticamente 0. (Las z_n tienen una cantidad infinita de valores distintos —¿por qué?—.) Esto es cierto con $\text{sen}(1/z) = f(z)$, pues para $z_n = 1/\pi n, z_n \to 0$, pero $f(z_n) = 0$. Por lo tanto, la singularidad es no removible.

Podemos ir un paso más allá. Para tal f, la singularidad debe ser esencial, porque si f tuviera un polo en 0, entonces $f(z)$ se iría a infinito conforme $z \to 0$ (véase el ejercicio 7, sección 3.3).

6.1.12. *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *con un radio de convergencia* $R > 0$.

a) *¿Existe siempre una sucesión* z_n, con $|z_n - z_0| < R$ *para* $n = 1, 2, 3, , \ldots$ *y* $|z_n - z_0| \to R$, *tal que* $f(z_n) \to \infty$?

b) *¿Puede* f *ser continuada analíticamente al disco* $|z - z_0| < R + \varepsilon$ *para alguna* $\varepsilon > 0$?

Solución

a) Tal sucesión no necesariamente existe. Considere la serie $\sum_{0}^{\infty} z_n/n^2$. Por el criterio de la razón, el radio de convergencia es

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

Pero para $|z| \leq 1$, tenemos

$$\left| \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \sum_{0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum_{0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} \leq \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Así, $|f(z)|$ está acotada por $\sum_{0}^{\infty} 1/n^2$ en $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ y, por ende, es imposible que $f(z_n) \to \infty$.

b) No. Suponga que existe una función analítica g en $|z - z_0| < R + \varepsilon$ con $g(z) = f(z)$ para $|z - z_0| < R$. Ya que f y g son analíticas y coinciden en $|z - z_0| < R$, la serie de Taylor de g, $\sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, es válida para $|z - z_0| < R + \varepsilon$. Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie dada es mayor que R, lo cual es imposible (ya que es igual a R).

6.1.13. *a) Suponga que* f *está dada por la serie de potencias* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *válida para* $|z - z_0| < R$. *Muestre que si* $|z_1 - z_0| < R$, *entonces la serie de Taylor para* f *centrada en* z_1 *es* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k$, *donde* $b_k = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(k+m)!}{k!m!} a_{k+m}(z_1 - z_0)^m\right]$.

b) Trabaje con los primeros términos, empezando con la rama principal de log z en $z_0 = 1$ *y* $z_1 = (1 + i)/2$.

Solución

a) Al tomar la k-ésima derivada de la expansión en series de f alrededor de z_0, encontramos, para $|z - z_0| < R$, que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1)\cdots(m+1)a_{k+m}(z - z_0)^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{m!} a_{k+m}(z - z_0)^m$$

Así, la serie de Taylor para f alrededor de z_1 es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_1)(z - z_1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!m!} a_{k+m}(z_1 - z_0)^m\right](z - z_1)^k$$

Esto converge a $f(z)$ cuando $|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$, pero podríamos tener un radio de convergencia mayor. Si esto sucede, entonces nos da una continuación analítica de f mediante la serie de potencias.

b) La rama principal de log $(1 + w)$ para $|w| < 1$, tiene la expansión $\log(1 + w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} w^n$. Haciendo $w = z - 1$ nos da $\log z = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1}/n](z - 1)^n$, válida para $|z - 1| < 1$. Así, $a_0 = 0$ y $a_n = (-1)^{n-1}/n$ para $n > 0$. Ya que $z_1 - z_0 = (i - 1)/2$ obtenemos

$$b_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{i-1}{2}\right)^m = -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi i}{4}$$

$$b_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)!}{m!}\frac{(-1)^{m-1+1}}{m+1}\left(\frac{i-1}{2}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{2}\right)^m$$

$$= \frac{1}{1 - (1-i)/2} = 1 - i$$

y

$$b_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2)!}{2!m!}\frac{(-1)^{m+1}}{m+2}\left(\frac{i-1}{2}\right)^m = -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\left(\frac{1-i}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\left[1 - \left(\frac{1-i}{2}\right)\right]^2} = i$$

6.1.14. ***Mapeos conformes de anillos.*** *(Existe una abundante bibliografía acerca de los mapeos conformes de regiones que no son simplemente conexas, El tema es complicado ya que no hay un teorema tan amplio en alcance como el teorema del mapeo de Riemann. En algún sentido, la presencia de más de una componente de frontera, restringe tales posibles mapeos. Este ejemplo muestra cómo usar el principio de reflexión de Schwarz para estudiar la situación para un anillo.) Si* $0 < r < 1$, *sea* $A_r = \{z \mid r < |z| < 1\}$, *sea* $C_r = \{z \text{ tal que } |z| = r\}$, *y sea* $C_1 = \{z \text{ tal que } |z| = 1\}$, *así que la cerradura de* A_r es $cl(A_r) = C_r \cup A_r \cup C_1$. *Demuestre lo siguiente: Suponga* $0 < r < 1$ *y* $0 < R < 1$ *y que* f *es un mapeo analítico uno a uno y sobre, de* A_r *en* A_R, *el cual extiende a un mapeo continuo, uno a uno y sobre, de* $cl(A_r)$ *sobre* $cl(A_R)$. *Entonces* $r = R$ *y* f *debe ser de uno de estos dos tipos:* (i) *una rotación, donde existe una constante real* θ *tal que* $f(z) = e^{i\theta}z$ *para toda* z *en* A_r; *o* (ii) *una rotación e inversión, donde existe una constante real* θ *tal que* $f(z) = re^{i\theta}/z$ *para toda* z *en* A_r.

Solución. f debe transformar a C_1 en C_1 y a C_r en C_R, o intercambiar los círculos exteriores e interiores. Si lo último ocurre, entonces $f(r/z)$ es otro mapeo de A_r sobre A_R, el cual no los intercambia. Así, debemos asumir que f manda a C_1 en C_1 y a C_r en C_R continuamente. El principio extendido de reflexión de Schwarz (6.1.5) muestra cómo continuar a f analíticamente a un mapeo de un anillo mayor A_{r^2} sobre A_{R^2}, así que la continuación es otra vez continua en la frontera y manda a C_{r^2} en C_{R^2}. Este proceso puede repetirse indefinidamente hasta extender f a una sucesión creciente de anillos.

$$A_r \subset A_{r^2} \subset A_{r^4} \subset \cdots$$

que son transformados respectivamente sobre

$$A_R \subset A_{R^2} \subset A_{R^4} \subset \cdots$$

(Véase la figura 6.1.20.) Cada extensión transforma a $C_{r^{2n}}$ en $C_{R^{2n}}$ y a los anillos entre ellos en forma correspondiente. Ya que $R^{2n} \to 0$ conforme $n \to \infty$, $\lim_{z \to 0} f(z) = 0$. Así $z = 0$ es una singularidad removible y al hacer $f(0) = 0$ sirve para completar la extensión de f a una función analítica del disco $D = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ en sí mismo, con $f(0) = 0$. La función extendida satisface las condiciones del lema de Schwarz y, por lo tanto, $|f(z)| \leq |z|$ para toda z. Puesto que C_r va a C_R, esto obliga a que $R \leq r$. Este procedimiento pudo también haber sido aplicado a f^{-1}, la cual manda a A_R en A_r. Esto daría $r \leq R$ y, por lo tanto, $r = R$. Finalmente, esto muestra que $|f(z)| = |z|$ en cada uno de los círculos $C_{r^{2n}}$, así que f debe ser una rotación, por el lema de Schwarz.

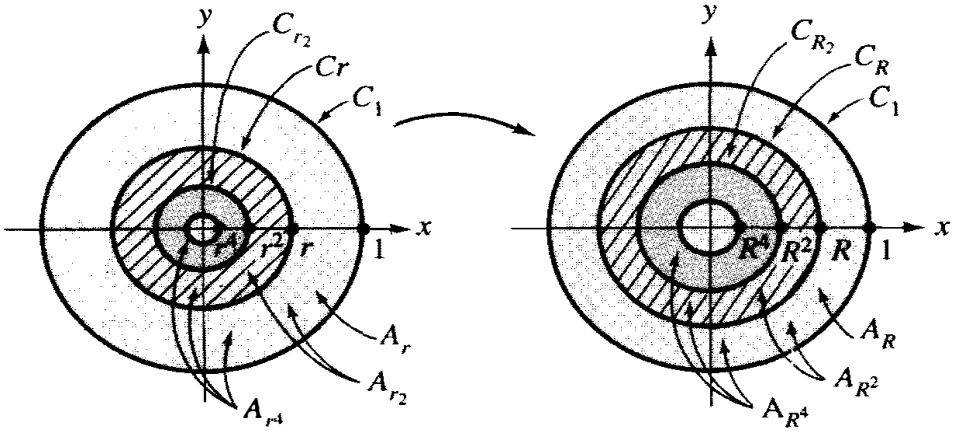


Figura 6.1.20. Mapeos conformes de anillos.

Ejercicios

1. *a*) Sea $f(z) = e^{1/z} - 1$. Si $z_n = 1/2\pi ni$, entonces $z_n \to 0$ y $f(z_n) = 0$, pero f no es idénticamente 0. ¿Contradice esto el teorema de identidad? ¿Por qué si o por qué no?
   b) ¿Es cierto el teorema de identidad para funciones armónicas?
2. Sea $h(x)$ una función de variable real $x \in \mathbf{R}$. Suponga que $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la cual converge para x en algún intervalo $]-\eta, \eta[$ alrededor de 0. Demuestre que h es la restricción de alguna función analítica definida en una vecindad de 0.
3. Sea f analítica en una región A y sean $z_1, z_2 \in A$. Sea $f'(z_1) \neq 0$. Muestre que f no es constante en una vecindad de z_2.
4. Sea f analítica y no idénticamente 0 en A. Muestre que si $f(z_0) = 0$, existe un entero k tal que $f(z_0) = 0 = \cdots = f^{(k-1)}(z_0)$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
5. Demuestre el siguiente resultado de Karl Weierstrass. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ Entonces f no puede ser continuada analíticamente a *ningún* conjunto abierto que contenga propiamente a $A = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$. (*Sugerencia*: considere primero $z = re^{2\pi ip/q}$, donde p y q son enteros.)
6. Formule un principio de reflexión de Schwarz para funciones armónicas.
7. Suponga que f puede ser continuada analíticamente a lo largo de una curva γ en la manera mostrada en la figura 6.1.21. Muestre que f puede ser continuada mediante series de potencias (en un número finito de pasos).

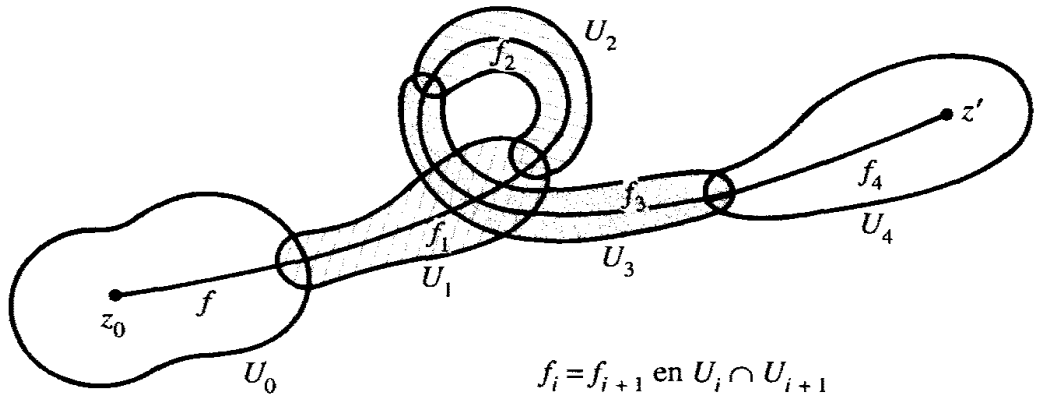


Figura 6.1.21. Continuación analítica de f a lo largo de una curva desde z_0 hasta z'.

8. Discuta la superficie de Riemann para $\sqrt{z^2 - 1}$.
9. Discuta la superficie de Riemann para $\sqrt[3]{z}$.
10. Discuta la relación entre la proposición 2.2.6 y el teorema de monodromía.
11. Considere la serie de potencias $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n z^n$ definida en $|z| < 1$. ¿Para qué dominio en $\mathbf{C}$ puede usted continuar analíticamente esta función?
12. Muestre que si f es un mapeo analítico, uno a uno y sobre de $\{z \mid r_1 < |z| < R_1\}$ en $\{z \mid r_2 < |z| < R_2\}$, el cual se extiende a un mapeo continuo, uno a uno y sobre de $\{z \mid r_1 \leq |z| \leq R_1\}$ en $\{z \mid r_2 \leq |z| \leq R_2\}$, entonces $R_1/r_1 = R_2/r_2$. Dé una descripción de tales funciones.
13. Sea A una región, sea $f: A \to \mathbf{C}$, y sea $\gamma:]a, b[\to A$ una curva suave sin autointersecciones, con $\gamma'(t) \neq 0$. Asuma que f es continua en A y analítica en $A \backslash \gamma$.

    a) Muestre que f es analítica.

    b) Utilice *a*) para demostrar el principio de reflexión de Schwarz.

6.2. EL TEOREMA DE ROUCHÉ Y EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

En esta sección desarrollamos algunas propiedades de las funciones analíticas que serán usadas para localizar raíces de ecuaciones dentro de curvas. La herramienta principal será el teorema del residuo.

Una fórmula para el conteo de raíces y polos

Los principales resultados de esta sección serán los mencionados en el título. Es conveniente empezar con una fórmula que cuente las raíces de una ecuación en el interior de una curva cerrada. Se dará una versión más intuitiva como corolario de la siguiente versión precisa.

Teorema del conteo de raíces y polos 6.2.1. *Sea* f *analítica en una región* A *excepto para los polos en* $b_1, \ldots, b_m$ *y ceros en* $a_1, \ldots, a_n$, *contados con su multiplicidad (esto es, si* b_1 *es un polo de orden* k, b_1 *será repetido* k *veces en la lista y similarmente para los ceros* a_j). *Sea* γ *una curva cerrada homotópica a un punto en* A *y que no pasa a través de ninguno de los puntos* a_j *o* b_1. *Entonces*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^{m} I(\gamma, b_l)\right] \tag{1}$$

NOTA. La ecuación (1) se aplica en particular a *funciones meromorfas*, esto es, a funciones definidas en $\mathbf{C}$ excepto para los polos (véase la sección 3.3). Puede haber únicamente un número finito de polos en cualquier región acotada, ya que los polos son aislados.

Demostración. Primero, es claro que $f'(z)/f(z) = g(z)$ es analítica excepto en $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Si f tiene un cero de orden k en a_j, f' tiene un 0 de orden $k-1$ y, por lo tanto, $f'/f = g$ tiene un polo simple en a_j y el residuo es k. Esto se debe a que podemos escribir $f(z) = (z-a_j)^k\phi(z)$, como se muestra en la sección 3.2, donde ϕ es analítica y $\phi(a_j) \neq 0$; por lo tanto,

$$g(z) = \frac{k(z-a_j)^{k-1}\phi(z)}{(z-a_j)^k\phi(z)} + \frac{(z-a_j)^k\phi'(z)}{(z-a_j)^k\phi(z)} = \frac{k}{z-a_j} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

En consecuencia, el residuo en a_j es claramente k. Similarmente, si b_l es un polo de orden k, podemos escribir, cerca de b_l,

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-b_l)^k}$$

donde ϕ es analítica y $\phi(b_l) \neq 0$ (véase la proposición 3.3.4 (iv)). Entonces, vemos que, como anteriormente, cerca de b_l,

$$g(z) = \frac{-k}{z - b_l} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

así que el residuo es $-k$.

Por el teorema del residuo,

$$\int_\gamma g(z)dz = 2\pi i \left\{ \sum_j{}' \, [\text{Res}\,(g, a_j)] I(\gamma, a_j) + \sum_l{}' [\text{Res}\,(g, b_l] I(\gamma, b_l) \right\}$$

donde Σ' significa la suma sobre los distintos puntos. Pero ya que el residuo es igual al número de veces que a_j ocurre y a menos ese número para b_l, esta expresión resulta

$$2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^{n} I(\gamma, b_l) \right]$$

como se quería. ■

La fórmula en el último teorema puede ser mejor entendida para una curva cerrada simple, cuando puede ser usada para contar ceros y polos.

Corolario 6.2.2. *Sea* γ *una curva cerrada simple*:

(i) *Si* f *es analítica en un conjunto abierto que contiene a* γ *y a su interior, excepto para una cantidad finita de ceros y polos, ninguno de los cuales está en* γ, *entonces*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i (Z_f - P_f) \tag{2}$$

donde Z_f *es el número de ceros dentro de* γ *y* P_f *es el número de polos dentro de* γ, *cada uno contado con su multiplicidad (orden).*

(ii) **Fórmula para el conteo de raíces:** *Si* f *es analítica en un conjunto abierto que contiene a* γ *y a su interior y* f(z) *nunca es igual a* w *en* γ, *entonces*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = 2\pi i N_w$$

donde N_w *es el número de raíces de la ecuación* f(z) = w *dentro de* γ *contada con su multiplicidad como ceros de* f(z) − w.

Demostración. Puesto que γ es simple, el índice de γ con respecto de a_j es 1, si a_j está dentro de γ y es 0 si está fuera. El teorema 6.2.1 da así la parte (i). La parte (ii) se sigue al aplicar la parte (i) a $g(z) = f(z) - w$. ■

Principio del argumento

Consideramos ahora una útil consecuencia del teorema del conteo de raíces y polos. Para una curva cerrada γ y z_0 que no está sobre γ, podemos legítimamente decir que el cambio en el argumento de $z - z_0$ conforme z corre γ es $2\pi \cdot I(\gamma, z_0)$. Ésta es en verdad la base intuitiva sobre la que se desarrolló el índice; esto se escribe como $\Delta_\gamma \arg(z - z_0) = 2\pi \cdot I(\gamma, z_0)$ (véase la figura 6.2.1).

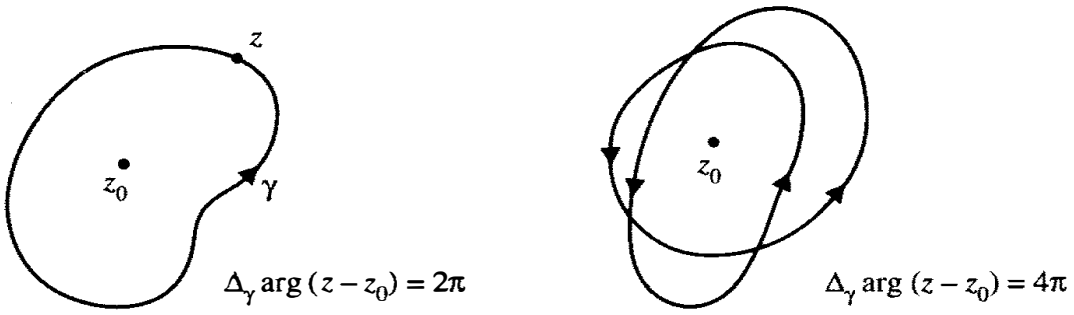


Figura 6.2.1. Cambio en el argumento de $z - z_0$ cuando se recorren las dos curvas.

Enseguida queremos definir $\Delta_\gamma \arg f$, esto es, el cambio en el $\arg f(z)$ conforme z rodea una vez a γ. Intuitivamente y para los cálculos prácticos, el significado es claro, únicamente calculamos $\arg f(\gamma(t))$ y hacemos correr a t desde a hasta b si γ; $[a, b] \to \mathbf{C}$, luego observamos la diferencia $\arg f(\gamma(b)) - \arg f(\gamma(a))$. Escogemos una rama del argumento tal que $\arg f(\gamma(t))$ varíe continuamente con t. Equivalentemente, al cambiar las variables, podemos hacer $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ y calcular $\Delta_{\tilde{\gamma}} \arg z$. Esto conduce a la formulación de la siguiente definición.

Definición 6.2.3. *Sea* f *analítica en una región* A *y sea* γ *una curva cerrada en* A. *homotópica a un punto y sin pasar por ningún cero de* f. *Entonces, definimos*

$$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi \cdot I(f \circ \gamma, 0)$$

(*El índice tiene sentido porque* 0 *no está en* $f \circ \gamma$.)

En los ejemplos, podemos hacer uso de nuestra previa intuición acerca del índice, para calcular $\Delta_\gamma \arg f$. El principio del argumento es como sigue.

Principio del argumento 6.2.4. *Sea* f *analítica en una región* A *excepto para los polos en* $b_1, \ldots, b_m$ *y ceros en* $a_1, \ldots, a_n$ *contados de acuerdo a sus multiplicidades. Sea* γ *una curva cerrada homotópica a un punto y sin pasar a través de* a_j *o de* b_1. *Entonces*

$$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi \left[\sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^{m} I(\gamma, b_l) \right] \tag{3}$$

Demostración. Por el teorema del conteo de polos y raíces, es suficiente mostrar que

$$i\,\Delta_\gamma \arg f = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \tag{4}$$

puesto que f no tiene polos o ceros en γ. En efecto,

$$i\,\Delta_\gamma \arg f = 2\pi i \cdot I(f\circ\gamma, 0) = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z}$$

por la fórmula para el índice (véase la sección 2.4). Al tomar γ: $[a, b] \to \mathbf{C}$, tenemos

$$\int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \int_a^b \frac{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\,dt = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,dt$$

por la definición de integral y por la regla de la cadena. La última integral es igual a $\int_\gamma [f'(z)/f(z)]\,dz$, por definición. (Si γ es únicamente C^1 a trozos, esto se cumple sólo en cada intervalo donde γ' existe, pero obtenemos el resultado por adición.) ■

La ecuación (3) se aplica usualmente al caso donde γ es una curva cerrada *simple.* Entonces podemos concluir que *el cambio en el* arg f(z), *conforme recorremos una vez* γ (*en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj*), *es* $2\pi(Z_f - P_f)$, *donde* Z_f (*o* P_f) *es el número de ceros* (*o polos*) *dentro de* γ, *contados con sus multiplicidades.* A priori, es un tanto sorprendente que $Z_f - P_f$ y el cambio en el argumento de f estén relacionados.

Esto puede sonar familiar al lector alerta que recuerde un truco del cálculo, llamado diferenciación logarítmica. Si γ es un pequeño fragmento de una curva lo suficientemente corta para que $f(\gamma)$ sea un segmento de curva que esté en un semiplano, como en la figura 6.2.2, podemos definir una rama del logaritmo con el corte de rama alejándose del semiplano, mediante una elección apropiada del ángulo de referencia, al definir el arg z. Entonces

$$\frac{d}{dz}[\log f(z)] = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad \text{a lo largo de } \gamma$$

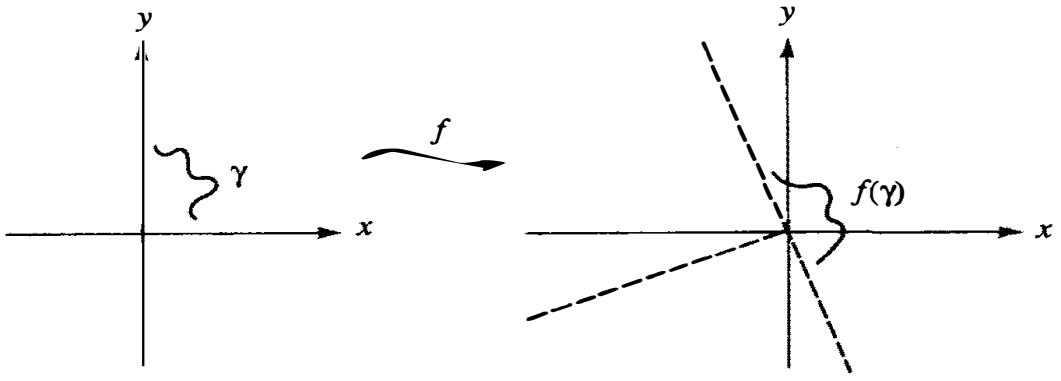


Figura 6.2.2. La diferenciación logarítmica y el principio del argumento.

y, por lo tanto,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \Delta \log f(z) = \Delta \log |f(z)| + i\,\Delta \arg f(z)$$

Para una curva cerrada γ, podemos hacer esto a lo largo de partes cortas y sucesivas de la curva, usando una elección apropiada del logaritmo para cada una de ellas. Cuando regresamos al punto inicial, las contribuciones para $\Delta \log |f(z)|$ tendrán que ser todas canceladas, pero no aquellas para $\Delta \arg f(z)$, puesto que hemos estado cambiando la determinación del argumento.

Teorema de Rouché

Se puede utilizar el principio del argumento para demostrar un teorema muy útil que tiene varias aplicaciones, algunas de las cuales se darán en el resto de este capítulo.

Teorema de Rouché 6.2.5. *Sean* f *y* g *analíticas en una región* A *excepto para un número finito de ceros y polos en* A. *Sea* γ *una curva cerrada en* A *homotópica a un punto y que no pasa a través de ningún cero o polo de* f *o de* g. *Suponga que, en* γ

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

Entonces: (i) $\Delta_\gamma \arg f = \Delta_\gamma \arg g$; y (ii) $Z_f - P_f = Z_g - P_g$, *donde* $Z_f = \sum_{j=1}^{n} I(\gamma, a_j)$, a_j *son los de ceros de* f, *contados con su multiplicidad, y* P_f, Z_g, P_g *están definidos similarmente.*

Demostración. Ya que f y g no tienen ceros en γ, podemos escribir nuestra suposición como

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < 1 \quad \text{sobre } \gamma$$

Así, $g(z)/f(z) = h(z)$ transforma a γ sobre el círculo unitario centrado en 1 (véase la figura 6.2.3). Por lo tanto, $I(h \circ \gamma, 0) = 0$, ya que $h \circ \gamma$ es homotópica a 1 en ese disco

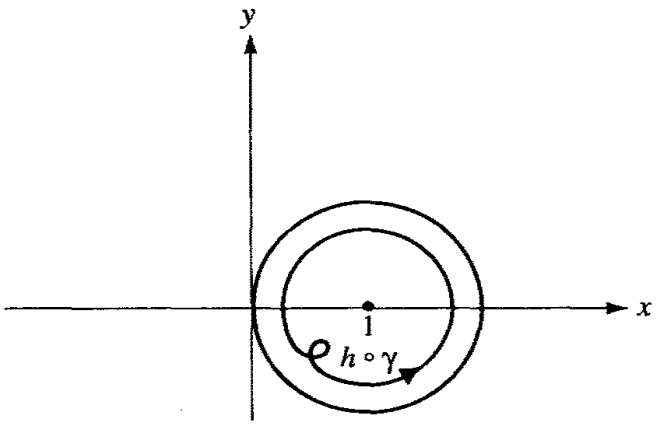


Figura 6.2.3. La imagen de γ bajo h.

(el cual no contiene a 0). Por la ecuación (4), aplicada a h y la definición de $\Delta_\gamma \arg h$, obtenemos

$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz = 0$$

Pero

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}$$

y en consecuencia

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

Por lo tanto, el resultado se sigue del teorema del conteo de polos y raíces, y el principio del argumento. ■

Un importante caso especial del teorema de Rouché es el siguiente. *Sea* γ *una curva cerrada simple y sean* f *y* g *analíticas en el interior y sobre* γ, *con* γ *sin pasar por los ceros de* f *o de* g; *suponga que* $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ *sobre* γ. *Entonces* f *y* g *tienen el mismo número de ceros en el interior de* g. Note que si $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ sobre γ, entonces, automáticamente γ no puede pasar por los ceros de f o de g (¿por qué?).

El teorema de Rouché se puede utilizar para localizar los ceros de un polinomio. Se da una ilustración en el ejemplo resuelto 6.2.11. El teorema de Rouché se puede usar también para dar una simple demostración del teorema fundamental del álgebra, incluyendo el hecho de que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (véase el ejercicio 9).

Teorema de Hurwitz

Una de las aplicaciones teóricas del teorema de Rouché es el siguiente resultado de Hurwitz.

Teorema de Hurwitz 6.2.6. *Sea* f_n *una sucesión de funciones analíticas en una región* A, *que convergen uniformemente a* f *en cualquier disco cerrado en* A. *Asuma que* f *no es idénticamente cero, y sea* $z_0 \in$ A. *Entonces* $f(z_0) = 0$ *si existe una sucesión* $z_n \to z_0$ *y existe un entero* N *tal que* $f_n(z_n) = 0$ *siempre que* $n \geq N$ (*esto es, un cero de* f *es un límite de ceros de las funciones* f_n).

El teorema se seguirá de la siguiente proposición.

Proposición 6.2.7. *Sea* f_n *una sucesión de funciones analíticas en una región* A, *la cual converge uniformemente a* f *en cualquier disco cerrado en* A. *Asuma que* f *no*

es idénticamente cero y que γ *es una curva cerrada simple que junto con su interior está contenida en* A *y que no pasa por los ceros de* f. *Entonces existe un entero* $N(\gamma)$ *tal que cada* f_n, *con* $n \geq N(\gamma)$, *tiene el mismo número de ceros dentro de* γ *que* f (*contados de acuerdo a sus multiplicidades*).

Demostración. Ya que $|f|$ es continua y nunca es cero en el conjunto compacto γ, tiene un mínimo m, distinto de cero, sobre γ; digamos que $|f(z)| \geq m > 0$ para toda z en γ. La curva es cubierta por un número finito de discos cerrados y, por lo tanto, la convergencia de f_n a f, es uniforme sobre γ. De acuerdo con esto, existe un entero $N(\gamma)$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < m \leq f(z)$ para toda z en γ siempre que $n \geq N(\gamma)$. Podemos aplicar el teorema de Rouché y concluir que f_n y f tienen el mismo número de ceros dentro de γ, como se quería. (Note que f es analítica en A, por el teorema de convergencia analítica (3.1.8).) ■

Demostración del teorema 6.2.6. Otra vez, f es analítica en A por el teorema de convergencia analítica (3.1.8). Suponga que $f(z_0) = 0$. Ya que f no es idénticamente 0, los ceros son aislados, por el teorema de identidad. Existe un número $\delta > 0$ tal que $f(z)$ nunca es 0 en la vecindad agujerada $\{z \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$. Para cada entero positivo k, sea γ_k el círculo $\{z \text{ tal que } |z - z_0| = \delta/k\}$. Tome N_k como $N(\gamma_k)$, por la proposición 6.2.7. Entonces $n \geq N_k$ implica que f_n tiene al menos un cero z_n dentro de γ_k. Esto es, $f_n(z_n) = 0$. Para $n \geq N_k$, tenemos $|z_n - z_0| < \delta/k$. Esto demuestra el teorema con $N = N_1$ siempre y cuando nos aseguremos de haber escogido la z_n dentro de γ_k tan pronto como $n \geq N_k$ garantice su disponibilidad. ■

Debemos asumir que f no es idénticamente cero. Considere, por ejemplo, la función $f_n(z) = e^z/n$, la cual se aproxima uniformemente a cero en los discos cerrados (¿por qué?) pero para la cual f_n no tiene ceros.

Corolario 6.2.8. *Sea* f_n *una sucesión de funciones analíticas en una región* A, *la cual converge uniformemente a* f *en los discos cerrados en* A. *Si cada* f_n *es uno a uno en* A *y* f *no es constante, entonces* f *es uno a uno en* A.

Demostración. Suponga que a y b están en A y que $f(a) = f(b)$. Queremos mostrar que $a = b$. Considere $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$ y $g(z) = f(z) - f(a)$. Entonces $g_n \to g$ uniformemente en los discos cerrados en A y $g(b) = 0$. Puesto que g no es idénticamente 0, el teorema de Hurwitz dice que existe una sucesión $z_n \to b$ con $g_n(z_n) = 0$. Esto es, $f_n(z_n) = f_n(a)$. Pero f_n es uno a uno y, por lo tanto, $z_n = a$. Ya que $z_n \to b$, debemos tener $a = b$, como se quería. ■

Es perfectamente posible para funciones uno a uno, converger uniformemente en discos a una fución constante. Por ejemplo, las funciones $f_n(z) = z/n$ convergen uniformemente en el disco unitario a la función constante $f(z) = 0$.

Funciones uno a uno

Las funciones analíticas que son uno a uno, encuentran muchas aplicaciones útiles. El término función *simple* (*schlicht*) es usado a menudo. Vamos ahora a re-

lacionar las funciones uno a uno con el teorema del mapeo inverso. Otra vez, el teorema de Rouché es la herramienta adecuada.

Proposición 6.2.9. *Si* $f : A \to \mathbf{C}$ *es analítica y uno a uno arbitrariamente, entonces* $f'(z_0) \neq 0$ para toda $z_0 \in A$. *Se sigue, por el teorema de la función inversa, que* $f(A)$ *es abierto y si* f *es uno a uno globalmente, que* f^{-1} *es analítica de* $f(A)$ *en* A.

Demostración. Suponga que, por el contrario, para algún punto z_0 tenemos $f'(z_0) = 0$. Entonces $f(z) - f(z_0)$ tiene un cero de orden $k \geq 2$ en z_0. Ahora bien, f no es constante y, por lo tanto, los ceros de f' son aislados. En consecuencia, existe una $\delta > 0$ una $m > 0$ tal que en el círculo $|z - z_0| = \delta$, $|f(z) - f(z_0)| \geq m > 0$ y $f'(z) \neq 0$ para $0 < |z - z_0| \leq \delta$. Para $0 < \eta < m$, concluimos que $f(z) - f(z_0) - \eta$ tiene k ceros dentro de $|z - z_0| = \delta$, por el teorema de Rouché. Un cero no puede ser un doble cero, ya que $f'(z) \neq 0$ para $|z - z_0| \leq \delta$, $z \neq z_0$. Así, $f(z) = f(z_0) + \eta$ para dos puntos distintos z y, por lo tanto, no es uno a uno. Esta contradicción significa que $f'(z_0) \neq 0$, como queríamos demostrar. ■

Otra propiedad básica de las funciones uno a uno es la siguiente:

Teorema de la función uno a uno 6.2.10. *Sea* f *analítica en una región* A *y sea* γ *una curva cerrada homotópica a un punto en* A. *Suponga que* $I(\gamma, z) = 0$ o 1. *Defina el conjunto* $B = \{z \in A | I(\gamma, z) \neq 0\}$ (*el "interior" de* γ). *Si* f *es tal que cada punto de* $f(B)$ *tiene índice* 1 *con respecto a la curva* $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, *entonces* f *es uno a uno en* B.

Demostración. Considere, para $z_0 \in B$ y $w_0 = f(z_0)$,

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz$$

Por el corolario 6.2.2, N es igual al número de veces que $f(z) = w_0$ en B. Debemos entonces mostrar que es igual a 1. Haciendo $\tilde{\gamma} = f \circ g$, concluimos, como en el principio del argumento, que

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z - w_0}\, dz$$

el cual es el índice de w_0 con respecto de $\tilde{\gamma}$. Así, $N = 1$ y, por lo tanto, $f(z) = w_0$ tiene exactamente una solución, $z = z_0$. Esto significa que f es uno a uno. ■

El teorema de la función uno a uno resulta más intuitivo si usamos el teorema de la curva de Jordan. Sea γ una curva cerrada simple y sea B su interior. Suponga que el conjunto $f(B)$ está acotado por la curva $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Las hipótesis del teorema de la función uno a uno se cumplirán si $\tilde{\gamma}$ es una curva cerrada simple (ya que esto significa que f debe ser uno a uno sobre γ). Por lo tanto, el resultado puede ser reformulado como sigue: *Para ver si una función analítica es uno a uno en una región, es suficiente con verificar que es uno a uno en la frontera.*

Ejemplos resueltos

6.2.11. *Utilice el teorema de Rouché para determinar los cuadrantes en los cuales están los ceros de* $z^4 + iz^2 + 2$ *y el número de ceros que están dentro de los círculos de radio varían.*

Solución. Sea $g(z) = z^4, f(z) = z^4 + iz^2 + 2$, y observe que

$$|f(z) - g(z)| = |iz^2 + 2| \leq |z|^2 + 2$$

y que

$$|g(z)| = |z|^4$$

Por lo tanto, si $r = |z| > \sqrt{2}$, tenemos

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

Puesto que g no se anula en ningún círculo de radio positivo, la desigualdad precedente muestra que f no se anula en círculos con radio $> \sqrt{2}$. El teorema de Rouché muestra entonces que las cuatro raíces de f están dentro de estos círculos, esto es, dentro del disco cerrado $|z| \leq \sqrt{2}$.

Enseguida, sea $h(z) = z^4 + 2iz^2 = z^2(z^2 + 2i)$. Claramente, h tiene una doble raíz en 0 y dos raíces adicionales sobre el círculo $|z| = \sqrt{2}$. Más aún

$$|f(z) - h(z)| = |-iz^2 + 2| = |z^2 + 2i| = \frac{|h(z)|}{|z|^2}$$

Para cualquier elección de r, con $1 < r < \sqrt{2}$, h y, por lo tanto, f, no se anulan en el círculo $|z| = r$ y $|f(z) - h(z)| < |h(z)|$. El teorema de Rouché muestra que f tiene precisamente dos ceros en $|z| < r$ para cualesquiera de estos valores de r. Haciendo que r se aproxime a 1 y a $\sqrt{2}$, vemos que f tiene dos raíces en el disco cerrado $|z| \leq 1$ y dos raíces sobre el círculo $|z| = \sqrt{2}$.

Finalmente, sea $k(z) = 2$. Entonces

$$|f(z) - k(z)| = |z^4 + iz^2| \leq |z|^4 + |z|^2 < 2 = |k(z)|$$

siempre que $|z| < 1$. Argumentando como antes, para cualquier r, con $0 < r < 1$, k y, por lo tanto, f, no se anulan en $|z| < r$. Combinando estos tres resultados, encontramos que f tiene dos ceros sobre $|z| = 1$ y dos sobre $|z| = \sqrt{2}$.

Regresemos ahora al análisis de los cuadrantes sobre los cuales están las raíces. Para z real o puramente imaginario, $f(z) = z^4 + iz^2 + 2$ tiene una parte imaginaria distinta de cero, a menos que $z = 0$. Así, f no tiene raíces sobre los ejes. Considere un cuarto de círculo grande, como se muestra en la figura 6.2.4. Vamos a calcular $\Delta_\gamma \arg(z^4 + iz^2 + 2)$ y a usar el principio del argumento. A lo largo del eje x, z

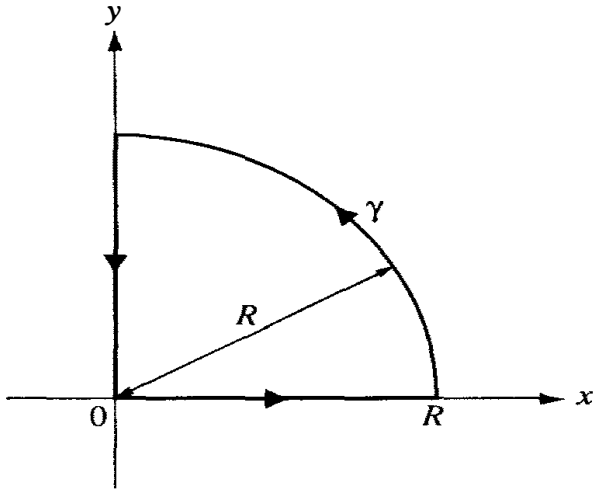


Figura 6.2.4. La curva γ utilizada para localizar los cuadrantes en que están los ceros del polinomio $z^4 + iz^2 + 2$.

es real y $f(z)$ está en el primer cuadrante. También $f(0) = 2$ y, conforme $R \to \infty$, arg $f(R) \to 0$, ya que

$$\arg f(R) = \arg R^4\left(1 + \frac{i}{R^2} + \frac{2}{R^4}\right) = \arg\left(1 + \frac{i}{R^2} + \frac{2}{R^4}\right)$$

tiende a 0 conforme $R \to \infty$. Puesto que f toma sus valores en el primer cuadrante, concluimos que el cambio en el argumento es cero conforme z se mueve desde 0 hasta ∞. A lo largo de la porción curveada de γ, z^4 claramente cambia de argumento por 2π $(= 4 \times \pi/2)$. Conforme $R \to \infty$, 2π es el límite en el cambio del argumento para $f(z)$ también, como vemos al escribir

$$f(z) = z^4\left(1 + \frac{i}{z^2} + \frac{2}{z^4}\right)$$

Similarmente, al bajar por el eje imaginario, en el límite cuando R crece, no hay cambio en el argumento de f. (Si $f(0)$ no fuera real, este esquema daría aun el comportamiento en el límite del argumento en el infinito y el valor en cero, y así el cambio en el argumento se puede inferir al menos hasta un múltiplo de 2π.)

Concluimos que el cambio en el argumento, conforme recorremos γ, es 2π. Por el principio del argumento, hay exactamente un cero en el primer cuadrante. Por inspección, $f(z) = f(-z)$, así que $-z$ es una raíz cuando z lo es. Por lo tanto, debe haber una raíz en cada cuadrante. En consecuencia, debemos tener una de las dos posibilidades mostradas en la figura 6.2.5. Los métodos utilizados aquí no nos permiten decir realmente cuál de estas posibilidades ocurre sin un análisis más detallado. Podemos comprobar este ejemplo al encontrar las raíces directamente usando la fórmula cuadrática dos veces; sin embargo, en otros ejemplos el cálculo directo puede ser imposible o impráctico, mientras que los métodos descritos aquí pueden ser usados.

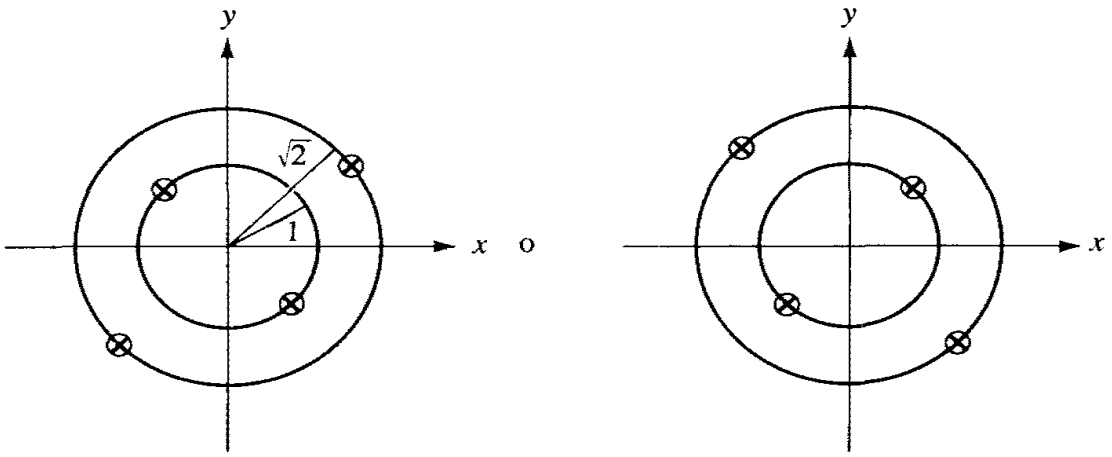


Figura 6.2.5. Localización de las raíces del polinomio $z^4 + iz^2 + 2$.

6.2.12. *Si* a > e, *muestre que la ecuación* $e^z = az^n$ *tiene* n *soluciones dentro del círculo unitario.*

Solución. Sea $f(z) = e^z - az^n$ y sea $g(z) = -az^n$. Entonces g tiene exactamente n raíces. Vamos a probar que f y g tienen el mismo número de raíces dentro del círculo unitario $|z| = 1$. Para hacer esto debemos mostrar que

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

para $|z| = 1$. Pero

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^x \leq e$$

ya que $|x| \leq 1$. También $|g(z)| = |az^n| = a > e$ y, por lo tanto, el resultado se sigue del teorema de Rouché.

6.2.13. *Sea* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Suponga que* $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. *Demuestre que* f es *uno a uno en el disco unitario* $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ si $\sum_{l=2}^{\infty} l\,|a_l| \leq 1$.

Solución. La serie de f converge para $|z| < 1$ ya que, como una consecuencia de $\sum_{l=2}^{\infty} l|a_l| \leq 1$, obtenemos $|a_n| \leq 1$, así $|a_n z^n| \leq |z|^n$, y sabemos que $\Sigma |z|^n$ converge para $|z| < 1$. Por lo tanto, f es analítica en $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$.

Sea $|z_0| < 1$. Queremos mostrar que $f(z) = f(z_0)$ tiene exactamente una solución, z_0. Sea $g(z) = z - z_0$, la cual tiene exactamente una raíz. Si hacemos $h(z) = f(z) - f(z_0)$, entonces

$$h(z) - g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z_0^n$$

Para estimar esto, podemos usar el siguiente truco. Sea $\phi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Entonces

$$|\phi(z) - \phi(z_0)| \leq [\text{máx}|\phi'(\zeta)|] \cdot |z - z_0|$$

donde el máximo es sobre todas aquellas ζ sobre la línea que une z_0 con z (¿por qué?). Sin embargo, $|\phi'(\zeta)| = |\sum_{n=2}^{\infty} n a_n \zeta^{n-1}| < \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$, ya que $|\zeta| < 1$. Por lo tanto,

$$|h(z) - g(z)| = |\phi(z) - \phi(z_0)| < |z - z_0| = |g(z)|$$

Así, por el teorema de Rouché, $h(z) = f(z) - f(z_0)$ tiene exactamente una solución, a saber, $z = z_0$; esto demuestra la afirmación.

6.2.14. *Utilice el teorema de Rouché para demostrar que las raíces de un polinomio de grado* n (*las raíces son contadas con sus multiplicidades*) *dependen continuamente de los coeficientes del polinomio.*

Solución. Aquí, parte del problema es establecer precisamente lo que quiere decir la pregunta. Suponga que el polinomio es $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ con $a_n \neq 0$, y los ceros son $w_1, w_2, \ldots, w_n$. (Algunos de éstos podrían ser el mismo.) Después de normalizar dividiendo entre a_n, ciertamente los coeficientes dependen continuamente de las raíces. De hecho, éstas son expresiones polinómicas de las w_j'. Simplemente multiplicamos por $p(z)/a_n = (z - w_1)(z - w_2) \ldots (z - w_n)$ para obtener $a_{n-1}/a_n = -(w_1 + w_2 + \cdots + w_n)$, etcétera. Nuestro problema presente está en otra dirección. Se puede pensar como un problema de *estabilidad.* Si la ecuación es cambiada ligeramente al cambiar los coeficientes. ¿Podemos concluir que las soluciones no cambian mucho? Tales preguntas pueden ser importantes, por ejemplo, se pueden conocer los coeficientes, sólo aproximadamente. Éstos podrían estimarse por experimentación y estar sujetos a algún error experimental o ser conocidos dentro de un intervalo de confianza estadística. ¿Un pequeño error en las medidas puede causar un error muy grande en las soluciones? Este ejemplo dice que en algún sentido la respuesta es no. Aquí está una posible formulación.

Proposición. *Suponga que* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *con* $a_n \neq 0$ *tiene ceros en* $w_1, w_2, \ldots, w_k$ *con multiplicidades* $n_1, n_2, \ldots n_k$, *y que* ε *es un número positivo menor que la mitad de la mínima distancia entre los puntos* w_j. *Entonces, existe un número* $\delta > 0$ *tal que el polinomio* $q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$ *tiene exactamente* n_j *ceros* (*contados con sus multiplicidades*) *en el disco* $D(w_j; \varepsilon)$ *para cada* $j = 1, 2, \ldots, k$ *siempre que* $|b_m - a_m| \leq \delta$ *para cada* $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Sea γ_i el círculo $\{z$ tal que $|z - w_j| = \varepsilon\}$. Entonces $|p(z)|$ nunca es 0 en $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k$, y ya que es continua, tiene un mínimo A distinto de cero en este conjunto compacto. Sea $M = \max(|w_1|, \ldots, |w_k|) + \varepsilon$ y escoja $\delta < A/(2\sum_{m=0}^{n} M^m)$. Entonces, si $|b_m - a_m| \leq \delta$ para toda m, y z está en $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k$, tenemos

$$|p(z) - q(z)| \leq \sum_{m=0}^{n} |a_m - b_m| \cdot |z|^m \leq \sum_{m=0}^{n} \delta M^m < A \leq |p(z)|$$

Por ende, el teorema de Rouché muestra que el número de ceros de q dentro de γ_j es el mismo que el número de ceros de p dentro de γ_j para $j = 1, 2, \cdots, k$. ■

6.2.15. *Encuentre el mayor disco centrado en* $z_0 = 1$ *en el cual la función* $f(z) = z^4$ *es uno a uno.*

Solución. Este problema tiene la intención de proporcionar una advertencia en contra de un error común. La derivada $f'(z) = 4z^3$ es 0 únicamente en $z = 0$. En particular,

$f'(z)$ nunca es 0 en el disco $D(1; 1)$. Sin embargo, *no podemos* concluir que f es uno a uno en este disco. En efecto, no lo es. $f((1 + i)/\sqrt{2}) = f((1 - i)/\sqrt{2}) = -1$. Si f fuera uno a uno cerca de un punto, la derivada no debe ser 0 en ese punto y $f'(z) \neq 0$ es suficiente para garantizar que f es uno a uno en alguna vecindad de z. Pero que f' no sea nunca 0 en una región grande, *no* es suficiente para forzar a que f sea globalmente uno a uno en toda la región. En el presente ejemplo, $f(re^{i\pi/4}) = f(re^{-i\pi/4})$ para cualquier r. Por lo tanto, la función dejará de ser uno a uno tan pronto como el disco toque estas líneas a 45°. Esto ocurre para $D(1; R)$ cuando $R = 1/\sqrt{2}$. Véase la figura 6.2.6.

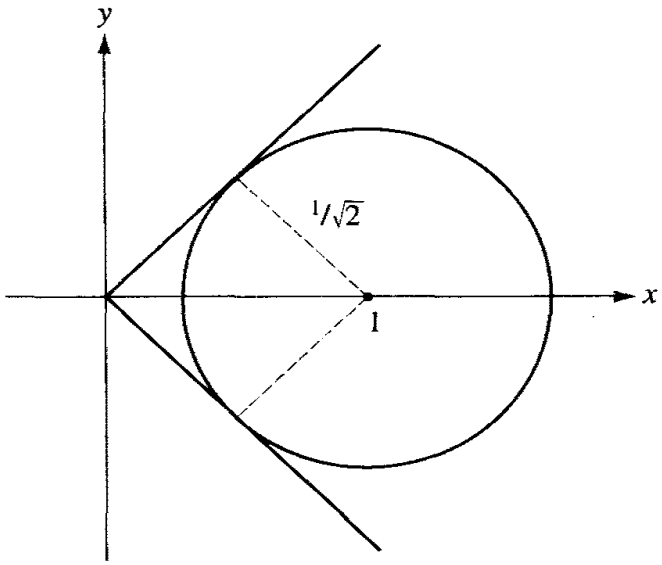


Figura 6.2.6. La función $f(z) = z^4$ es uno a uno en este disco.

Los métodos basados en el teorema de la función uno a uno (6.2.10), los cuales involucran consideraciones en la frontera, usualmente son más útiles que el examinar la derivada. Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ están en el círculo de radio R alrededor de 1, con $0 < R < \sqrt{2}$, entonces $-\pi/4 < \theta_1, \theta_2 < \pi/4$. $z_1^4 = z_1^4$ obliga a que $r_1 = r_2$ y $e^{i4\theta_1} = e^{i4\theta_2}$, y, por lo tanto, $4(\theta_1 - \theta_2) = 2\pi n$. Esto no puede pasar con θ_1 y θ_2 ambos entre $-\pi/4$ y $\pi/4$, a menos que $\theta_1 = \theta_2$. Pero entonces $z_1 = z_2$. (Realmente hemos demostrado que f es uno a uno en el cuarto de plano $\{z \mid -\pi/4 < \arg z < \pi/4\}$.)

Ejercicios

1. ¿Cuántos ceros tiene $z^6 - 4z^5 + z^2 - 1$ en el disco $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$?
2. ¿Cuántos ceros tiene $z^4 - 5z + 1$ en el anillo $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$?
3. Muestre que existe exactamente un punto z en el semiplano derecho $\{z \mid \text{Re } z > 0\}$ en el cual $z + e^{-z} = 2$. (*Sugerencia*: considere contornos tales como el de la figura 6.2.7.)

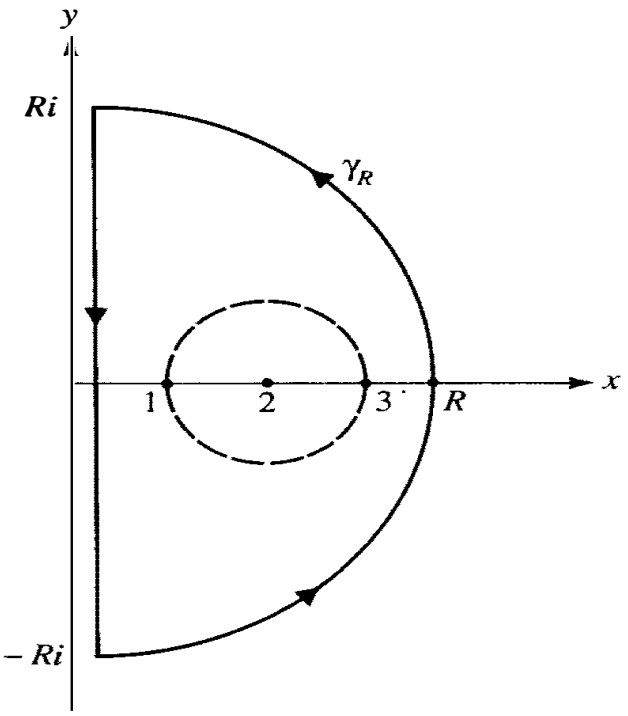


Figura 6.2.7. El contorno para el ejercicio 3.

4. Muestre que si $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, entonces debe haber al menos un punto z con $|z| = 1$ y $|p(z)| \geq 1$. (*Sugerencia*: si $|p(z)| < 1$ en todo $\{|z| = 1\}$, ¿cuántos ceros tiene $a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$?)
5. Sea f analítica dentro y sobre el círculo unitario $|z| = 1$. Suponga que $0 < |f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Muestre que f tiene exactamente un punto fijo (un punto z_0 tal que $f(z_0) = z_0$) dentro del círculo unitario.
6. Muestre que $e^z = 5z^3 - 1$ tiene tres soluciones en el disco $\{z$ tal que $|z| < 1\}$. (*Sugerencia*: piense en el ejemplo resuelto 6.2.12.)
7. Muestre que la conclusión en el ejercicio 5 es aún válida si la suposición $0 < |f(z)| < 1$ es remplazada por $0 < |f(z)| \leq 1$. (Excepto que el punto fijo estuviera sobre el círculo unitario.)
8. Sea $g_n = \sum_{k=0}^{n} z^k/k!$. Sea $D(0, R)$ el disco de radio $R > 0$. Muestre que para n suficientemente grande, g_n no tiene ceros en $D(0, R)$.
9. (*Teorema fundamental del álgebra*) Utilice el teorema de Rouché para demostrar que si $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$, entonces f tiene exactamente n-raíces.
10. Proporcione los detalles de la siguiente demostración del teorema de Rouché: Bajo las hipótesis del teorema 6.2.5, la función $H(s, t) = sg(\gamma(t)) + (1 - s)\, f(\gamma(t))$ es una homotopía de curvas cerradas entre las curvas $f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$ en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$, Se sigue que $I(f \circ \gamma, 0) = I(g \circ \gamma; 0)$. La conclusión del teorema de Rouché se sigue a partir de esto y del principio del argumento.
11. Extienda el teorema del conteo de polos y raíces (6.2.1) para incluir el siguiente resultado. Si f es analítica en A excepto para los ceros en $a_1, \ldots, a_n$ y los polos en $b_1, \ldots, b_m$ (cada uno repetido de acuerdo a su multiplicidad), si h es analítica en A y si γ es una curva cerrada homotópica a un punto en A, que no pasa por ningún $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$, entonces

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} h(z)\, dz = 2\pi i \left[\sum_{i=1}^{n} h(a_i)\, I(\gamma, a_i) - \sum_{k=1}^{m} h(b_k) I(\gamma, b_k) \right]$$

12. Proporcione los detalles de la siguiente demostración del teorema de Rouché (debida a Caratheodory): La función

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\lambda g'(z) + (1-\lambda) f'(z)}{g(z) + (1-\lambda) f(z)}\, dz$$

es una función continua de λ para $0 \le \lambda \le 1$. Pero su valor es siempre un entero y, por lo tanto,

$$Z_f - P_f = F(0) = F(1) = Z_g - P_g$$

13. Si $0f(z)$ es un polinomio, utilice el ejercicio 11 para demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} z\, dz$$

es la suma de los ceros de f si el círculo γ es suficientemente grande.

14. *a*) Sea $f: A \to B$ analítica, uno a uno y sobre. Sea $w \in B$ y sea γ un círculo pequeño en A con centro en z_0. Utilice el ejercicio 11 para demostrar que

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z) z}{f(z) - w}\, dz$$

para w suficientemente cerca de $f(z_0)$.

b) Explique el significado de

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

15. Sea $f(z)$ un polinomio de grado n, $n \ge 1$. Muestre que f transforma a $\mathbf{C}$ sobre $\mathbf{C}$.

16. Suponga que $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} 1/(k! z^k)$, y sea $\varepsilon > 0$. Para n suficientemente grande, ¿todos los ceros de g_n están en el disco $D(0; \varepsilon)$?

17. Si $f(z)$ es analítica y tiene n ceros dentro de la curva cerrada simple γ, ¿podría concluirse que $f'(z)$ tiene $n - 1$ ceros dentro de γ?

18. Localice los ceros (como se hizo en el ejemplo resuelto 6.2.1) para el polinomio $z^4 - z + 5 = 0$.

19. Encuentre una $r > 0$ tal que el polinomio $z^3 - 4z^2 + z - 4$ tenga exactamente dos raíces dentro del círculo $|z| = r$.

20. Sea f analítica dentro y sobre $|z| = R$ y sea $f(0) \neq 0$. Sea $M = \text{máx } |f(z)|$ sobre $|z| = R$. Muestre que el número de ceros de f dentro de $|z| = R/3$ no excede a

$$\frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{M}{|f(0)|}$$

(*Sugerencia*: sea $h(z) = f(z)/[(z - z_1) \cdots (z - z_n)]$ donde z_n son los ceros de f dentro de $|z| = R/3$ y aplique el teorema del módulo máximo a h.)

21. Muestre que $z \to z^2 + 3z$ es uno a uno en $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$.

22. ¿Cual es el disco más grande alrededor de $z_0 = 0$ sobre el cual la función en el ejercicio 21 es uno a uno?

23. Demuestre que la siguiente afirmación es falsa: Para toda función f analítica en el anillo $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$, existe un polinomio p tal que $|f(z) - p(z)| < \frac{1}{2}$ para $|z| = 1$.

24. Sea f analítica en $\mathbf{C}$ y sea $|f(z)| \leq 5\sqrt{|z|}$ para toda $|z| \geq 1$. Demuestre que f es constante.

6.3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS COMO MAPEO

En esta sección se demostrarán propiedades adicionales de las funciones analíticas, que son de naturaleza local (esto es, que dependen únicamente de los valores de $f(z)$ para z en una vecindad de un punto dado z_0). Se darán aquí demostraciones adicionales del teorema de la función inversa (1.5.10), del teorema del módulo máximo (2.5.6) y del teorema del mapeo abierto (establecido formalmente por primera vez en esta sección, pero mencionado previamente por primera vez en esta sección, pero mencionado previamente en el ejercicio 8, sección 1.5). Podemos demostrar estos teoremas y también obtener información concerniente al comportamiento de una función cerca de un punto, usando la fórmula del conteo de raíces (véase el corolario 6.2.2):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \text{número de raíces de } f(z) = w \text{ dentro de } \gamma, \text{ contando multiplicidades}$$

Comportamiento local de las funciones analíticas

Si $f(z_0) = w_0$ con multiplicidad k, en el sentido que $f(z) - w_0$ tiene un cero de orden k en z_0, entonces mostraremos que f es arbitrariamente k a uno, cerca de z_0. La formulación precisa del teorema es algo rebuscada y confusa. Empezamos con la motivación y el típico ejemplo y parafraseamos el teorema en forma un tanto imprecisa antes de formular y demostrar la versión más precisa. (El lector debe tener en mente el ejemplo y seguir la argumentación precisa a la que se refiere la figura 6.3.1.) Con-

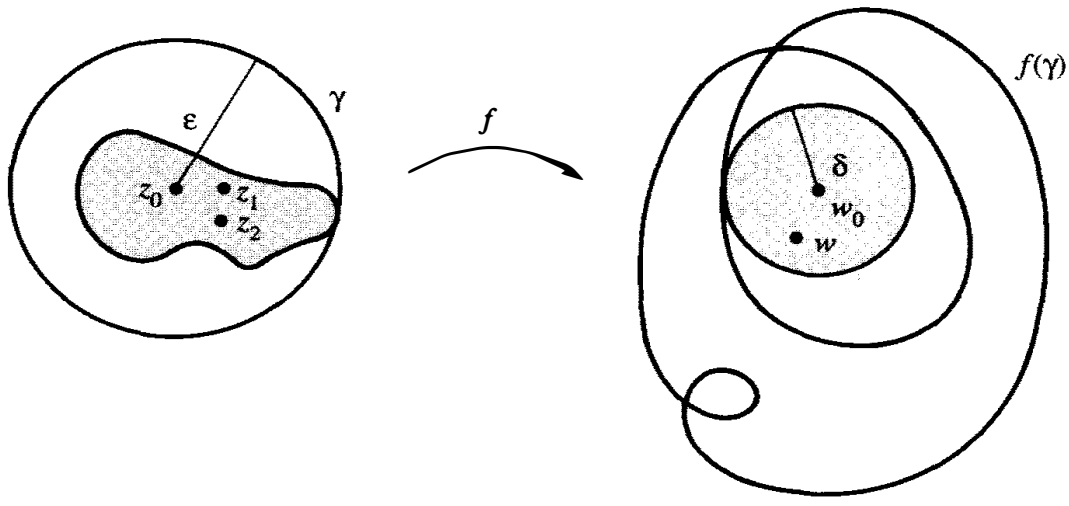


Figura 6.3.1. Esta función es dos a uno cerca de z_0.

sidere el caso especial en el que $f(z) = z^k$. Esta función tiene un cero de orden k en $z_0 = 0$ (aquí $w_0 = 0$). Entonces, para toda w cerca de 0, $z^k = w$ tiene exactamente k soluciones cerca de 0. Para ver que este comportamiento es heredado por una función f más general para la cual $f(z_0) = w_0$ con multiplicidad k, considere la expansión en series de potencias de f alrededor de z_0:

$$f(z) - w_0 = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Para $|z - z_0|$ suficientemente pequeño, podríamos conjeturar (correctamente) que el comportamiento del término de menor grado que no se anula, $a_k(z - z_0)^k$, dominará.

Teorema del mapeo: versión informal 6.3.1. *Suponga que* f *toma el valor* w_0 en z_0, *con multiplicidad* k. *Entonces, para toda* w *suficientemente cerca de* w_0, f *toma el valor* w *exactamente* k *veces cerca de* z_0 (*contando multiplicidades*). *Para toda* w *aun más cerca de* w_0, *las* k *raíces de* $f(z) = w$ *cerca de* z_0, *son distintas.*

La formulación más precisa es la siguiente:

Teorema del mapeo 6.3.2. *Sea* f *analítica y no constante en una región* A *y sea* $z_0 \in A$. *Suponga que* $f(z) - w_0$ *tiene un cero de orden* $k \geq 1$ en z_0. *Entonces existe una* $\eta > 0$ *tal que para toda* $\varepsilon \in]0, \eta]$, *existe una* $\delta > 0$ *tal que si* $|w - w_0| < \delta$, *entonces* $f(z) - w$ *tiene exactamente* k *raíces (contadas con sus multiplicidades) en el disco* $|z - z_0| < \varepsilon$ (véase la figura 6.3.1) *En efecto, existe una* $\lambda > 0$ (*probablemente menor que* η) *tal que para toda* $\varepsilon \in]0, \lambda]$, *existe una* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < |w - w_0| < \delta$ *entonces* $f(z) - w$ *tiene exactamente* k *raíces distintas en el disco* $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Demostración. Puesto que f no es constante, los ceros de $f(z) - w_0$ son aislados. Así, existe una $\eta > 0$ tal que para $|z - z_0| \leq \eta$, $f(z) - w_0$ no tiene otros ceros que z_0. En el conjunto compacto $\{z$ tal que $|z - z_0| = \varepsilon\}$ (el círculo γ en la figura 6.3.1), $f(z) - w_0$ es continua y nunca es cero. Por lo tanto, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| \leq \delta > 0$ para $|z - z_0| = \varepsilon$. Así, si w satisface $|w - w_0| < \delta$, entonces, para $|z - z_0| = \varepsilon$, se satisface lo siguiente:

(i) $f(z) - w_0 \neq 0$
(ii) $f(z) - w \neq 0$ (puesto que $f(z) = w$ significaría que $|w - w_0| \geq \delta$)
(iii) $|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| = |w - w_0| < \delta \leq |f(z) - w_0|$

Por el teorema de Rouché, $f(z) - w$ tiene el mismo número de ceros, contando multiplicidades, que $f(z) - w_0$ dentro del círculo $|z - z_0| = \varepsilon$. Así, hemos demostrado la primera parte del teorema. Para demostrar la segunda parte, note que f' no es idénticamente cero en A. Los ceros de f' son entonces aislados. Por lo tanto, para alguna $\lambda \leq \eta$, ni $f(z) - w_0$ ni $f'(z)$ son 0 en $|z - z_0| \leq \lambda$ excepto en z_0. Observe que $f(z) - w$ tiene todavía el mismo número de raíces que $f(z) - w_0$ para cualquier w suficientemente cerca de w_0, pero ahora las raíces deben ser de primer orden, por lo tanto distintas, ya que f' no es cero. ■

Los teoremas del mapeo abierto y de la función inversa

El teorema del mapeo nos dice que en algún disco cerrado centrado en z_0, f es exactamente k a uno. El teorema puede no ayudar directamente en encontrar el tamaño de este disco (véanse los ejemplos y ejercicios al final de esta sección), pero muchas veces, el conocimiento de su existencia nos puede conducir a interesantes resultados.

Una función $f: A \to \mathbf{C}$ es llamada *abierta* si, para cualquier conjunto abierto $U \subset A$, $f(U)$ es abierto. Por la definición de un conjunto abierto, esta afirmación es equivalente a: Para toda $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, existe una $\delta > 0$ tal que $|w - w_0| < \delta$, implica que existe una z, $|z - z_0| < \varepsilon$ con $w = f(z)$. En otras palabras, si f toca a w_0, f toca a toda w suficientemente cerca de w_0. Una lectura cuidadosa de la definición de conjunto abierto y un examen de la figura 6.3.1, muestran que el teorema del mapeo implica el siguiente teorema:

Teorema del mapeo abierto 6.3.3. *Sean* $A \subset \mathbf{C}$ *abierto y* $f: A \to \mathbf{C}$ *no constante y analítica. Entonces* f *es un mapeo abierto, esto es, la imagen bajo* f *de cualquier conjunto abierto es abierta.*

Usando el teorema del mapeo abierto (6.3.2), podemos también obtener una demostración alternativa del teorema de la función inversa (1.5.10).

Teorema de la función inversa 6.3.4. *Sea* $f: A \to \mathbf{C}$ *analítica, sea* $z_0 \in A$ *y sea* $f'(z_0) \neq 0$. *Entonces, existen una vecindad* U *de* z_0 *y una vecindad* V *de* $w_0 = f(z_0)$ *tales que* $f: U \to V$ *es uno a uno y sobre, y* $f^{-1}: V \to U$ *es analítica.*

Demostración. $f(z) - w_0$ tiene un cero simple en z_0 ya que $f'(z_0) \neq 0$. Podemos usar el teorema 6.3.2 para encontrar $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que cada w, con $|w - w_0| < \delta$, tenga exactamente una preimagen z, con $|z - z_0| < \varepsilon$. Sea $V = \{w \text{ tal que } |w - w_0| < \delta\}$ y sea U la imagen inversa de V bajo el mapeo f restringido a $\{z \text{ tal que } |z - z_0| < \varepsilon\}$ (la región sombreada en la figura 6.3.1). Por el teorema del mapeo, f transforma en forma uno a uno y sobre, a U en V. Ya que f es continua, U es una vecindad de z_0. Por el teorema del mapeo abierto, $f = (f^{-1})^{-1}$ es un mapeo abierto y, por lo tanto, f^{-1} es continua de V a U. Para mostrar que es analítica, use

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z) - w} z \, dz$$

(véase el ejercicio 14 al final de la sección precedente). Ésta es analítica en w, por el ejemplo resuelto 2.4.15. ■

Estas ideas pueden usarse como la base de otra demostración del teorema del módulo máximo (véase la sección 2.5) como sigue.

Teorema del módulo máximo 6.3.5. *Sea* f *analítica en una región (conjunto abierto y conexo)* A. *Si* |f| *tiene un máximo local en* $z_0 \in A$, *entonces* f *es constante.*

Demostración. Suponga que f no es constante y que $z_0 \in A$. Puesto que f es un mapeo abierto, para $|w - f(z_0)|$ suficientemente pequeña, existe una z cerca de z_0, con $w = f(z)$. Escoja w con $|w| > |f(z_0)|$. Específicamente, escoja $w = (1 + \delta/2) f(z_0)$ si $f(z_0) \neq 0$, y $w = \delta/2$ si $f(z_0) = 0$ para δ pequeña. Entonces, es claro que f no tiene un máximo relativo en z_0. ■

Una demostración similar muestra que si $f(z_0) \neq 0$, entonces f no tiene un mínimo en z_0 a menos que f sea constante. El principio del módulo máximo (2.5.6) se sigue como en la sección 2.5.

Ejemplos resueltos

6.3.6. *Determine el mayor disco alrededor de* $z_0 = 0$ *sobre el cual* $f(z) = 1 + z + z^2$ *es uno a uno.*

Solución. Puesto que $f'(0) = 1$, $f(z) - 1$ tiene un cero simple en 0, y el teorema del mapeo (6.3.2) muestra que f es uno a uno en algún disco alrededor de $z_0 = 0$. Como $f(z) - 1 = z + z^2 = z(1 + z)$, la cual tiene raíces en 0 y -1, sabemos que $f(z) - 1$ tiene solamente una raíz en el disco $\{z$ tal que $|z| < 1\}$. Este disco es el disco de la primera parte del teorema del mapeo, pero eso no garantiza que f sea uno a uno en el disco; en efecto, no lo es. El teorema del mapeo muestra únicamente que f es uno a uno en la subregión del disco sombreada en la figura 6.3.1, la preimagen de $\{w$ tal que $|w - w_0| < \delta\}$. Podemos encontrar que es lo que causa este fenómeno al dibujar la imagen del círculo unitario. En este caso $f(z) = 1 + z + z^2$, $z_0 = 0$ y $w_0 = 1$. Así

$$f(0) = 1 \qquad f(e^{2\pi i/3}) = 0$$

$$f(1) = 3 \qquad f(e^{4\pi i/3}) = 0$$

$$f(i) = i \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

$$f(-1) = 1 \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

$$f(-i) = -i$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

Al dibujar estos puntos, encontramos que la imagen del círculo unitario es como se muestra en la figura 6.3.2. El índice de la curva imagen con respecto de la pequeña región sombreada, es 2. Por lo tanto, aquí cada punto es tocado dos veces por los puntos en el disco unitario; por ejemplo, $f'(-\frac{1}{2}) = 0$ y $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. El teorema del mapeo muestra que f es dos a uno en vecindades pequeñas de $-\frac{1}{2}$. En consecuencia, f no será uno a uno en ningún disco que contenga una vecindad de $-\frac{1}{2}$.

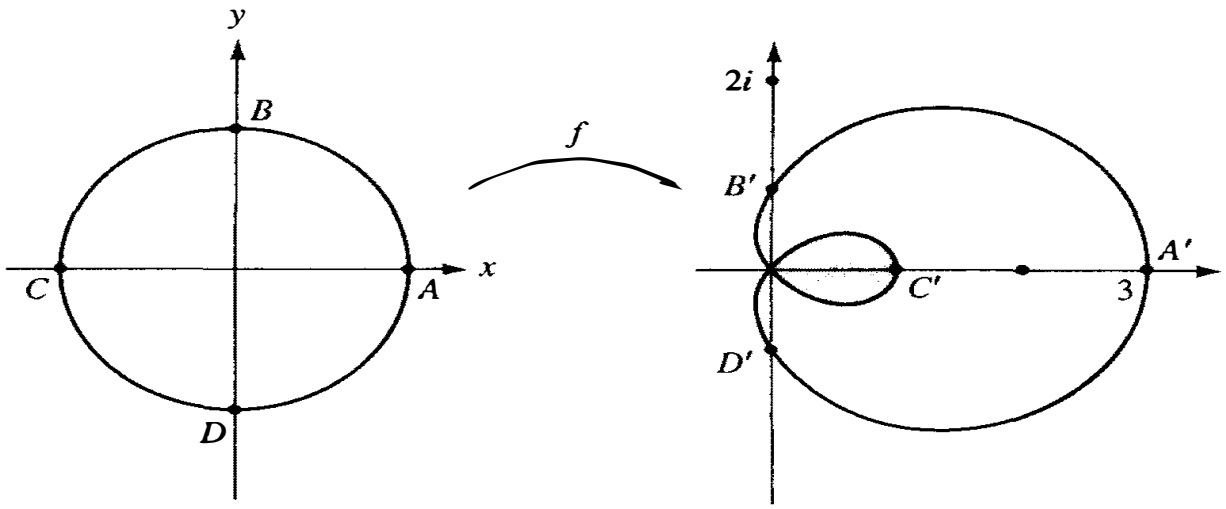


Figura 6.3.2. Imagen del círculo unitario bajo $f(z) = 1 + z + z^2$.

Considere el disco $D(0, r) = \{z \text{ tal que } |z| < r\}$. La curva frontera es el círculo $\gamma_r = \{z \text{ tal que } |z| = r\}$. Conforme r decrece, el aro problema en la curva imagen se contrae. Para alguna r_0 crítica, desaparece. Para $r > r_0$, f no es uno a uno en γ_r. Para $r < r_0$, f es uno a uno en γ_r. Por el teorema de la función uno a uno (6.2.10), f es entonces uno a uno en $D(0, r)$ y el disco deseado es $D(0, r_0)$. Para encontrar r_0, suponga que $re^{i\theta}$ y $re^{i\psi}$ están en γ_r, y que $f(re^{i\theta}) = f(re^{i\psi})$.
Entonces

$$1 + re^{i\theta} + r^2e^{i2\theta} = 1 + re^{i\psi} + r2e^{i2\psi}$$

Por lo tanto, $e^{i\theta} + re^{i2\theta} = e^{i\psi} + re^{i2\psi}$, y así

$$re^{i(\theta+\psi)}(e^{i(\theta-\psi)} - e^{i(\psi-\theta)}) = e^{i(\theta+\psi)/2}(e^{i(\psi-\theta)/2} - e^{i(\theta-\psi)/2})$$

Por ende,

$$re^{i(\theta+\psi)/2} \operatorname{sen}(\theta - \psi) = -\operatorname{sen}\frac{\theta - \psi}{2}$$

En otras palabras,

$$2re^{i(\theta+\psi)/2} \operatorname{sen}\frac{\theta-\psi}{2} \cos\frac{\theta-\psi}{2} = -\operatorname{sen}\frac{\theta-\psi}{2}$$

Ahora, una de dos cosas debe pasar: o $\operatorname{sen}[(\theta - \psi)/2] = 0$, en cuyo caso $\theta - \psi = 2\pi n$ para algún entero n y entonces $re^{i\theta} = re^{i\psi}$, o $\cos[(\theta - \psi)/2] = -(1/2r)e^{-i(\theta+\psi)/2}$. Si $r > \frac{1}{2}$, lo último puede pasar para $\psi = -\theta$; por ejemplo, en $r = 1$, esto ocurre en los puntos $e^{2\pi i/3}$ y $e^{4\pi i/3}$. Si $r < \frac{1}{2}$, esta misma condición no se puede satisfacer, ya que $|\cos[(\theta-\psi)/2]| \leq 1$. Si $r = \frac{1}{2}$, esto puede pasar únicamente para $\theta = \psi = \pi$. El radio crítico es, por lo tanto, $r_0 = \frac{1}{2}$. Así, f es uno a uno en el disco $D(0, \frac{1}{2}) = \{z \text{ tal que } |z| < \frac{1}{2}\}$ pero no lo es ningún disco abierto más grande. ($D(0, \frac{1}{2})$) es el disco más grande, alrededor de

$z_0 = 0$ en el cual $f'(z)$ nunca es cero. No es cierto generalmente que éste también será el disco en el cual f es uno a uno (véase el ejercicio 3).

6.3.7. *Demuestre lo siguiente*: *Si* f *es analítica cerca de* $z_0 \in$ A *y si* $f(z) - f(z_0)$ *tiene un* 0 *de orden* k *en* z_0, $1 \leq k < \infty$, *entonces existe una función analítica* h(z) *tal que* $f(z) = f(z_0) + [h(z)]^k$ *para* z *cerca de* z_0, *y* h *es localmente uno a uno.*

Solución. Puesto que $k < \infty$ y f no es constante. Podemos escribir $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k \phi(z)$ donde $\phi(z_0) \neq 0$ y ϕ es analítica. Para z cerca de z_0, $\phi(z)$ está en un disco pequeño alrededor de $\phi(z_0)$ que no contiene a 0, por la continuidad. En tal disco, podemos definir $\sqrt[k]{\phi(z)}$ y hacer $h(z) = (z - z_0)\sqrt[k]{\phi(z)}$. Entonces, $h'(z_0) \neq 0$ y, por lo tanto, por el teorema de la función inversa, h es localmente uno a uno. Véase la figura 6.3.3.

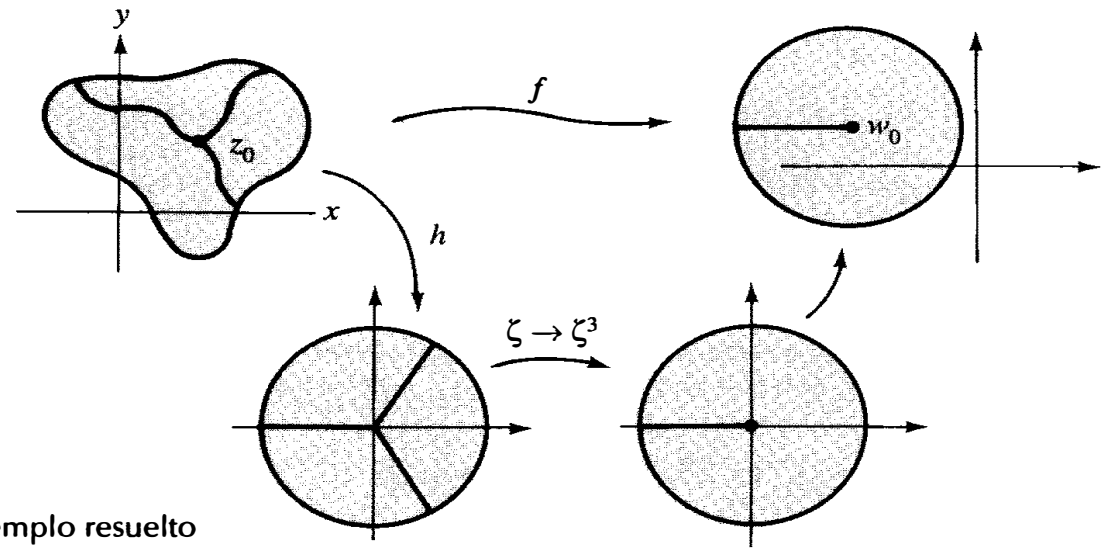


Figura 6.3.3. Ejemplo resuelto 6.3.7, con $k = 3$.

Ejercicios

1. Sea $f(z) = z + z^2$. Para cada z_0 especificada, encuentre el mayor disco centrado en z_0, en el cual f es uno a uno:

   a) $z_0 = 0$ *b*) $z_0 = 1$

2. ¿Cuál es el disco más grande alrededor de $z_0 = 1$ en el cual $f(z) = e^z$ es uno a uno?
3. Sea f analítica en $D = \{z \text{ tal que } |z - z_0| < r\}$. Sea $f(z_0) = w_0$ y suponga que $f(z) - w_0$ no tiene otras raíces en D diferentes a z_0 y que $f'(z)$ nunca es cero en D. Muestre que no necesariamente es cierto que f es uno a uno en D. (*Sugerencia*: considere z^3.)
4. ¿Cuál es el mayor disco centrado en $z_0 = 1$ en el cual $f(z) = z^3$ es uno a uno? (*Sugerencia*: véase el ejercicio 3.)
5. Si f es analítica en A, $0 \in A$ y $f'(0) \neq 0$, entonces demuestre que cerca de 0 podemos escribir $f(z^n) = f(0) + [h(z)]^n$ para alguna función analítica h que es uno a uno cerca de 0. (*Sugerencia*: use el ejemplo resuelto 6.3.7.)
6. Sea $u : A \to \mathbf{R}$ armónica y no constante en una región A. Demuestre que u es un mapeo abierto.

7. Utilice el ejercicio 6 para demostrar los principios del máximo y del mínimo para funciones armónicas (véase la sección 2.5).
8. Sea f entera y con la propiedad de que si $B \subset \mathbf{C}$ es cualquier conjunto acotado, entonces $f^{-1}(B)$ es acotado (o tal vez vacío). Muestre que para toda $w \in \mathbf{C}$, existe $z \in \mathbf{C}$ tal que $f(z) = w$. (*Sugerencia*: muestre que $f(\mathbf{C})$ es tanto abierto como cerrado y deduzca que $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$). Aplique este resultado a los polinomios para deducir otra demostración más del teorema fundamental del álgebra.
9. Muestre que la ecuación $z = e^{z-a}$, $a > 1$, tiene exactamente una solución dentro del círculo unitario.
10. Considere el ejemplo resuelto 6.3.7 y tome el caso en donde $k = 4$. Visualice el mapeo local en tres pasos, como sigue:

$$z \mapsto t = (z - z_0)\sqrt[4]{\phi(z)}; \quad t \mapsto s = t^4; \quad s \mapsto w = s + f(z_0)$$

Bosqueje este mapeo.

11. Suponga que f es analítica en una región A que contiene al disco unitario cerrado $D = \{z \text{ tal que } |z| \leq 1\}$ y que $|f(z)| > 2$ siempre que $|z| = 1$. Si $f(0) = 1$ muestre que f tiene un cero en D.
12. Sea $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ con un radio de convergencia R. Suponga que $|a_1| \geq \sum_{n=2}^\infty n|a_n|r^{n-1}$ para alguna $0 < r \leq R$. Muestre que f es uno a uno en $\{z \text{ tal que } |z| < r\}$ a menos que f sea constante. Compare su método con el que se usó para resolver el ejemplo resuelto 6.2.13.

SUPLEMENTO A DEL CAPÍTULO 6: FAMILIAS NORMALES Y EL TEOREMA DEL MAPEO DE RIEMANN

El principal objetivo de este complemento es bosquejar una demostración del teorema del mapeo de Riemann. El material está separado ya que es un poco más avanzado que el resto del capítulo y no es necesario para entender o usar éste o los capítulos subsecuentes. Sin embargo, ilustra algunas poderosas herramientas y técnicas del análisis complejo.

En todo el suplemento, G representará un conjunto abierto, conexo y simplemente conexo, contenido propiamente en el plano complejo $\mathbf{C}$ y D representará el disco unitario abierto $D = D(0; 1) = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$. Dada $z_0 \in \mathbf{C}$, el teorema del mapeo de Riemann asegura que *existe una función* f *que es analítica en* G *y que transforma a* G *en forma uno a uno y sobre en* D, *con* $f(z_0) = 0$. *Más aún, si se pide que* $f'(z_0) > 0$, *entonces existe exactamente una función tal*. La unicidad ha sido ya establecida en el capítulo 5; esto es, no puede haber más de una de tales funciones. Necesitamos todavía demostrar que existe al menos una. La idea de la demostración es investigar en todas las funciones que transforman a G de manera uno a uno *en* D y que mandan a z_0 a 0, con derivada positiva en z_0; encontrar una entre ellas que maximice $f'(z_0)$ y mostrar que esta función manda a G *sobre* D.

Teorema de Montel y familias normales

La demostración de la existencia de una función que maximice a $f'(z_0)$ descansará en el material de la sección 3.1, concerniente a la convergencia uniforme en discos cerrados. Aprendimos ahí que si una sucesión de funciones analíticas en una

región converge uniformemente en los discos cerrados contenidos en la región, entonces la función límite debe ser analítica. La existencia de tales sucesiones es conocida como el teorema de Montel sobre familias normales.

Definición de familia normal 6.S.A.1. *Si* A *es un subconjunto abierto de* **C**, *un conjunto* $\mathcal{S}$ *de funciones analíticas en* A, *es llamado una* ***familia normal*** *si toda sucesión de funciones en* $\mathcal{S}$ *tiene una subsucesión que converge uniformemente en los discos cerrados en* A.

Observe que por el teorema de convergencia analítica (3.1.8), el límite de tal sucesión debe ser analítico en A.

Teorema de Montel 6.S.A.2. *Si* A *es un subconjunto abierto de* **C** *y* $\mathcal{S}$ *es un conjunto de funciones analíticas en* A, *el cual es uniformemente acotado en los conjuntos cerrados en* A, *entonces toda sucesión de funciones en* $\mathcal{S}$ *tiene una subsucesión que converge uniformemente en los discos cerrados en* A. *Esto es,* $\mathcal{S}$ *es una familia normal.*

Demostración[1] El plan de ataque es el siguiente:

(i) Seleccionar un conjunto numerable de puntos $C = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ que estén distribuidos densamente en todo A, en el sentido que $A \subset \text{cl}\ (C)$.
(ii) Mostrar que existe una subsucesión de la sucesión original de funciones que converge en todos esos puntos
(iii) Mostrar que la convergencia en este conjunto denso de puntos es suficiente para obligar a que la subsucesión converja en todos los puntos de A.
(iv) Verificar que esta convergencia es uniforme en cualquier disco cerrado en A.

El primer paso puede realizarse al tomar aquellos puntos con ambas partes, real e imaginaria, racionales. Hay sólo una cantidad numerable de éstos y, por lo tanto, pueden ser arreglados en una sucesión, y éstos están distribuidos densamente en A, en el sentido que algunos de ellos están arbitrariamente cerca de cualquiera en A.

Sea $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una sucesión de funciones en $\mathcal{S}$. La suposición de ser uniformemente acotado en los discos cerrados significa que para cada disco cerrado $B \subset A$, existe un número $M(B)$ tal que $|f_n(z)| < M(B)$ para toda n y para toda z en B. En particular, los números $f_1(z_1), f_2(z_1), f_3(z_1), \ldots$ son todos menores que $M(\{z_1\})$. Por lo tanto, debe haber una subsucesión de éstos que converjan a un punto w_1, con $|w_1| \leq M(\{z_1\})$.

Reetiquetamos esta subsucesión como

$$f_{1,1}(z_1), f_{1,2}(z_1), f_{1,3}(z_1), \ldots \to w_1$$

Al evaluar estas funciones en z_2, nos da otra sucesión de números $f_{1,1}(z_2), f_{1,2}(z_2),$

[1] El estudiante que haya visto el teorema de Arzela-Ascoli (véase por ejemplo, J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Nueva York, W. H. Freeman and Company, 1974) puede dar una rápida demostración del teorema de Montel utilizando la suposición de ser uniformemente acotado, y el ejemplo resuelto 3.1.19 de este libro para demostrar la equicontinuidad.

$f_{1,3}(z_2)$, . . . la cual está cotada por $M(|z_2|)$. Alguna subsucesión de ésta debe converger a un punto w_2. Reacomode esta sub-subsucesión como

$$f_{2,1}(z_2), f_{2,2}(z_2), f_{2,3}(z_2), \ldots \to w_2$$

Es importante notar que las funciones $f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \ldots$ están seleccionadas entre $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \ldots$. Al continuar de esta manera, seleccionando subsucesiones de subsucesiones, se produce el arreglo

$$\begin{aligned}
&f_{1,1}(z_1), f_{1,2}(z_1), f_{1,3}(z_1), \ldots \to w_1\\
&f_{2,1}(z_2), f_{2,2}(z_2), f_{2,3}(z_2), \ldots \to w_2\\
&f_{3,1}(z_3), f_{3,2}(z_3), f_{3,3}(z_3), \ldots \to w_3\\
&f_{4,1}(z_4), f_{4,2}(z_4), f_{4,3}(z_4), \ldots \to w_4\\
&\quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\\
&\quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\\
&\quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot
\end{aligned}$$

en la cual la k-ésima hilera horizontal converge a algún número complejo w_k y las funciones usadas en cada hilera se seleccionan de entre las funciones de la hilera anterior. La demostración utiliza un procedimiento, llamado la *construcción diagonal*, la cual es algunas veces útil en otros contextos. Sea $g_n = f_{n,n}$. Entonces $g_1, g_2, g_3, \ldots$ es una subsucesión de la sucesión de funciones original, y $\lim_{l\to\infty} g_l(z_k) = w_k$ para toda k. Esto es debido a que $g_n = f_{n,n}$ es unasubsucesión de $f_{k,1}, f_{k,2}, f_{k,3}, \ldots$ tan pronto como $n > k$. Así, la subsucesión g_n converge en un conjunto de puntos que están distribuidos densamente en todo A. Los pasos (iii) y (iv) del programa son para mostrar que el hecho de que las g_n estén uniformemente acotadas en los discos cerrados en A, es suficiente para obligarlas a que converjan en todo G y, en efecto lo hacen uniformemente en los discos cerrados en A. Realizamos esto para demostrar que la sucesión satisface la condición de Cauchy uniformemente en discos cerrados.

Sea B un disco cerrado contenido en A y sea $\varepsilon > 0$. Por el ejemplo resuelto 3.1.19, las funciones g_n son uniformemente equicontinuas en B; esto es, existe un número $\delta > 0$ tal que $|g_l(\zeta) - g_l(\xi)| < \varepsilon/3$ para toda l, siempre que ζ y ξ estén en B y $|\zeta - \xi| < \delta$. Al usar únicamente una cantidad finita de los puntos z_k, podemos garantizar que todo punto en B está dentro de una distancia δ de al menos uno de ellos. Esto es, existe un entero $K(B)$ tal que para $z \in B$, existe al menos una $k \in \{1, 2, 3, \ldots, K(B)\}$ con $|z - z_k| < \delta$ y, por lo tanto, $|g_l(z) - g_l(z_k)| < \varepsilon/3$ para toda l. Una forma de hacer esto podría ser tomar una red cuadrada de puntos con coordenadas racionales y separarlos en menos que δ. Véase la figura 6.S.A.1. Ya que $\lim_{l\to\infty} g_l(z_k) = w_k$ para toda k, cada una de las sucesiones satisface la condición de Cauchy y como sólo hay una cantidad finita de ellas, existe un entero $N(B)$ tal que $|g_n(z_k) - g_m(z_k)| < \varepsilon/3$ siempre que $n \geq N(B)$, $m \geq N(B)$ y $1 \leq k \leq K(B)$.

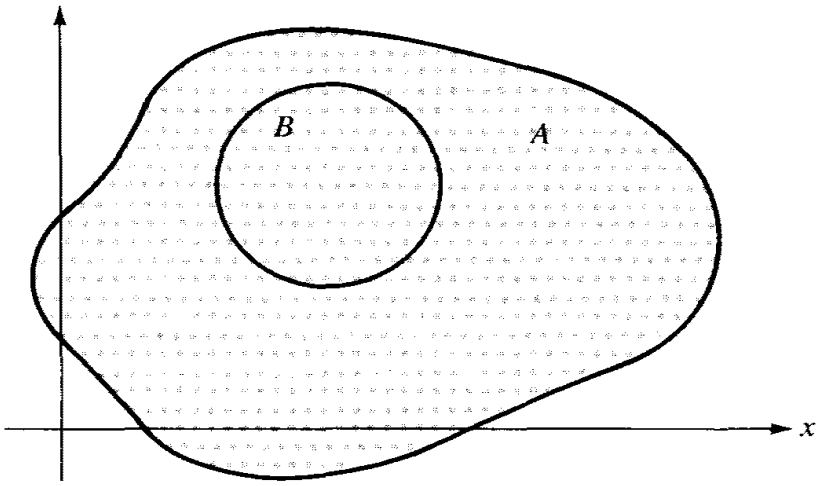


Figura 6.S.A.1. Cualquier punto en B está a una distancia menor que δ de al menos un punto de la familia finita de z_k.

Ponga todo esto junto, suponga que $n \geq N(B)$ y $m \geq N(B)$. Si $z \in A$, entonces z está a distancia menor que δ de z_k, para alguna $k \leq K(B)$ y, por lo tanto,

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq |g_n(z) - g_n(z_k)| + |g_n(z_k) - g_m(z_k)| + |g_m(z_k) - g_m(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

La sucesión g_n satisface entonces la condición de Cauchy uniformemente en B y, en consecuencia, converge uniformemente en B a alguna función límite, como se quería. ■

Demostración del teorema del mapeo de Riemann

Estamos ahora en posición de demostrar el teorema del mapeo de Riemann. Sea G un conjunto abierto, simplemente conexo y conexo, contenido en el plano complejo C. Sea $z_0 \in G$, y sea $D = D(0; 1)$ el disco abierto unitario. Debemos mostrar que existe una función analítica f en G, la cual transforma en forma uno a uno y sobre a G en D, con $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. Para hacer esto, sea

$$\mathcal{S} = \{f: G \to D | f \text{ es analítica y uno a uno en } G, f(z_0) = 0 \text{ y } f'(z_0) > 0\}$$

Los principales pasos de la demostración son:

(i) Mostrar que $\mathcal{S}$ no es vacío.
(ii) Mostrar que los números $\{f'(z_0) | f \in \mathcal{S}\}$ están acotados superiormente y tienen, por tanto, una mínima cota superior finita M.
(iii) Utilice el teorema de Montel para extraer de una sucesión de funciones en $\mathcal{S}$, cuyas derivadas en z_0 converjan a M, una subsucesión que converja uniformemente en los discos cerrados en G. La función límite f, es analítica en G y $f'(z_0) = M$.

(iv) Muestre que $f \in \mathcal{S}$.
(v) Muestre que f debe transformar a G sobre D.

Para mostrar que $\mathcal{S}$ no es vacío, es suficiente mostrar que podemos transformar analíticamente a G en el disco unitario. Una vez hecho esto, únicamente necesitamos componer con una transformación fraccional lineal del disco sobre sí mismo, la cual mande a z_0 a 0, y luego multiplicar por una constante $e^{i\theta}$, escogida de tal manera que la derivada del mapeo resultante en z_0 sea positiva. Si G es acotado, por ejemplo, si $|z - z_0| < R$ para toda z en G, el mapeo $z \mapsto (z - z_0)/R$ hace el trabajo. Si G no es acotada, el mapeo omite al menos un punto a. La traslación $z \to z - a$, manda a G a una región simplemente conexa G_1 que no contiene al 0. Por el teorema 2.2.6, existe una rama del logaritmo, definida en G_1, a la cual le llamaremos F. Entonces, el mapeo g definido como $z \mapsto e^{(1/2)F(z)}$ es una rama de la función raíz cuadrada; por el teorema del mapeo inverso o por el teorema de la función inversa, uno ve que $G_2 = g(G_1)$ contiene algún disco $D(b; r)$. Por las propiedades de la función raíz cuadrada, $D(-b, r)$ no interseca a G_2. El mapeo $f(z) = r/[b + z]$ transforma entonces a G_2 en el disco unitario. Véase la figura 6.S.A.2.

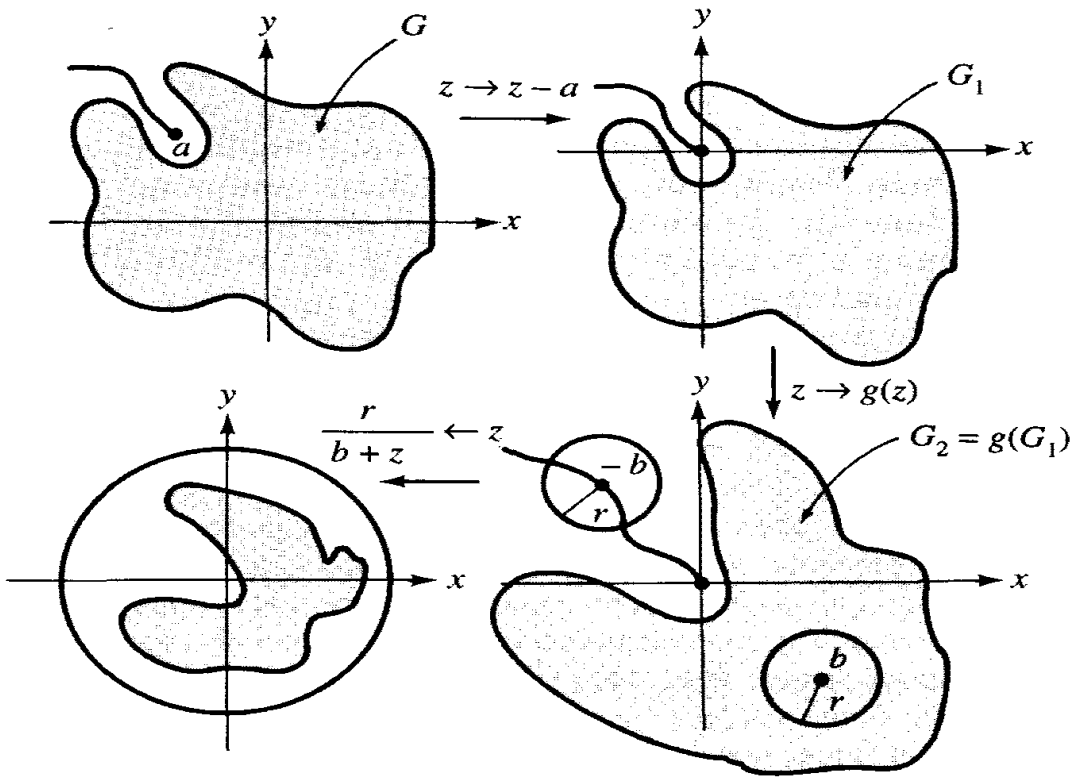


Figura 6.S.A.2. La transformación de G en el disco unitario.

Una vez que hemos mostrado que $\mathcal{S}$ no es vacío, debemos establecer la parte (ii). La familia $\mathcal{S}$ está uniformemente acotada por 1 en G y, por lo tanto, por el ejemplo resuelto 3.1.18, las derivadas están acotadas uniformemente en los discos cerrados en G. En particular, existe un número finito $M(\{z_0\})$ tal que $f'(z_0) \leq M(\{z_0\})$ para toda f en $\mathcal{S}$. Sea M la mínima cota superior de estas derivadas. Debe de haber

una sucesión $f_1, f_2, f_3, \ldots$ de funciones en $\mathcal{S}$, con la propiedad de que $\lim_{n\to\infty} f_n'(z_0) = M$. Puesto que la familia $\mathcal{S}$ es uniformemente acotada, es normal, por el teorema de Montel, debe de haber una sucesión que converja uniformemente en los discos cerrados en G. Debemos también desechar las funciones que no necesitamos y asumir que tenemos una sucesión que converge uniformemente en los discos cerrados en G. Por el teorema de convergencia analítica (3.1.8), éstas convergen a una función límite f que es analítica en G y $f'(z_0) = M$.

Enseguida queremos saber que f es un miembro de $\mathcal{S}$. Cada una de las funciones f_n, transforma a G en el disco unitario, y así f transforma ciertamente a G en el disco unitario cerrado. Puesto que f no es constante, el principio del módulo máximo dice que $|f(z)|$ no puede tener un máximo en G y, por lo tanto, la imagen nunca toca a la frontera del disco y f transforma a G en D. Ciertamente, $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 0$. Finalmente, el corolario del teorema de Hurwitz (6.2.8), muestra que f debe ser uno a uno, ya que es un límite no constante de funciones uno a uno que convergen uniformemente en los discos cerrados. Por lo tanto, $f \in \mathcal{S}$.

El paso final, (iv), es mostrar que f realmente transforma a G *sobre* D. Esto se sigue de la siguiente afirmación.

Afirmación. *Si* A *es un conjunto abierto, conexo y simplemente conexo, contenido propiamente en* D *y* $0 \in$ A, *entonces existe una función analítica* F *en* A *que transforma en forma uno a uno a* A *en* D, *con* F(0) = 0 y F'(0) > 1.

Para ver cómo (iv) se sigue de esta afirmación, suponga que f no transforma a G sobre D. Entonces, $A = f(G)$ satisface las condiciones de la afirmación. (Que es abierto se sigue del teorema del mapeo abierto (6.3.3).) Considere $g(z) = F(f(z))$. Entonces $g \in \mathcal{S}$, pero $g'(z_0) = F'(f(z_0))f'(z_0) = F'(0)M > M$, lo que contradice la maximalidad de M.

Así que resta comprobar la afirmación. La construcción es un poco como la que se usó en el paso (i) y quizá se traza mejor si se siguen los diagramas en la figura 6.S.A.3. La región A está sombreada por líneas diagonales en el primer diagrama. Ésta pierde un punto a, indicado por un círculo abierto en ese diagrama. Las imágenes sucesivas de a y 0 están indicadas por puntos abiertos y puntos sólidos, respectivamente, en cada uno de los diagramas siguientes. El mapeo F_1 es una transformación fraccional lineal del disco en sí mismo, que manda a a al 0 y a 0 a algún otro lado. El propósito del mapeo F_2 es garantizar una situación en la cual la imagen de A no contenga alguna vecindad de un punto en el círculo frontera. Esto se hace justamente como en el paso (i) al usar una rama del logaritmo en la región simplemente conexa $F_1(A)$, la cual no contiene al 0. El mapeo F_3 es otra transformación fraccional lineal que regresa la imagen del 0 a 0. En esta etapa, la imagen de A no contiene un pequeño círculo γ, el cual interseca al círculo unitario C en ángulos rectos en dos puntos. Una transformación fraccional lineal F_4 que mande estos puntos a 0 e ∞, mandará a los círculos en líneas que pasan por 0 e ∞ y a la región entre ellos, a un cuarto de plano. Al elevar el cuadrado a F_5, abre esto hasta un semiplano. Finalmente, otra transformación fraccional lineal manda al semiplano en el disco unitario, con el punto negro yendo a 0 y la rotación correcta hace que la derivada en 0 de todo esto sea positiva. La función F es $F(z) = F_6(F_5(F_4(F_3(F_2(F_1(z))))))) = w$. La función inversa $g(w) = F^{-1}(w) = z$ satisface las condiciones del lema de Schwarz. Puesto que esta no

es una rotación, tenemos una desigualdad estricta $|g'(0)| < 1$, por el ejemplo resuelto 2.5.19, pero $F'(0) = 1/g'(0)$. Por lo tanto, $F'(0) > 1$, como se quería. Todas las piezas han sido ensambladas y, por tanto, la demostración del teorema del mapeo de Riemann, está ahora completa. ■

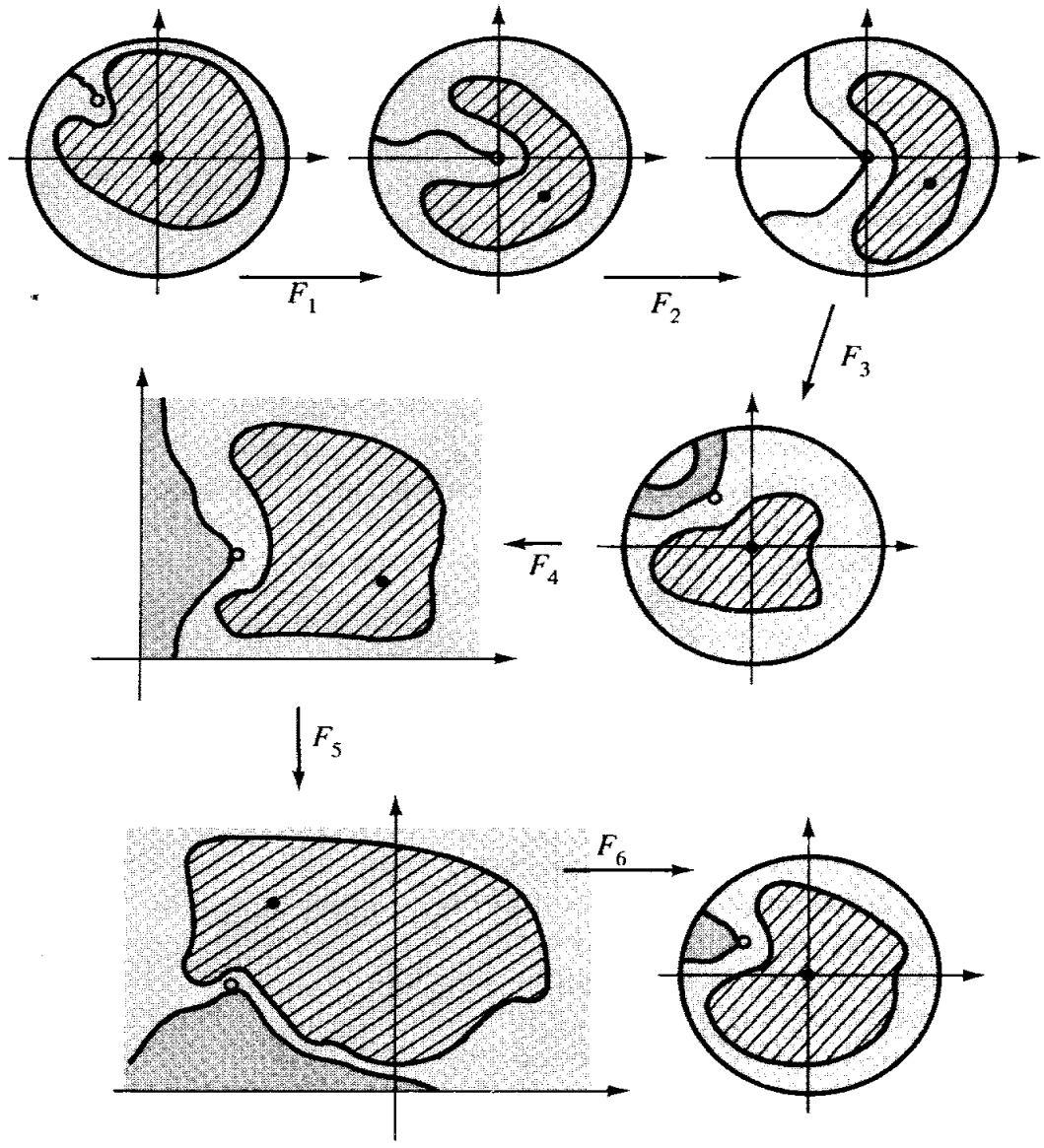
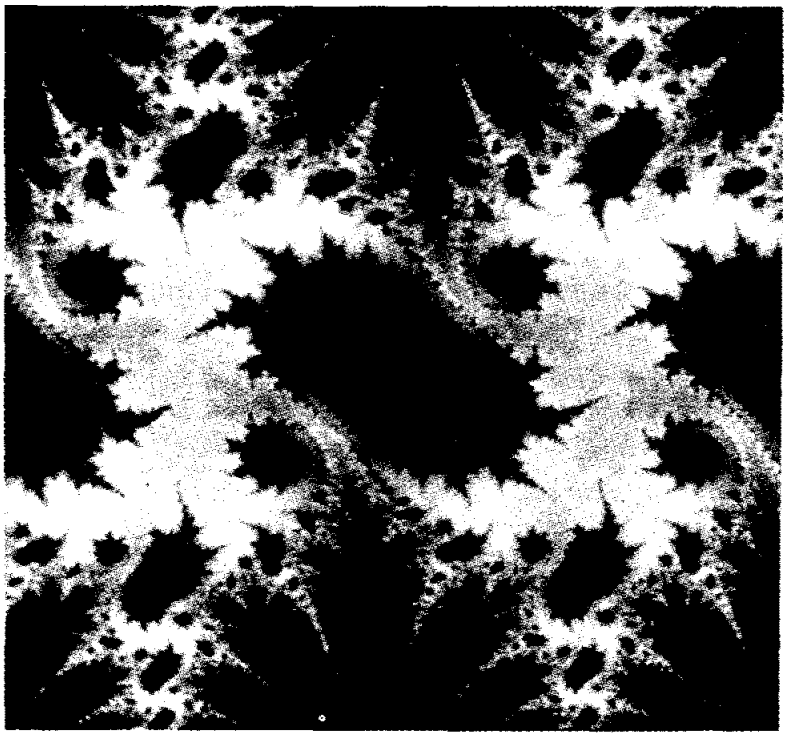


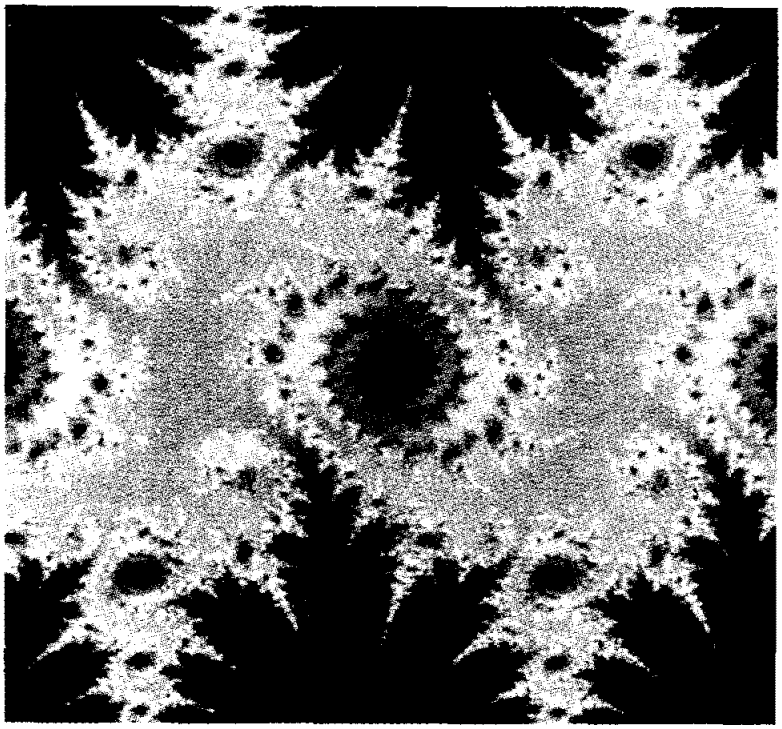
Figura 6.S.A.3. Construcción para la afirmación en la demostración del teorema del mapeo de Riemann.

SUPLEMENTO B DEL CAPÍTULO 6: LA DINÁMICA DE LOS MAPEOS ANALÍTICOS COMPLEJOS

Los dibujos mostrados en la figura 6.S.B.1 son representaciones de la dinámica de los mapeos analíticos complejos. El propósito de este complemento es propor-



a)



b)

Figura 6.S.B.1. Los diferentes sombreados representan el rango de aproximación de los puntos al infinito bajo la iteración del mapeo; la región negra consiste de los puntos "estables" que permanecen acotados bajo la iteración. En la parte *a*), el mapeo es $(1 + 0.1i)$ sen z mientras que en *b*), es $(1 + 0.2i)$ sen z. (*Cortesía de R. Devany de Boston University, con la asistencia de C. Mayberry, C. Small y S. Smith*).

investigar más consultando referencias en esta materia, tales como R. L. Devany, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Reading, Mass, Addison-Wesley, 1985; P. Blanchard, "Complex Dynamics on the Riemann Sphere", *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 11, 1984, pp. 85-141; o B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Nueva York; W. H. Freeman and Co., 1982. El tema que investigaremos está relacionado con la forma en que se comportan los puntos en el plano complejo, bajo la iteración de una función analítica. Esto tiene su origen en el clásico y hermoso trabajo de G. Julia ("Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles" *J. Math.*, vol. 8, 1981, pp. 47-245) y P. Fatou ("Sur l'iterations des fonctions transcendantes entières", *Acta Math.*, vol. 47, 1926, pp. 337-370). En este estudio, las familias normales (véase el suplemento A) juegan un importante papel. En efecto, el mismo Montel estuvo interesado en estas cuestiones; véase su *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applicationes* (1927, reimpr., Nueva York; Chelsea, 1974, cap. VIII.

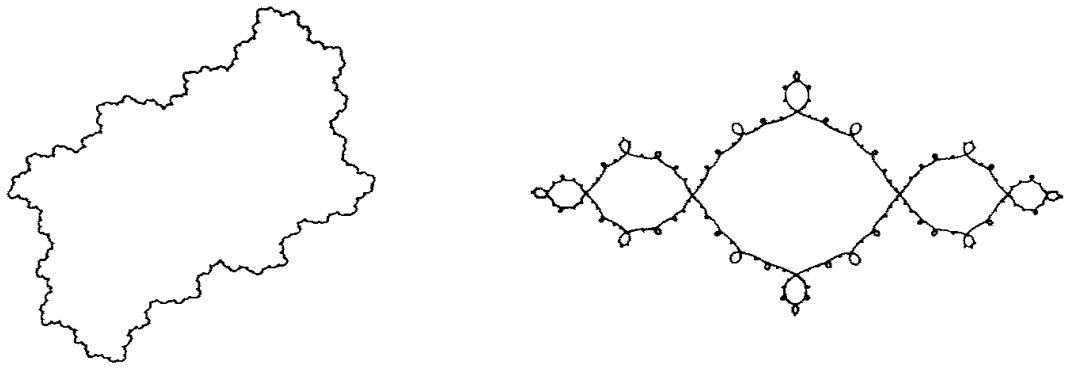
Fijemos una función entera $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Necesitamos un poco de terminología para empezar. Dado un punto $z \in \mathbf{C}$, la *órbita* de z es la sucesión de puntos $z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \ldots$, la cual también se escribe como $z, f(z), f^2(z), f^3(z), \ldots$ Pensemos a los puntos z como moviéndose sucesivamente bajo el mapeo f hacia nuevos lugares. Un *punto fijo* es un punto z tal que $f(z) = z$, esto es, un punto z que no se mueve cuando le aplicamos f. Un *punto periódico* es un punto z tal que $f^n(z) = z$, para algún entero n (llamado el periodo), donde f^n significa f compuesta con ella misma n veces.

Un punto fijo z es llamado *punto fijo atractor*, si $|f'(z)| < 1$. La razón para esta terminología es que las órbitas de puntos cercanos convergen a z; esto se debe a que cerca de z, f se comporta como un mapeo que rota por una cantidad $\arg f'(z)$ y amplifica por una cantidad $|f'(z)|$, así que cada vez que se aplica f, los puntos serán atraídos hacia z por un factor $|f'(z)|$ y conforme esto se repite, el punto tiende hacia z. Asimismo, un punto fijo es llamado un *punto fijo repulsor*, si $|f'(z)| > 1$; puntos cercanos a puntos repulsores serán empujados bajo la iteración de la función f. Similarmente, un punto periódico z, con periodo n, es llamado un *punto periódico atractor*, si $|(f^n)'(z)| < 1$; tales puntos tienen la propiedad de que las órbitas de puntos cercanos a z, tienden a la órbita de z. Asimismo, un *punto periódico repulsor* tiene la propiedad de que $|(f^n)'(z)| > 1$; las órbitas de puntos cercanos a tales puntos se irán alejando de la órbita de z.

El *conjunto de Julia* $J(f)$ de f está definido como la cerradura del conjunto de los puntos periódicos repulsores de f. Este conjunto puede ser de una complejidad notable y hermosa, usualmente es llamado un *fractal*; en efecto, en la figura 6.S.B.1 la región no oscura es el conjunto de Julia. Este enunciado descansa en un teorema, que no vamos a demostrar, el cual establece que el conjunto de Julia es la cerradura de los puntos que se van al infinito bajo la iteración de f. Es esta caracterización la que será útil en propósitos computacionales. La figura 6.S.B.2 muestra dos conjuntos de Julia más, para mapeos cuadráticos.

Hasta donde concierne al análisis complejo, uno de los resultados más importantes, es el siguiente:

El conjunto de Julia es el conjunto de puntos en el cual la familia de funciones f^n, *no es normal.*



a) *b)*

Figura 6.S.B.2. *a)* El conjunto de Julia de $f(z) = z^2 + \frac{1}{2}i$, el cual es una curva cerrada simple, pero no es diferenciable en ningún lado. *b)* El conjunto de Julia de $f(z) = z^2 - 1$, el cual contiene una cantidad infinita de curvas cerradas.

Este resultado puede ser usado como una definición alternativa para el conjunto de Julia y, en efecto, ésta fue la definición original de Fatou y Julia. Aquí únicamente demostraremos la siguiente afirmación, para dar una idea de cómo va el argumento: *Si* z *es un punto fijo repulsor de* f (*y, por lo tanto, está en el conjunto de Julia*), *entonces*, l*a familia de iteraciones* f^n *no es normal en* z. Vamos a suponer que esta familia es normal en z y a concluir una contradicción. Normal en z significa normal en una vecindad de z, en la misma manera que usamos la terminología "analítica en z". Por la definición 6.S.A.1, la familia f^n tiene una subsucesión que converge uniformemente en una vecindad de z. Ya que $f(z) = z$ y $|f'(z)| > 1$, se sigue, de la regla de la cadena, que

$$|f^{n\prime}(z)| = |f'(z)|^n \to \infty$$

esto es, que la sucesión de las derivadas de f^n, evaluadas en z, deben tender a infinito conforme $n \to \infty$. Sin embargo, la sucesión de derivadas debe converger a la derivada de la función límite, por el teorema de convergencia analítica (3.1.8), la cual es finita, lo que nos da la contradicción requerida.

Esta discusión representa tan sólo una muestra de la gran colección de muy interesantes y hermosos resultados. Esperamos que el lector haya sido motivado para leer algunas de las referencias que hemos dado sobre el tema y otras referencias que se encontrarán en estas fuentes y que explorarán el tema más profundamente. Insistimos en señalar que la iteración de mapeos complejos es tan sólo una parte del amplio y creciente campo llamado *dinámica caótica*. Para estos aspectos más generales, el lector puede consultar el libro de Devany citado anteriormente, o el libro *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, de J. Guckenheimer y P. Holmes, Nueva York; Springer-Verlag, 1983.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. Sea f analítica en $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ y sea $f(1/n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. ¿Qué podemos decir acerca de f?

2. Suponga que f y g son analíticas en el disco $A = \{z \text{ tal que } |z| < 2\}$ y que ni $f(z)$ ni $g(z)$ son 0 para $z \in A$. Si

$$\frac{f'(1/n)}{f(1/n)} = \frac{g'(1/n)}{g(1/n)} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

muestre que existe una constante c tal que $f(z) = cg(z)$ para toda $z \in A$. (*Sugerencia*: Considere $(f/g)'(1/n)$.)

3. Suponga que f es una función entera y que existe una sucesión acotada de números reales distintos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tal que $f(a_k)$ es real para toda k.

a) Muestre que $f(x)$ es real para todo real x.

b) Suponga que $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$ y que $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$. Muestre que si $f(a_{2n+1}) = f(a_{2n})$ para toda n, entonces f debe ser constante.

4. Si f es analítica en el conjunto $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ y $f(1 - 1/n) = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ¿se sigue que $f = 0$?

5. Sea f analítica y acotada en $\{z \mid \text{Im } z < 1\}$ y suponga que f es real en el eje real. Muestre que f es constante.

6. Sea f analítica y acotada en $|z + i| > \frac{1}{2}$ y real en $]-1, 1[$. Muestre que f es constante. (*Sugerencia:* utilice el principio de reflexión de Schwarz de la sección 6.1)

7. Sea f entera y suponga que para $z = x$ real, $f(x + 1) = f(x)$. Muestre que $f(z + 1) = f(z)$ para toda $z \in \mathbf{C}$.

8. Muestre que para $n > 2$, todas las raíces de $z^n - (z^2 + z + 1)/4 = 0$ están dentro del círculo unitario.

9. Suponga que f es analítica en $\mathbf{C}$ excepto por los polos en $n \pm i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$. ¿Cuál es la longitud del intervalo más grande $]x_0 - R, x_0 + R[$ en $\mathbf{R}$, sobre el cual $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2/2 + \cdots + f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k/k! + \cdots$ converge?

10. Sea $f: A \to B$ analítica y sobre; asuma que $z_1, z_2 \in A$, $z_1 \neq z_2$ implica que $f(z_1) \neq f(z_2)$. Demuestre que f^{-1} es analítica.

11. Sea f un polinomio. Muestre que la integral de f'/f alrededor de todo círculo suficientemente grande centrado en el origen, es $2\pi i$ veces el grado de f.

12. *a*) Demuestre el *teorema de convergencia de Vitali. Sea* f_n *analítica en un dominio* A *tal que*

(i) *Para cada disco cerrado* B *en* A, *existe una constante* M_B *tal que* $|f_n(z)| \leq M_B$ *para toda* $z \in B$ *y* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(ii) *Existe una sucesión de puntos distintos* z_k *de* A *que converge a* $z_0 \in A$ *tal que* $\lim_{n \to \infty} f_n(z_k)$ *existe para* $k = 1, 2, \ldots$

Entonces f_n *converge uniformemente en todo disco cerrado en* A; *el límite es una función analítica.* (*Sugerencia*: primero tome el caso de un disco B con radio R y $z_k \to z_0$ = centro de B. Utilice el lema de Schwarz para mostrar que $|f_n(z) - f_n(z_0)| \leq 2M|z - z_0|/R$. Entonces muestre que

$$|f_n(z_0) - f_{n+p}(z_0)| \leq \frac{4M|z - z_0|}{R} + |f_n(z) - f_{n+p}(z)|$$

y deduzca que $f_n(z_0)$ converge. Sea

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - f_n(z_0)}{z - z_0}$$

y concluya que $g_n(z_0)$ converge. Muestre que en general, si

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}(z - z_0)^k$$

entonces $a_{n,k} \to a_k$ conforme $n \to \infty$. Deduzca que $f_n(z)$ converge uniformemente en $|z - z_0| < R - \varepsilon$. Luego utilice la conectividad de A para deducir la convergencia uniforme en cualquier disco cerrado.)

b) Muestre que si se omite la condición (i), la conclusión es falsa. (Sea $f_n(z) = z^n$.)

13. Sea f analítica en una región A y sea γ una curva cerrada en A homotópica a un punto. Muestre que

$$\operatorname{Re}\left(\int_\gamma \frac{f'}{f}\right) = 0$$

14. Sea $f(z)$ analítica en $\{z \mid 0 < |z| < 2\}$ y suponga que, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_{|z|=1} z^n f(z)\, dz = 0$$

Muestre que f tiene una singularidad removible en $z = 0$.

15. Sea f analítica y acotada en $A = \{z$ tal que $|z| < 1\}$. Muestre que si f es uno a uno en $\{z \mid 0 < |z| < 1\}$, entonces f es uno a uno en A.

16. Sea $|f(z)| \le 1$ cuando $|z| = 1$ y sea $f(0) = \frac{1}{2}$, con f analítica. Demuestre que

$$|f(z)| \le \begin{cases} \dfrac{3|z| + 1}{2} & \text{para toda } |z| \le \frac{1}{3} \\ 1 & \text{para } \frac{1}{3} \le |z| \le 1 \end{cases}$$

17. Sean f y g continuas para $|z| \le 1$ y analíticas para $|z| < 1$. Suponga que $f = g$ en el círculo unitario. Demuestre que $f = g$.

18. Si $f(z)$ es analítica para $|z| < 1$ y si $|f(z)| \le 1/(1 - |z|)$, muestre que los coeficientes de la expansión $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ están sujetos a la desigualdad

$$|a_n| \le (n + 1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e(n + 1)$$

19. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$ es $1/\sqrt{2}$.

b) Una función entera que es constante en el círculo unitario es constante.

c) El residuo de $1/[z^{10}(z-2)]$ en el origen es $-(2)^{-10}$.

d) Si f_n es una sucesión de funciones enteras que convergen a una función f y si la convergencia es uniforme en el círculo unitario, entonces f es analítica en el disco unitario abierto.

e) $$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

f) Para f suficientemente grande, sen z transforma al exterior del disco de radio r ($\{z$ tal que $|z| > r\}$) en cualquier vecindad preasignada de ∞.

g) Sea $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica en el disco unitario abierto y sea f con una singularidad no removible en i. Entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor de f en 0, es 1.

h) Sea $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica y no constante, y sea D un dominio en $\mathbf{C}$. Entonces f transforma la frontera de D en la frontera de $f(D)$.

i) Sea f analítica en $\{z \mid 0 < |z| < 1\}$ y suponga que $|f(z)| \leq \log(1/|z|)$. Entonces f tiene una singularidad removible en 0.

j) Suponga que $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es entera y que f tiene exactamente k ceros en el disco unitario abierto pero ninguno sobre el círculo unitario. Entonces existe una $\varepsilon > 0$ tal que cualquier función entera g que satisface $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$ para $|z| = 1$, debe también tener exactamente k ceros en el disco unitario abierto.

20. Demuestre el *teorema de Phragmen-Lindelof*:

a) *Suponga que* f *es analítica en un dominio que incluye la banda* $G = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$. *Si* $\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in G}} f(z) = 0$ *y si* $|f(it)| \leq 1$ y $|f(1 + it)| \leq 1$ *para todo real* t, *entonces* $|f(z)| \leq 1$ *para toda* $z \in G$.

b) *Si* g *es analítica en un dominio que contiene a* G, si $\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in G}} g(z) = 0$ *y si* $|g(it)| \leq M$ *y* $|g(1 + it)| \leq N$ *para todo real* t, *entonces* $|g(z)| \leq M^{1 - \mathrm{Re}\, z}\, N^{\mathrm{Re}\, z}$.)

(*Sugerencia*: aplique el resultado de *a*) a $f(z) = g(z)/M^{1-z}N^z$.)

21. ¿Es correcto decir que $1/\sqrt{z}$ tiene un polo en $z = 0$?

22. Demuestre que para el valor principal del logaritmo, $|\log z| \leq r/(1 - r)$ si $|1 - z| \leq r < 1$.

23. *a*) Sea $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ continua en $\mathbf{C}$ y analítica en $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$. ¿Es f en efecto entera?

b) Sea $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica en $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$. ¿Es f entera?

24. Sea $P(z)$ un polinomio. Demuestre que

$$\int_{|z|=1} P(z)\, d\bar{z} = -2\pi i P'(0)$$

25. Encuentre el radio de convergencia de la serie $\sum_0^{\infty} 2^n z^n$.

26. Muestre que $f(z) = (z^2 + 1)/(z^2 - 1)$ es uno a uno en $\{z \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$. ¿Es uno a uno en algún conjunto mayor?

7

Métodos asintóticos

En este capítulo se dará una introducción a la teoría de los métodos asintóticos; esto es, al estudio de funciones $f(z)$ conforme $z \to \infty$. Este capítulo empieza con productos infinitos y la función gamma. Estos tópicos son interesantes por sí mismos pero también proporcionan al estudiante una motivación para el estudio de expansiones asintóticas, las cuales son analizadas en la sección 7.2. Una de las principales técnicas utilizadas en este análisis, el método del descenso más pronunciado, y su variante, el método de la fase estacionaria, son también considerados y son aplicados a la fórmula de Stirling y a las funciones de Bessel, en la sección 7.3.

7.1. PRODUCTOS INFINITOS Y LA FUNCIÓN GAMMA

Para estudiar la función gamma y los tópicos subsecuentes, vamos primero a desarrollar algunas propiedades básicas de los productos infinitos. Éstos son un tanto análogos a las sumas infinitas consideradas en la sección 3.1. Para orientarse y motivarse, el estudiante debe notar que cualquier polinomio $p(z)$ puede ser escrito en la forma

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j)$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las raíces de $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ y Π quiere decir "tomar el producto de", de la mista manera que Σ quiere decir "tomar la suma de". Es natural pretender generalizar esta expresión a funciones enteras y al hacer esto, nos encontramos con el concepto de un producto infinito.

Productos infinitos

Sea $z_1, z_2, \ldots$ una sucesión de números complejos. Queremos considerar

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n) = (1 + z_1)(1 + z_2) \cdots$$

Escribimos $1 + z_n$ porque si el producto converge, el término general se debe aproximar a 1, esto es, $z_n \to 0$. Algunos tecnicismos están involucrados cuando $z_n = -1$. Queremos permitir que el producto sea cero y aun ser capaces de imponer algunas condiciones de convergencia.

La siguiente definición se ajusta a nuestras necesidades.

Definición 7.1.1. *Se dice que el producto* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$ ***converge*** *si únicamente un número finito de* z_n *es igual* a -1, *y si* $\prod_{k=m}^{n} (1 + z_k) = (1 + z_m) \cdots (1 + z_n)$ *(donde* $z_k \neq -1$ para $k \geq m$*) converge conforme* $n \to \infty$ *a un número distinto de cero.*

Hacemos

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k)$$

(*Este producto será* 0 *si alguna* $z_k = -1$ *y distinta de cero de otro modo.*)

Por ejemplo, considere

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots$$

El n-*ésimo producto parcial es*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

Por lo tanto, el producto no converge, puesto que hemos pedido la convergencia a un número distinto de 0. (Decimos que el producto *diverge a cero.*) Si comenzamos en $n = 1$, el producto aun divergiría. Una razón para esta terminología y convención, es que la sucesión de logaritmos de los productos parciales diverge a $-\infty$. La relevancia de esto se hace clara con el teorema de convergencia que sigue.

Al empezar con un producto dado después del punto donde alguna $z_n = -1$, podemos asumir que $z_n \neq -1$ para toda n. Tal suposición no impone verdaderas restricciones en los criterios de convergencia.

Teorema de convergencia para productos 7.1.2

(i) *Si* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$ *converge, entonces* $z_n \to 0$.

(ii) *Suponga que* $|z_n| < 1$ *para toda* $n = 1, 2, \ldots$ *de tal manera que* $z_n \neq -1$. *Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$ *converge, si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} \log (1 + z_n)$ *converge.* (log *es la rama principal;* $|z_n| < 1$ *implica que* $\log (1 + z_n)$ *está definido.*)

(iii) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |z_n|$ *converge si* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *converge.* (*En este caso decimos que* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$ *converge absolutamente.*)

(iv) *Si* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |z_n|)$, *converge, entonces* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n)$ *converge.*

Este teorema resume las principales propiedades de convergencia de los productos infinitos. Los criterios (iii) y (iv), son particularmente importantes y son fáciles de aplicar. Debido a que la demostración de este teorema es técnica, ésta aparece al final de la sección. Aquí únicamente se discutirá la plausibilidad del teorema. El criterio (i) fue explicado al inicio de esta sección. Para explicar (ii), observe que si hacemos $S_n = \sum_1^n \log(1 + z_k)$ y $P_n = \prod_1^n (1 + z_k)$, entonces

$$P_n = e^{S_n}$$

Que (ii) es plausible se sigue fácilmente de esta ecuación. En efecto, si $S_n \to S$, es claro que $P_n \to e^S$. Una vez que (ii) es demostrado, (iii) y (iv) se siguen. El siguiente corolario no requiere demostración, ya que está implícito en la discusión precedente.

Corolario 7.1.3. *Si* $|z_n| < 1$ *y* $\Sigma \log(1 + z_n)$ *converge a* S, *entonces* $\Pi (1 + z_n)$ *converge a* e^S.

Este corolario es útil, algunas veces, pero cuando se aplica a problemas concretos, la suma de los logaritmos es, a menudo, difícil de manejar.

Sea $f_n(z)$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto $B \subset \mathbf{C}$. La manera de definir el concepto de convergencia uniforme de $\prod_1^\infty (1 + f_n)$ debe ser totalmente clara.

Definición 7.1.4. *El producto*

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$$

se dice que ***converge uniformemente*** *en* B *si, para alguna* m, $f_n(z), \neq -1$ *para* $n \geq m$ *y toda* $z \in B$, *si la sucesión* $P_n(z) = \prod_{k=m}^{n} [1 + f_k(z)]$ *converge uniformemente en* B *para alguna* P(z) *y si* $P(z) \neq 0$ *para toda* $z \in B$ (véase la sección 3.1 para la definición de convergencia de una sucesión de funciones).

El siguiente resultado se sigue del teorema de convergencia analítica (3.1.8).

Analiticidad de productos infinitos 7.1.5. *Suponga que* $f_n(z)$ *es una sucesión de funciones analíticas en una región* A *y que* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)]$ *converge uniformemente a* f(z) *en cualquier disco cerrado en* A. *Entonces* f(z) *es analítica en* A. *Tal convergencia uniforme se satisface si* $|f_n(z)| < 1$ *para* $n \geq m$ *y si* $\sum_{n=m}^{\infty} \log[1 + f_n(z)]$ *converge uniformemente, o si* $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ *converge uniformemente (en los discos cerrados en ambos casos).*

Para verificar la validez de la última afirmación, uno debe comprobar que la demostración del teorema de convergencia para productos, funciona para la convergencia uniforme; esto se deja como un ejercicio.

Productos canónicos

El siguiente útil teorema es un caso especial de un teorema de Weierstrass que construye la función entera más general, con un conjunto dado de ceros. El caso especial descrito aquí es aplicable a muchos ejemplos, no obstante ilustra las principales ideas del caso general. (Para un enunciado del caso general, véanse los ejercicios 10 y 14 al final de esta sección.)

Teorema sobre productos canónicos 7.1.6. *Sea* $a_1, a_2, \ldots$ *una sucesión dada (posiblemente finita) de números complejos distintos de cero, tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$$

Entonces, si g(z) *es cualquier función entera, la función*

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n} \right] \tag{1}$$

es entera. El producto converge uniformemente en los discos cerrados, tiene ceros en $a_1, a_2, \ldots$, *y tiene un cero de orden* k *en* z = 0, *pero no tiene otros ceros. Más aún, si* f *es cualquier función entera con estas propiedades, ésta puede ser escrita en la misma forma (ecuación* (1)). *En particular,* f *es entera sin ceros, si y sólo si* f *tiene la forma* $f(z) = e^{g(z)}$ *para alguna función entera* g. *El producto* $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n)e^{z/a_n}$ *es llamado un* ***producto canónico.***

La demostración técnica de este teorema aparece al final de esta sección. El resultado es bastante plausible si tomamos que el producto se anula exactamente cuando z es igual a alguna a_n y que z^k tiene un cero de orden k en 0. También, $e^{g(z)}$ no se anula en ningún lado, ya que $e^w \neq 0$ para toda $w \in \mathbf{C}$. Notemos que los puntos $a_1, a_2, \ldots$ no necesitan ser distintos; cada uno puede repetirse un número finito de veces. Si a_n es repetido l veces, f tendrá un cero de orden l en a_n.

El teorema sobre productos canónicos se aplicará varias veces en el resto de esta sección. Una importante aplicación del teorema se encuentra en el ejemplo resuelto 7.1.10, donde se demuestra que

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \tag{2}$$

Otra aplicación del teorema es a la función gamma.

La función gamma

La función gamma es una útil solución a un problema de interpolación que ha sido estudiado desde finales del siglo XVIII. ¿Cuál es la mejor manera de definir una función continua de una variable real o compleja que coincida con la función factorial en los enteros? La función gamma, $\Gamma(z)$ es una solución. Es analítica en $\mathbf{C}$ excepto para los polos simples en $0, -1, -2, \ldots$, y $\Gamma(n+1) = n!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ La importancia de esta función fue comprendida por Euler Gauss en los inicios del siglo XVIII. Aquí se dan dos definiciones equivalentes de la función gamma; la primera será en términos de productos infinitos, la segunda en términos de una fórmula integral. Estas dos fórmulas se atribuyen a Euler. Gauss y Legendre hicieron también importantes contribuciones. Los principales hechos que se incluyen en la siguiente discusión y en los ejercicios del final de la sección, son resumidos en la tabla 7.1.1, al final de esta sección.

Para la primera definición, vamos a empezar con una función asociada que está definida por el producto canónico

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \tag{3}$$

Por el teorema sobre productos canónicos, esta función es entera, con ceros simples en los enteros negativos $-1, -2, -3, \ldots$ Esta función satisface la identidad

$$zG(z)G(-z) = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi} \tag{4}$$

debido a la ecuación (2). Consideremos ahora la función

$$H(z) = G(z-1) \tag{5}$$

Esta función tiene ceros en $0, -1, -2, \ldots$ Así, por el teorema sobre productos canónicos, podemos escribir

$$H(z) = e^{g(z)} z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} = z e^{g(z)} G(z) \tag{6}$$

para alguna función entera $g(z)$. Se demostrará ahora que $g(z)$ es constante. Usando el teorema de convergencia para productos, obtenemos

$$\log H(z) = \log z + g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right]$$

Ya que la convergencia es uniforme en discos cerrados, podemos diferenciar término a término

$$\frac{d}{dz}\log H(z) = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \tag{7}$$

Similarmente, por la ecuación (3),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\log G(z-1) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Comparando las ecuaciones (7) y (8), y usando la ecuación (5), vemos que $g'(z) = 0$, así que $g(z)$ es constante. (La parte (ii) del teorema de convergencia para productos es realmente válida sólo para $|z| < 1$, pero esta región de validez es suficiente ya que dos funciones enteras que coinciden en $|z| < 1$ son iguales, por el teorema de Taylor o por el teorema de identidad.)

El valor constante $g(z) = \gamma$ es llamado la *constante de Euler*. Podemos determinar una expresión para ésta como sigue. Por las ecuaciones (3), (5) y (6), obtenemos

$$G(z-1) = ze^{\gamma}G(z) \tag{9}$$

y así, si hacemos $z = 1$, entonces $G(0) = 1\ e^{\gamma}G(1)$. En consecuencia, por la ecuación (3),

$$e^{-\gamma} = \prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-1/n} = \prod_{1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-1/n}$$

Al notar que

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)e^{-1/k} &= \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\,e^{-1-1/2-1/3-\cdots-1/n}\\ &= (n+1)e^{-1-1/2-\cdots-1/n}\\ &= ne^{-1-1/2-\cdots-1/n} + e^{-1-1/2-\cdots-1/n}\end{aligned}$$

Obtenemos que $e^{-\gamma} = \lim_{n\to\infty} ne^{-1-1/2-\cdots-1/n}$. Tomando logaritmos, encontramos que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) \tag{10}$$

No necesitamos una demostración por separado de que el límite en la ecuación (10) existe y es finito, ya que esto se sigue a partir de lo que hemos hecho. Numéricamente, podemos calcular a partir del límite en la ecuación (10), que $\gamma \approx 0.57716\cdots$.

Estamos ahora listos para definir la función gamma. Hagamos

$$\Gamma(z) = [ze^{\gamma z}G(z)]^{-1} = \left[ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right] \tag{11}$$

Puesto que G es entera, podemos concluir que $\Gamma(z)$ es meromorfa, con polos simples en $0, -1, -2, \ldots$ Puesto que, por la ecuación (9), $G(z-1) = ze^{\gamma}G(z)$, encontramos que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{para} \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{12}$$

la cual es llamada la *ecuación funcional para la función gamma* (véase el ejercicio 7). También $\Gamma(1) = 1$, pues $\Gamma(z) = [ze^{\gamma z}G(z)]^{-1}$ y $G(1) = e^{-\gamma}$, por nuestra construcción de γ. Así, de la ecuación (12), vemos que $\Gamma(2) = 1 \cdot 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot 1$, $\Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1$, y en general, como lo hicimos notar en el principio,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{13}$$

Esta fórmula nos permite obtener aproximaciones manejables par $n!$, las cuales se deducen en la sección 7.3. (La figura 7.1.1 muestra una gráfica de $\Gamma(x)$ para x real.)

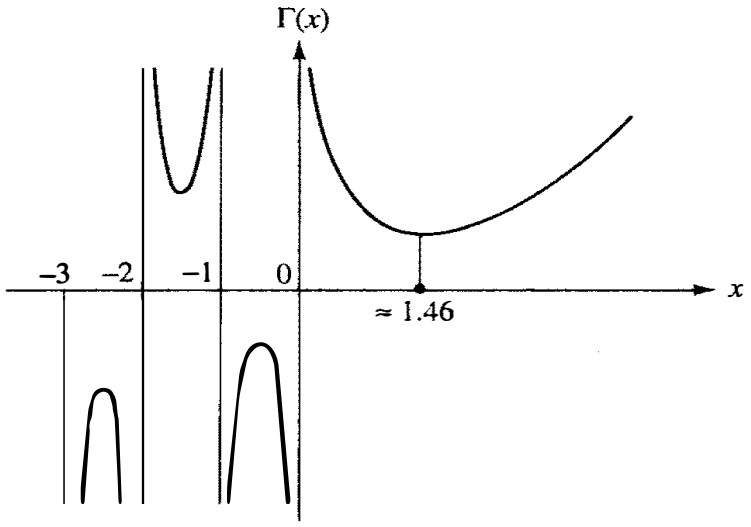


Figura 7.1.1. Gráfica de $\Gamma(x)$ para x real.

De la ecuación $zG(z)G(-z) = (\text{sen } \pi z)/\pi$ (véase la ecuación (4)), obtenemos la relación

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen } \pi z} \tag{14}$$

A partir de esto se sigue que $\Gamma(z) \neq 0$ para toda z. (Por supuesto, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$) Sabemos que esto debe de ser cierto porque si $\Gamma(z) = 0$, tendríamos $\pi = \Gamma(z)\Gamma(1-z)\,\text{sen } \pi z = 0$ en tanto $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. (Éstos son los puntos en los cuales sen πz se anula, así que la multiplicación cruzada no es válida en esos puntos.)

Pero también sabemos que $\Gamma(z) \neq 0$ si $z = 1, 2, 3\ldots$, ya que $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Así, hemos demostrado que $\Gamma(z) \neq 0$ si $z \neq 0, -1, -2, \ldots$

Si hacemos $z = \frac{1}{2}$ en la ecuación (14), obtenemos $[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = \pi$. Pero $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$. Para ver esto, note que Γ es real para reales positivos z; hemos mostrado que Γ no tiene ceros y que $\Gamma(n+1) = n! > 0$. Por lo tanto, ya que $\Gamma(x)$ es continua para $x \in]0, \infty[$ (pues Γ es analítica), se sigue, del teorema del valor intermedio, que $\Gamma(x) > 0$ para toda $x \in]0, \infty[$ (como en la figura 7.1.1). Así, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (en vez de la otra posibilidad. $-\sqrt{\pi}$).

La *fórmula de Euler* para la función gamma es

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right] = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{15}$$

Esta fórmula se demuestra como sigue. Por definición,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= z \left(\lim_{n \to \infty} e^{(1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n)z} \right) \left[\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right] \\ &= z \left[\lim_{n \to \infty} e^{(1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \log n)z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right] \\ &= z \lim_{n \to \infty} \left[n^{-z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right] \end{aligned}$$

ya que $n^{-z} = e^{-\log n \cdot z}$. Así, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= z \lim_{n \to \infty} \left[\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right] \\ &= z \lim_{n \to \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-z} \right] \right\} \end{aligned}$$

Se sigue ahora la primera igualdad en la ecuación (15). Se le pide al estudiante demostrar la segunda en el ejercicio 11.

Otra propiedad importante de la función gamma se da en la *fórmula de Gauss*: Para cualquier entero positivo fijo $n \geq 2$,

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{(1/2) - nz} \Gamma(nz) \tag{16}$$

Para demostrar esta fórmula, notemos primero que podemos escribir la fórmula de Euler (ecuación (15)) como

$$\Gamma(z) = \lim_{m \to \infty} \frac{m! m^z}{z(z+1)\cdots(z+m)} = \lim_{m \to \infty} \frac{(m-1)! m^z}{z(z+1)\cdots(z+m-1)}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{(mn-1)!(mn)^z}{z(z+1)\cdots(z+mn-1)}$$

Definimos $f(z)$ como sigue:

$$f(z) = \frac{n^{nz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nz)}$$

$$= \frac{n^{nz-1}\prod_{k=0}^{n-1}\lim_{m\to\infty}\dfrac{(m-1)!m^{z+k/n}}{\left(z+\frac{k}{n}\right)\left(z+\frac{k}{n}+1\right)\cdots\left(z+\frac{k}{n}+m-1\right)}}{\lim_{m\to\infty}\dfrac{(mn-1)!(mn)^{nz}}{nz(nz+1)\cdots(nz+nm-1)}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{[(m-1)!]^n m^{(n-1)/2} n^{mn-1}(nz)(nz+1)\cdots(nz+mn-1)}{(mn-1)!\prod_{k=0}^{n-1}[(nz+k)(nz+k+n)\cdots(nz+k+mn-n)]}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{[(m-1)!]^n m^{(n-1)/2} n^{nm-1}}{(nm-1)!}$$

Así, f es constante. Haciendo $z = 1/n$ nos da

$$f(z) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) > 0$$

así que

$$[f(z)]^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

al utilizar la ecuación (14). Del hecho de que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cdots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

(véase el ejercicio 28, sección 1.2), obtenemos

$$[f(z)]^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

Puesto que $f(z) > 0$,

$$f(z) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}}$$

Se sigue, por tanto, la fórmula de Gauss.

Si tomamos el caso especial de la ecuación (16), en el cual $n = 2$, obtenemos la *fórmula de duplicación de Legendre*:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) \tag{17}$$

Vamos enseguida a mostrar que el residuo de $\Gamma(z)$ en $z = -m$, $m = 0, 1, 2\ldots$ es $(-1)^m/m!$. En efecto

$$(z+m)\Gamma(z) = (z+m)\frac{\Gamma(z+1)}{z} = (z+m)\frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}$$

Más generalmente, encontramos que

$$(z+m)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\cdots(z+m-1)}$$

Haciendo $z \to -m$, obtenemos

$$\frac{\Gamma(1)}{-m(-m+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^m}{m!}$$

como se requería.

Existe una importante expresión para $\Gamma(z)$ como una integral. Para Re $z > 0$, vamos a establecer la siguiente fórmula, conocida como la *integral de Euler para* $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \tag{18}$$

El estudiante podría pensar que esta expresión puede ser evaluada mediante los métodos de la sección 4.3. Desafortunadamente, las hipótesis del teorema 4.3.8 no se satisfacen en este caso y se necesita entonces otro método para demostrar la ecuación (18). Vamos a empezar por definir

$$F_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt$$

y a mostrar que

$$F_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{19}$$

Por la fórmula de Euler (ecuación (15)), tendremos entonces demostrado que $F_n(z) \to \Gamma(z)$ conforme $n \to \infty$. Para demostrar la ecuación (19), notamos que al cambiar variables y al hacer $t = ns$,

$$F_n(z) = n^z \int_0^1 (1-s)^n s^{z-1}\, ds$$

Ahora, integramos esta ecuación por partes sucesivamente, el primer paso es

$$F_n(z) = n^z \left[\frac{1}{z} s^z (1-s)^n \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z\, ds \right] = n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^z\, ds$$

Repitiendo este procedimiento, integramos por partes n veces y obtenemos

$$F_n(z) = n^z \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 S^{z+n-1}\, ds = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

lo cual establece la ecuación (19).

A partir del ejercicio 15, obtenemos una fórmula que debe ser bien conocida del cálculo

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \to e^{-t} \quad \text{conforme } n \to \infty \tag{20}$$

Si hacemos $n \to \infty$ en la ecuación (19), la validez de la ecuación (18) parece asegurada. Sin embargo, tal afirmación no se justifica tan fácilmente.[1] Para hacerlo, procedemos como sigue. De las ecuaciones (15) y (19), sabemos que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt \tag{21}$$

Sea $f(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$. Esta integral converge ya que $|e^{-t} t^{z-1}| \le e^{-t} t^{Re\, z - 1}$ y Re $z > 0$ (compare con $\int_1^\infty e^{-t} t^p\, dt$ y $\int_0^1 t^p\, dt$, $p > -1$). Necesitaremos saber "que tan rápido" $[1 - (t/n)]^n \to e^{-t}$. La siguiente desigualdad se cumple:

$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2 e^{-t}}{n} \text{ para } 0 \le t \le n \tag{22}$$

(Esto se sigue de un lema del cálculo cuya demostración se pide en el ejercicio 15.)

De la ecuación (21) y de la definición de f, tenemos

$$f(z) - \Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1}\, dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \right\} \tag{23}$$

[1] Al lector que ha estudiado los teoremas de convergencia en la teoría de integración de Lebesque se le apremia para que los aplique a esta integral.

Para mostrar que el límite (ecuación (23)) es cero note que $\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \to 0$ conforme $n \to \infty$. En efecto, si $t > 1$, entonces $|e^{-t}t^{z-1}| \le e^{-t}t^m$, donde $m \ge \operatorname{Re} z > 0$, es un entero. Pero del cálculo (o directamente, usando integración por partes), sabemos que $\int_0^\infty e^{-t}t^m\,dt < \infty$, así que $\int_n^\infty e^{-t}t^m\,dt \to 0$ conforme $n \to \infty$. Resta mostrar que

$$\int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\,dt \to 0 \text{ conforme } n \to \infty$$

Por la desigualdad (22),

$$\left|\int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\,dt\right| \le \int_0^n \frac{e^{-t}t^{\operatorname{Re} z+1}}{n}\,dt \le \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{\operatorname{Re} z+1}\,dt$$

la cual se aproxima a cero conforme $n \to \infty$, ya que la integral converge. Esto completa la demostración de la ecuación (18); esto es, para $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

De hecho, si examinamos esa demostración, vemos que conforme $0 < \varepsilon < R$, $\varepsilon \le |z| \le R$ y $(-\pi/2) + \delta \le \arg z \le (\pi/2) - \delta$, $\delta > 0$, la convergencia es uniforme en z (véase el ejercicio 18).

Demostraciones técnicas de los teoremas 7.1.2 y 7.1.6

Teorema de convergencia para productos 7.1.2.

(i) *Si* $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ *converge, entonces* $z_n \to 0$.

(ii) *Suponga que* $|z_n| < 1$ *para toda* $n = 1, 2, \ldots$ *de modo que* $z_n \neq -1$. *Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ *converge si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1 + z_n)$ *converge.* (log *es la rama principal;* $|z_n| < 1$ *implica que* $\log(1 + z_n)$ *está definido.*)

(iii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ *converge si* $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ *converge.* (*En este caso decimos que* $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ *converge absolutamente.*)

(iv) *Si* $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ *converge, entonces* $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|)$ *converge.*

Demostración

(i) Podemos asumir que $z_n \neq -1$ para toda n. Sea $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k)$; por suposición, $P_n \to P$ para alguna $P \neq 0$. Así $P_n/P_{n-1} \to 1$, por el teorema de cocientes para límites. Pero $P_n/P_{n-1} = 1 + z_n$. En consecuencia, $z_n \to 0$.

(ii) Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + z_k)$ y sea $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k)$. Entonces, $P_n = e^{S_n}$. Es claro que si S_n converge, entonces también P_n converge pues e^z es continua.

Recíprocamente, suponga que $P_n \to P \neq 0$. Para mostrar que S_n converge, es suficiente mostrar que para n suficientemente grande, toda S_n está en una banda de periodicidad (en la cual e^z tiene una inversa continua).

No podemos escribir $\log \sum_{k=1}^{n} (1 + z_k) = \log P_n$, porque P_n podría estar en el eje real negativo. En vez de eso, para los propósitos de esta demostración, vamos a escoger la rama del log tal que P esté en su dominio A. Ahora $P_n \to P$, así que $P_n \in A$, si n es grande y, por lo tanto, podemos escribir $S_n = \log P_n + k_n \cdot 2\pi i$ para un entero k_n. Así

$$(k_{n+1} - k_n) \cdot 2\pi i = \log(1 + z_{n+1}) - (\log P_{n+1} - \log P_n)$$

Puesto que el lado derecho de la ecuación es puramente imaginario,

$$(k_{n+1} - k_n) \cdot 2\pi i = i[\arg(1 + z_{n+1}) - \arg P_{n+1} + \arg P_n]$$

Por (i), $z_{n+1} \to 0$ y en consecuencia, $\arg(1 + z_{n+1}) \to 0$. También, $\arg P_n \to \arg P$ y, por lo tanto, $k_{n+1} - k_n \to 0$ conforme $n \to \infty$. Ya que las k_n son enteros, deben ser igual a un entero fijo k, para n grande. En consecuencia, $S_n = \log P_n + k \cdot 2\pi i$, así, conforme $n \to \infty$, $S_n \to S = \log P + k \cdot 2\pi i$.

(iii) Por (ii), es suficiente mostrar que para $x_n \geq 0$, Σx_n converge si $\Sigma \log(1 + x_n)$ converge. En efecto, puesto que

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \qquad \text{para } |z| < 1$$

vemos que

$$\frac{\log(1 + z)}{z} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \cdots$$

tiene una singularidad removible en $z = 0$ y que

$$\lim_{z \to 0} \frac{\log(1 + z)}{z} = 1$$

Suponga que Σx_n converge, entonces $x_n \to 0$. Así, dada $\varepsilon > 0$, $0 \leq \log(1 + x_n) \leq (1 + \varepsilon)x_n$ para n suficientemente grande. Por el criterio de comparación, $\Sigma \log(1 + x_n)$ converge. Si usamos $(1 - \varepsilon)x_n \leq \log(1 + x_n)$, obtenemos el inverso.

(iv) Suponga que $\Pi(1 + |z_n|)$ converge. Entonces, por (ii), $\Sigma \log (1 + |z_n|)$ converge. (Debemos empezar con términos tales que se satisfagan las condiciones de (ii).) En efecto, el argumento en (iii) muestra que $\Sigma \log (1 + z_n)$ converge absolutamente y, por tanto, converge. Así, por (ii), $\Pi(1 + z_n)$ converge. ■

Teorema sobre productos canónicos 7.1.6. *Sea* $a_1, a_2, \ldots$ *una sucesión dada (posiblemente finita) de números complejos distintos de cero tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < \infty$$

Entonces, si $g(z)$ *es cualquier función entera, la función*

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n} \right] \tag{1}$$

es entera. El producto converge uniformemente sobre discos cerrados, tiene ceros en $a_1, a_2, \ldots$, *y tiene un cero de orden* k *en* $z = 0$, *pero no tiene otros ceros. Más aún, si* f *es cualquier función entera con estas propiedades, puede ser escrita en la misma forma (ecuación* (1)). *En particular,* f *es entera sin ceros, si y sólo si* f *tiene la forma* $f(z) = e^{g(z)}$ *para alguna función entera* g.

Demostración. Primero mostramos que $\Pi(1 - z/a_n)e^{z/a_n}$ es entera. Para cada $R > 0$, sea $A_R = \{z \text{ tal que } |z| \leq R\}$. Puesto que $a_n \to \infty$, únicamente un número finito de a_n está en A_R, digamos, $a_1, \ldots, a_{N-1}$. Por lo tanto, para $z \in A_R$, únicamente un número finito de términos $(1 - z/a_n)$ se anulan.

Para efectuar la demostración, expresemos el siguiente lema:

Lema 7.1.7. *Si* $1 + w = (1 - a)e^a$ *y* $|a| < 1$, *entonces*

$$|w| \leq \frac{|a|^2}{1 - |a|}$$

Demostración. Tenemos

$$(1 - a)e^a = 1 - \frac{a^2}{2} - \cdots - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{a^n}{(n-1)!} - \cdots$$

Así

$$\begin{aligned} |(1 - a)e^a - 1| = |w| &\leq \frac{|a|^2}{2} + \cdots + \frac{(n-1)}{n!}|a|^n + \cdots \\ &\leq |a|^2 + |a|^3 + \cdots \\ &= \frac{|a|^2}{1 - |a|} \quad \text{ya que } |a| < 1 \blacktriangledown \end{aligned}$$

El siguiente paso en la demostración es mostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n} - 1 \right]$$

converge uniforme y absolutamente en $A_{R/2}$. Esto mostrará que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n}$$

es entera (por el teorema 7.1.5).

En efecto, para $n \geq N$, $|z/a_n| < 1$ si $|z| \leq R/2$ y, por ende, por el lema precedente,

$$|w_n(z)| \leq \frac{|z/a_n|^2}{1 - |z/a_n|} \leq \frac{(R/2)^2}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{|a_n|^2}$$

ya que $|z| \leq R/2$ y $|a_n| \geq R$ para $n \geq N$. Por lo tanto,

$$|w_n(z)| \leq \frac{R^2}{2} \cdot \frac{1}{|a_n|^2} = M_n$$

Por suposición, ΣM_n converge y en consecuencia, por el criterio M de Weierstrass, $\Sigma w_n(z)$ converge uniforme y absolutamente.

Así, $f_1(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} [1 - (z/a_n)]e^{z/a_n}$ es entera. A partir de la definición del producto es claro que f_1 tiene exactamente el número requerido de ceros. Por lo tanto, también $e^g f_1$ los tiene. Si f tiene el número dado de ceros, entonces f/f_1 será entera y no tiene ceros (por la proposición 4.1.1). Por lo tanto, únicamente necesitamos demostrar el siguiente lema.

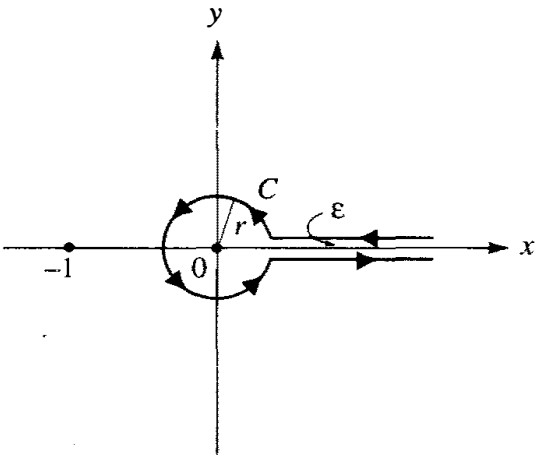


Figura 7.1.2. El contorno para la fórmula de Hankel.

Tabla 7.1.1. Propiedades de la función gamma.

Definición:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right]}, \text{ donde } \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) \approx 0.577.$$

1. Γ es meromorfa con polos simples en $0, -1, -2, \ldots$.
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$.
3. $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
4. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\text{sen } \pi z$.
5. $\Gamma(z) \neq 0$ para toda z.
6. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$.
7. $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right]$.
8. $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.
9. $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}n^{(1/2)-nz}\Gamma(nz)$.
10. $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$.
11. El residuo de Γ en $-m$ es igual a $(-1)^m/m!$.
12. (La integral de Euler) $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ para $\text{Re } z > 0$.
    La convergencia es uniforme y absoluta para $-\pi/2 + \delta \leq \arg z \leq \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$ y para $\varepsilon \leq |z| \leq R$, donde $0 < \varepsilon < R$.
13. $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt$. (Véase el ejemplo resuelto 7.1.11.)
14. (Fórmula de Hankel) $\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\,\text{sen } \pi z}\int_C (-t)^{z-1}e^{-t}\,dt$. ($C$ como en la figura 7.1.2.)
15. $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi}\int_C (-t)^{-z}e^{-t}\,dt$. ($C$ como en la figura 7.1.2.)
16. $\Gamma(z+1) \approx \sqrt{2\pi}\,z^{z+1/2}e^{-z}$ para $|z|$ grande, $\text{Re } z > 0$. (Ésta es la fórmula de Stirling, la cual será demostrada en la sección 7.3.)

Lema. *Sea* h(z) *entera y sin ceros. Entonces, existe una función entera* g(z) *tal que* $h = e^g$.

Demostración. No es del todo correcto hacer $g(z) = \log h(z)$, porque no es obvio que $h(\mathbf{C})$ sea simplemente conexo y, por ende, no sabemos si log tiene una rama analítica en $h(\mathbf{C})$. Sin embargo, podemos evitar este problema tomando como guía la diferenciación logarítmica. Puesto que h'/h es entera, podemos escribir

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = a_0 + a_1 z + \cdots$$

y hacer $g_1(z) = a_0 z + a_1 z^2/2 + a_2 z^3/3 + \cdots$; esto es $g_1' = h'/h$. (La serie para g_1 tiene un radio de convergencia infinito ya que $\Sigma a_n z^n$ lo tiene.) Sea $f(z) = e^{g_1(z)}$, entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g_1'(z) = \frac{h'(z)}{h(z)}$$

y, por lo tanto, $(d/dz)(f/h) = 0$, así $h = K \cdot f$, para una constante K. Si hacemos $z = 0$, vemos que $K = h(0) \neq 0$. Puesto que $K \neq 0$, podemos hacer $K = e^c$, para alguna c, así que $h = e^c \cdot e^{g_1} = e^g$, donde $g = g_1 + c$. ■

Ejemplos resueltos

7.1.9. *¿Para qué* $z(1+z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2n})$ *converge absolutamente? Muestre que el producto es* $1/(1-z)$.

Solución. Por el teorema 7.1.2(iii), tenemos la convergencia absoluta si $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$ converge absolutamente. Esto ocurre para $|z| < 1$, ya que el radio de convergencia de la serie es 1. Por ende, el producto converge absolutamente para $|z| < 1$.
La evaluación del producto requiere de un truco el cual, en este caso, es bastante simple. Nuestro producto es $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots$. Note que $(1+z)(1+z^2) = 1 + z + z^2 + z^3$ y, por ende, $(1+z)(1+z^2)(1+z^4) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^7$. En general, $(1+z)\prod_{k=1}^{n}(1+z^{2^k}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{2^{n+1}-1}$. Sabemos que esta serie converge a $1/(1-z)$ conforme $n \to \infty$ ya que ésta es la serie de potencias alrededor de $z = 0$ para $1/(1-z)$.

7.1.10. *Demuestre que*

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Solución. Los ceros de sen z ocurren en 0 y en $\pm n\pi$; definamos $a_1 = \pi$, $a_2 = -\pi$, $a_3 = 2\pi$, $a_4 = -2\pi$,.... Todos los ceros son simples, y $\Sigma 1/|a_n|^2$ converge. Por lo tanto, por el teorema sobre productos canónicos, podemos escribir

$$\operatorname{sen} z = e^{g(z)z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n}$$

$$= e^{g(z)z} \cdot \left[\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)e^{z/\pi}\right]\left[\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)e^{-z/\pi}\right]\left[\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)e^{z/2\pi}\right]\left[\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)e^{-z/2\pi}\right]\cdots$$

$$= e^{g(z)z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(al agrupar los términos en parejas). Así que resta mostrar que $e^{g(z)} = 1$.
Esto no es muy simple y no se esperaría que el estudiante efectuara el siguiente razonamiento de una manera rutinaria; éste es, definitivamente, un truco. Sea

$$P_n(z) = e^{g(z)z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Sabemos que $P_n(z) \to \operatorname{sen} z$ (uniformemente sobre discos), así que $P_n'(z) \to \cos z$. Entonces

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} \to \cot z \qquad \text{para} \qquad z \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

Pero

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \frac{d}{dz}\log P_n(z) = \frac{d}{dz}\left[g(z) + \log z + \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\right]$$

$$= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}\right)$$

Sin embargo sabemos, de la sección 4.3, que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2} \qquad \text{para} \qquad z \neq n\pi$$

Así, $g'(z) = 0$ y, por ende $g(z)$ es una constante, digamos c. Por lo tanto,

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = e^c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Hágase $z \to 0$. El lado izquierdo se aproxima a 1 mientras que el lado derecho se aproxima a e^c (¿por qué?). En consecuencia $e^c = 1$ y tenemos nuestra fórmula.

7.1.11. *Demuestre que*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right)$$

Solución. Tenemos

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

Tomando logaritmos (que sabemos podemos hacerlo cerca de cada z para las cuales tengamos convergencia), obtenemos

$$-\log \Gamma(z) = \gamma z + \log z + \sum_{1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right]$$

Diferenciando, obtenemos

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \gamma + \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1/n}{1 + z/n} - 1/n\right) = \gamma + \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right)$$

Éste es el resultado que se quería.

Ejercicios

1. Muestre que $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.
2. Muestre que $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$.
3. Muestre que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ converge absolutamente.
4. Complete la demostración de la analiticidad de productos infinitos (7.1.5).
5. Utilice el ejemplo resuelto 7.1.10 para establecer la *fórmula de Wallis,*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

6. Muestre que $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{n^3 + 1}\right) = \frac{2}{3}$.
7. Demuestre la fórmula 2 de la tabla 7.1.1.
8. Muestre que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ converge (suponiendo que $z_n \neq -1$) si, para toda $\varepsilon > 0$, existe una N tal que $n \geq N$ implica que

$$|(1 + z_n)\cdots(1 + z_{n+p}) - 1| < \varepsilon \qquad \text{para toda } p = 0, 1, 2, \ldots$$

(*Sugerencia:* use el criterio de Cauchy para sucesiones.)

9. Demuestre la fórmula 4 de la tabla 7.1.1.
10. Sean $a_1, a_2, \ldots$ puntos en $\mathbf{C}$, con $a_i \neq 0$, y sea

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{1+h}} < \infty$$

para un entero fijo $h \geq 0$. Muestre que la función entera más general que tiene ceros en $a_1, a_2, \ldots$ y un cero de orden k en 0, es

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_1^\infty \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{[z/a_n + (z/a_n)^2/2 + \cdots + (z/a_n)^h/h]} \right]$$

(Cada uno de los puntos a_i debe ser repetido un número finito de veces.) (*Sugerencia:* Demuestre el siguiente lema: Si $1 + w = (1 - a)e^{a + a^2/2 + \cdots + a^h/h}$ para $|a| < 1$, entonces $|w| \leq |a|^{h+1}/(1 - |a|)$.)

11. Demuestre la fórmula 8 de la tabla 7.1.1.

12. Utilice la fórmula de Euler (fórmula 7 de la tabla 7.1.1) para demostrar que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

13. Muestre que en la vecindad $|z + m| < 1$, para m entero positivo fijo,

$$\Gamma(z) - \frac{(-1)^m}{m!(z + m)}$$

es analítica (esto es, tiene una singularidad removible en $z = -m$).

14. *a*) Sea $E(z, h) = (1 - z)e^{z + z^2/2 + \cdots + z^h/h}$. Muestre que la función entera más general que tiene ceros en $a_1, a_2, \ldots$, cada uno de ellos repetido de acuerdo a su multiplicidad, donde $a_n \to \infty$, y que tiene un cero de orden k en 0, es

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^\infty E\left(\frac{z}{a_n}, n\right)$$

(éste es el teorema de factorización de Weierstrass.)

b) Concluya que toda función meromorfa es el cociente de dos funciones enteras.

15. Demuestre que, para $0 \leq t \leq n$,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}$$

16. Demuestre que, para $\operatorname{Re} z \geq 0$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}}\right) dt$$

(*Sugerencia*: $\operatorname{Re} z \geq 0$, entonces $1/(z + n) = \int_0^\infty e^{-t(z+n)} dt$. Utilice $\gamma = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + 1/n - \log n)$ y el ejemplo resuelto 7.1.11.)

17. Seag γ el círculo de radio $\frac{1}{2}$ alrededor de $z_0 = 0$. Muestre que $\int_\gamma \Gamma(z)\, dz = 2\pi i$.

18. Establezca la convergencia uniforme en la fórmula 12 de la tabla 7.1.1.

19. Demuestre la *fórmula de Hankel* (fórmula 14 de la tabla 7.1.1):

$$\Gamma(z) \frac{-1}{2i \operatorname{sen} \pi z} \int_C (-t)^{z-1} e^{-t} dt$$

donde C es el contorno ilustrado en la figura 7.1.2. ¿Para qué z es válida la fórmula? Utilice $\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \pi/\operatorname{sen} \pi z$, para concluir que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \int_C (-t)^{-z} e^{-t}\, dt$$

20. Para contestar esta pregunta, consulte la sección 6.1. Defina $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ para Re $z > 0$.

a) Demuestre directamente que $\Gamma(z)$ es analítica en Re $z > 0$ para mostrar que $\int_0^n t^{z-1} e^{-t}\, dt$ converge uniformemente en discos cerrados conforme $n \to \infty$.

b) Muestre que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, Re $z > 0$.

c) Utilice *b*) y la continuación analítica para demostrar que $\Gamma(z)$ puede ser extendida a una función meromorfa que tiene polos simples en $0, -1, -2, \ldots$ (*Sugerencia:* el procedimiento usado es análogo al que se utilizó al demostrar el principio de reflexión de Schwarz; véase la sección 6.1.)

21. Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$ y que $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}/2$ utilizando la función gamma. (*Sugerencia:* Relacione estas ecuaciones integrando por partes y use $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.)

7.2. EXPANSIONES ASINTÓTICAS Y EL MÉTODO DEL DESCENSO MÁS PRONUNCIADO

Las expansiones asintóticas proporcionan un método para usar las sumas parciales de una serie, para aproximar valores de una función $f(z)$, si z es grande. Un aspecto sorprendente es que la serie en sí misma puede no converger a la función y puede en verdad diverger. Si usamos únicamente un término, decimos que tenemos una aproximación asintótica o una fórmula asintótica para f. La fórmula de Stirling para la función gamma es una de tales fórmulas. Este resultado, demostrado en la sección 7.3, establece que

$$\Gamma(x) \sim e^{-x} x^{x-1/2} \sqrt{2\pi} \quad \text{para } x \text{ grande}$$

La expresión del lado derecho puede ser más fácil de manejar que la función Γ en sí misma y tiene importantes aplicaciones en campos como la probabilidad y la mecánica estadística.

Otro ejemplo famoso es el teorema de los números primos, el cual asegura que si $\pi(x)$ es el número de primos menores o iguales al número real x, entonces

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

En esta sección se desarrollará exactamente lo que esta fórmula quiere decir y en qué sentido es una aproximación. La teoría de las funciones asintóticas considerada en esta sección se aplicará en la siguiente, donde se demuestra la fórmula de Stirling y donde se estudian las funciones de Bessel.

Existen otros métodos para estudiar el comportamiento asintótico de las funciones $f(z)$, diferentes a los que desarrollaremos. Por ejemplo, si f satisface una ecuación diferencial, entonces esta ecuación frecuentemente puede ser usada para obtener una fórmula asintótica. El lector que desee profundizar en estos temas, debe consultar las referencias dadas en el prefacio.

La notación de "O grande" y "o chica"

Cierta notación es útil para no perder de vista la relación en el comportamiento entre dos funciones. Suponga que $f(z)$ y $g(z)$ están definidas en z en algún conjunto A. Decimos que $f(z)$ es $O(g(z))$ (se pronuncia "$f(z)$ es 'o' grande de $g(z)$") para z en A, si existe una constante C tal que $|f(z)| \leq C|g(z)|$ para toda $z \in A$. Usualmente escribiremos $f(z) = O(g(z))$ aun cuando esto es de alguna manera un abuso de notación ya que el objeto de la derecha es un enunciado de relación y no una cantidad específica a la cual $f(z)$ es igual. Por ejemplo, sen $x = O(x)$ para x en $\mathbf{R}$, ya que el cálculo elemental muestra que $|\text{sen } x| \leq |x|$ para toda x. Una sencilla, pero útil observación es que $f(z) = O(1)$ justamente quiere decir que $f(z)$ es acotada. Una notación más útil para nosotros será la "o chica". Ésta requiere cierta clase de comportamiento en el límite para su definición. Hablando vagamente, la notación $f(z) = o(g(z))$ significa que $f(z)/g(z)$ tiende a 0 conforme $z \to z_0$ o $z \to \infty$, etc. (Decimos "vagamente" únicamente porque $g(z)$ se puede anular.) Por ejemplo,

$$1 - \cos x = o(x) \quad \text{conforme } x \to \infty$$
$$\log x = o(x) \quad \text{conforme } x \to \infty$$
$$e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ conforme } x \to \infty \text{ para toda } n$$

Estaremos interesados principalmente cuando $z \to \infty$ en un sector $\alpha \leq \arg(z) \leq \beta$. En lo que resta de esta sección, a menos que se especifique otra cosa, los símbolos serán entonces definidos como sigue:

$f(z) = O(g(z))$ *significa:* Existen constantes R y M tales que siempre que $|z| \geq R$ y $\alpha \leq \arg(z) \leq \beta, |f(z)| \leq M|g(z)|$.

$f(z) = o(g(z))$ *significa*: Para toda $\varepsilon > 0$ existe una R tal que siempre que $|z| \geq R$ y $\alpha \leq \arg(z) \leq \beta, |f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|$.

En algunos casos estaremos interesados únicamente en el comportamiento a lo largo del eje real positivo y tomaremos entonces $\alpha = \beta = 0$. Observe que si $f(z)$ es $O(1/z^{n+1})$ entonces $f(z)$ es $o(1/z^n)$ pero el inverso no es cierto en general.

Expansiones asintóticas

Desde el capítulo 3 hemos estado interesados en representar una función como una serie infinita que converja al valor de la función y hemos suprimido cuidadosamente las series divergentes. Sin embargo, las series divergentes pueden ser algunas veces útiles si bien uno debe ser muy cuidadoso en sus interpretaciones. Veremos ahora que algunas veces es posible asociar con una función, una serie infinita que puede o no converger, pero cuyas sumas parciales pueden producir buenas aproximaciones al valor de la función.

Considere una serie de la forma

$$S = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

y sea

$$S_n = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}$$

Así, S_n está bien definida para toda $z \neq 0$ pero no pedimos que S converja. La manera correcta de decir que S es asintótica a una función dada f está dada en la siguiente definición.

Definición 7.2.1. *Decimos que* f $\sim$ S, *o que* f *es* ***asintótica*** *a* S, *o que* S *es una* ***expansión asintótica*** *de* f, *si*

$$f - S_n = o\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

con arg z *en un rango específico* $[\alpha, \beta]$ (véase la figura 7.2.1).

Aun cuando S puede ser divergente, las sumas parciales usualmente resultan adecuadas aproximaciones a f, siendo el error aproximadamente $1/z^n$. Esto se ilustrará con un ejemplo en los siguientes párrafos.

Si permitimos el rango completo $[-\pi, \pi]$ para arg z, podríamos esperar que $a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \cdots$ convergiera si $f(z)$ fuera analítica en el exterior de un círculo grande, puesto que f tiene una serie de Laurent convergente de esa forma. Sin embargo, usualmente f tiene polos $z_n \to \infty$ (tal como $\Gamma(z)$, la cual tiene polos en 0, -1, -2,...) y, por lo tanto, en muchos ejemplos, no tenemos una serie de Laurent que sea válida en el exterior de cualquier círculo. Si f tiene polos $z_n \to \infty$ en el sector arg $z \in [\alpha, \beta]$ y $f \sim S$, entonces S no puede converger a ninguna z_0. Si lo hiciera, entonces S convergería uniformemente para toda $|z| > |z_0| + 1$. (Véase la sección 3.3.). La definición 7.2.1 y la convergencia uniforme de S_n a S, diría que para $|z|$ suficientemente grande en ese sector, tenemos $|f(z) - S(z)| < 1$. Pero esto no se puede satisfacer cerca de los polos de f.

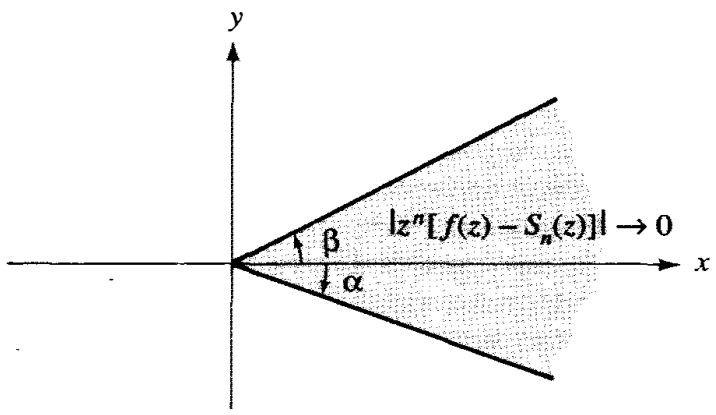


Figura 7.2.1. Expansión asintótica.

El siguiente ejemplo debe ayudar a clarificar el concepto de expansión asintótica.

Ejemplo 7.2.2. *Muestre que*

$$\int_x^\infty t^{-1}e^{x-t}\,dt \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots$$

Solución. Sea x real, $x \geq 0$, y sea

$$f(x) = \int_x^\infty t^{-1}e^{x-t}\,dt$$

(¡Ésta no es la función gamma!) Integrando por partes da

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt$$

Afirmamos que

$$f(x) \sim S(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots$$

Note que la serie diverge. Aquí el sector es $\alpha = \beta = 0$; esto es, estamos restringiendo z al eje real positivo.

En efecto, si

$$S_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

tenemos

$$|x^n[f(x) - S_n(x)]| = x^n n! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt = n! \int_x^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^n \frac{e^{x-t}}{t}\,dt$$

$$\leq n! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}\,dt \leq \frac{n!}{x} \int_x^\infty e^{x-t}\,dt = \frac{n!}{x}$$

lo cual se aproxima a cero conforme $x \to \infty$. Entonces $f(x) - S_n(x)$ es $o(1/x^n)$ y, por tanto, $f \sim S$ como se requería. Observe que aun cuando $n!$ crece rápidamente, aún tenemos una aproximación adecuada porque

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{n!}{x^{n+1}} = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$$

y si x es, digamos, mayor que n, entonces $n!/x^{n+1}$ es muy pequeña. ▼

En seguida se resumen algunas propiedades básicas de las expansiones asintóticas.

Proposición 7.2.3

(i) *Si* $$f(z) \sim S(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

entonces $$f(z) - S_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

y recíprocamente.

(ii) *Si* $$f \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

y $$f \sim \tilde{a}_0 + \frac{\tilde{a}_1}{z} + \frac{\tilde{a}_2}{z^2} + \cdots$$

entonces $a_i = \tilde{a}_i$. (*Las expansiones asintóticas son únicas.*)

(iii) *Si* $$f \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

y $$g \sim b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots$$

son ambas válidas en el mismo rango de arg z, *entonces en ese rango*

$$f + g \sim (a_0 + b_0) + \frac{(a_1 + b_1)}{z} + \frac{(a_2 + b_2)}{z^2} + \cdots$$

y

$$fg \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots \qquad \textit{donde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

(*Las series asintóticas pueden ser sumadas y multiplicadas.*)

(iv) *Dos funciones diferentes pueden tener la misma expansión asintótica.*

(v) *Sea* ϕ: [a, ∞[$\rightarrow$ **R** *continua y suponga que* $\phi(x) = o(1/x^n)$, $n \geq 2$. *Entonces*

$$\int_x^{\infty} \phi(t)\, dt = o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Demostración

(i) Puesto que $f \sim S$, tenemos, por definición, $f - S_{n+1} = o(1/z^{n+1})$. Por lo tanto, obtenemos $f - S_n = f - S_{n+1} + S_{n+1} - S_n = o(1/z^{n+1}) + a_{n+1}/z^{n+1} = O(1/z^{n+1})$.

(ii) Vamos a mostrar que $a_n = \tilde{a}_n$, por inducción sobre n. Primero, por la definición de $f \sim S$, $f(z) - a_0 \to 0$ conforme $z \to \infty$ y, en consecuencia $a_0 = \lim_{z\to\infty} f(z)$. Entonces $a_0 = \tilde{a}_0$. Suponga que hemos demostrado que $a_0 = \tilde{a}_0, \ldots, a_n = \tilde{a}_n$. Vamos a mostrar que $a_{n+1} = \tilde{a}_{n+1}$. Dada $\varepsilon > 0$, existe una R tal que si $|z| \geq R$, tenemos

$$\left| z^{n+1}\left[f(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} \right) \right] \right| < \varepsilon$$

y

$$\left| z^{n+1}\left[f(z) - \left(\tilde{a}_0 + \frac{\tilde{a}_1}{z} + \cdots + \frac{\tilde{a}_{n+1}}{z^{n+1}} \right) \right] \right| < \varepsilon$$

Por lo tanto, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \tilde{a}_{n+1}| &= |z^{n+1}| \frac{|a_{n+1} - \tilde{a}_{n+1}|}{|z^{n+1}|} \\ &= |z^{n+1}| \left| \left[f(z) - \left(a_0 + \cdots + \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} \right) \right] - \left[f(z) - \left(\tilde{a}_0 + \cdots + \frac{\tilde{a}_{n+1}}{z^{n+1}} \right) \right] \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Así, $|a_{n+1} - \tilde{a}_{n+1}| < 2\varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $a_{n+1} = \tilde{a}_{n+1}$.

(iii) Sea $S_n(z) = a_0 + \cdots + a_n/z^n$ y $\tilde{S}_n(z) = b_0 + \cdots + b_n/z^n$. Debemos mostrar que $f + g - (S_n + \tilde{S}_n) = o(1/z^n)$. Para hacer esto, escriba $f + g - (S_n + \tilde{S}_n) = (f - S_n) + (g - \tilde{S}_n) = o(1/z^n) + o(1/z^n) = o(1/z^n)$ (¿por qué?).
Para establecer la fórmula para el producto, observe que $c_0 + c_1/z + \cdots + c_n/z^n = S_n\tilde{S} + o(1/z^n)$ ya que $S_n\tilde{S}_n = c_0 + c_1/z \cdots + c_n/z^n$ más los términos de orden mayor. Así $fg - (c_0 + c_1 + \cdots + c_n/z^n) = fg - S_n\tilde{S}_n + o(1/z^n)$. Escriba ahora $fg - S_n\tilde{S}_n = (f - S_n)\, g + S_n(g - \tilde{S}_n)$ y observe que ambos términos son $o(1/z^n)$ puesto que g y S_n son acotadas conforme $z \to \infty$.

(iv) En $\mathbf{R}$, la función e^{-x} es $o(1/x^n)$ conforme $x \to \infty$ para cualquier n. Así, si $f \sim a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \cdots$, entonces $f(x) + e^{-x} \sim a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \cdots$ también.

(v) Puesto que $\phi(t) = o(1/t^n)$, $\lim_{n\to\infty} t^n\phi(t) = 0$. Dada $\varepsilon > 0$, existe una $x_0 > 0$ tal que $t > x_0$ implica que $|t^n\phi(t)| < \varepsilon$. Por lo tanto, para $x > x_0$,

$$\left| \int_x^\infty \phi(t)\, dt \right| \leq \int_x^\infty \frac{\varepsilon}{t^n}\, dt = \frac{\varepsilon}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$$

y así, para $x > x_0$,

$$\left| x^{n-1} \int_x^\infty \phi(t)\, dt \right| \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} x^{n-1} \int_x^\infty \phi(t)\, dt = 0$, y en consecuencia $\int_x^\infty \phi(t)\, dt = o(1/x^{n-1})$. ■

Fórmulas asintóticas y equivalencia asintótica

Si una función tiene una serie asintótica como se acaba de describir, entonces las sumas parciales de esa serie pueden ser usadas para obtener aproximaciones a la función para z grande. Sin embargo, el rango de aplicabilidad de este método es un poco restringido. Si f tiene la serie asintótica

$$f(z) \sim S(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

entonces $f(z) - a_0 = o(1)$; esto es, $\lim_{x \to \infty} f(x) = a_0$ y por lo tanto, f tiene un límite finito en infinito, en el sector especificado. Esto es demasiado restrictivo. Nosotros estamos interesados comúnmente en funciones que crecen conforme x crece. Los dos ejemplos mencionados al inicio de esta sección, $\Gamma(z)$ y $\pi(z)$ ciertamente hacen eso. Así, también escribiremos

$$f(z) \sim g(z)\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right)$$

que quiere decir

$$f(z) = g(z)\left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + o\left(\frac{1}{z^n}\right)\right]$$

En otras palabras, si $g(z) \neq 0$, entonces

$$\frac{f(z)}{g(z)} \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

la esperanza es que, al menos en algún sentido, $g(z)$ sea una función más fácil de manejar para x grande que lo que f es. Incorporando al factor a_0 en g, tenemos

$$f(z) \sim g(z)\left(1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots\right)$$

A menudo estaremos interesados principalmente en obtener el primer término. Éste proporcionará una función $g(z)$ con $f(z) = g(z)\,[1 + O(1/z)]$, o un poco más generalmente, $f(z) = g(z)\,[1 + o(1)]$. En este caso decimos que f y g son asintóticamente equivalentes.

Definición 7.2.4. *Dos funciones* f(z) *y* g(z) *son* ***asintóticamente equivalentes*** *si* f(z) = g(z) [1 + o(1)]. *En este caso escribimos* f(z) ~ g(z).

Observe que si $g(z) \neq 0$, esto dice que $f(z)/g(z) - 1 = o(1)$, así que $\lim_{z \to \infty} [f(z)/g(z)] = 1$ en el sector especificado. La expresión $g(z)$ está pensada en cómo dar una fórmula

asintótica para $f(z)$. Es en este sentido que son interpretados la fórmula de Stirling y el teorema de los números primos.

El próposito de todo esto es usar a $g(z)$ para aproximar $f(z)$ para z grande. Pero se requiere cuidado. La aproximación *no* necesariamente mejora conforme $z \to \infty$ en el sentido que lo hemos estado usando hasta aquí en este texto. Esto es, el valor absoluto del error $\Delta f = g(z) - f(z)$ no necesariamente se reduce. En vez de esto es el *error relativo* o *error porcentual*, el error expresado como la fracción del valor verdadero, el que tiene que reducirse. El error relativo es

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{g(z) - f(z)}{f(z)} = \frac{g(z)}{f(z)} - 1$$

y esto se va a 0 conforme z se va a infinito en el sector específico, ya que es $o(1)$. El siguiente ejemplo simple puede aclarar esto. Sea $f(z) = ze^z/(1 + z)$. Entonces $f(z) \sim e^z$; esto es, $g(z) = e^z$ es una fórmula asintótica para f. El error asintótico en el que se incurre al usar $g(z)$ para aproximar $f(z)$ es $\Delta f = e^z - f(z) = e^z/(1 + z)$. Este error se va a infinito conforme z crece a lo largo del eje real positivo, el error absoluto expresado como una fracción del valor verdadero, es

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{e^z}{1 + z} \cdot \frac{1 + z}{ze^z} = \frac{1}{z}$$

el cual se va a 0 conforme z crece.

Es también importante observar que la fórmula asintótica no es única. La misma función puede tener dos fórmulas asintóticas de diferente aspecto aun cuando la razón de las dos tiende a 1 conforme z crece en el sector especificado.

Algunas de las funciones que uno desea estudiar surgen de, o pueden ser convertidas en, integrales de la forma

$$f(z) = \int_\gamma e^{zh(\xi)} g(\xi)\, d\xi$$

La función Γ misma es

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^z\, dt = \int_0^\infty e^{z \log t} e^{-t}\, dt$$

En la siguiente sección seguiremos esta idea para obtener la fórmula de Stirling a partir de uno de los resultados del final de esta sección. El plan de ataque general es encontrar un punto ξ_0 sobre la curva tal que el factor $e^{zh(\xi)}$ sea bastante grande ahí pero resulte muy pequeño lejos de ξ_0 a lo largo de la curva, para z grande. La mayor contribución de la integral vendrá de la parte de la curva cerca de ξ_0 y podríamos estimarla en términos del comportamiento de h y g cerca de ξ_0. Primero volveremos nuestra atención a algunos casos en los cuales h sea lo suficientemente simple para que podamos obtener todos los términos de las series.

La transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una construcción muy parecida a la transformada de Fourier que vimos anteriormente. Siempre y cuando la integral tenga sentido, la transformada de Laplace de una función g definida en el eje real positivo es

$$\tilde{g}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt$$

Dedicaremos considerable atención a esta construcción y a algunas de sus aplicaciones en el capítulo 8. Aquí veremos cómo las series asintóticas pueden arrojar alguna luz en el comportamiento de $\tilde{g}(z)$ para z grande.

Proposición 7.2.5. *Suponga que* g *es analítica en una región que contiene al eje real positivo y acotada en el eje real positivo. Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *la serie de Taylor para* g *centrada en* 0 *y sea* $\tilde{g}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt$. *Entonces*

$$\tilde{g}(z) \sim \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{2a_2}{z^3} + \cdots + \frac{n!a_n}{z^{n+1}} + \cdots$$

conforme $z \to \infty$, $\arg z = 0$.

Demostración. Sea $h(z) = [g(z) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1})]/z^n$. Entonces h es acotada en el eje real positivo porque, primero, g es acotada, segundo, el término polinomial en el numerador tiene grado menor que n y tercero, el límite conforme z tiende a 0 es a_n. Así, existe una constante M con

$$|g(t) - (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1})| < Mt^n \qquad \text{para toda } t \geq 0$$

y, por lo tanto, para z real,

$$\left| \int_0^\infty e^{-zt} [g(t) - (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1})]\, dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-zt} t^n\, dt$$

$$\left| \tilde{g}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^\infty e^{-zt} t^k\, dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-zt} t^n\, dt$$

Haciendo $x = zt$, obtenemos

$$\left| \tilde{g}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^k\, dx \right| \leq M \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx$$

$$\left| \tilde{g}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\Gamma(k+1)}{z^{k+1}} \right| \leq M \frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}} = \frac{Mn!}{z^{n+1}} = o\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

que es exactamente lo que queríamos. ■

La suposición de analiticidad para la función g, embona adecuadamente dentro del tema de este texto y hace posible que la demostración que se acaba de dar sea tan simple. Vale la pena observar, y es importante para muchas aplicaciones, que el mismo resultado se satisface con suposiciones ligeramente diferentes sobre g. La analiticidad no es tan esencial como el que g sea infinitamente diferenciable.

Proposición 7.2.6. *Suponga que* g *es infinitamente diferenciable en el eje real positivo y que* g *y cada una de sus derivadas son de orden exponencial. Esto es, existen constantes* A_n *y* B_n *tales que* $|g^{(n)}(t)| \le A_n e^{B_n t}$ *para* $t \ge 0$. *Sea* $\tilde{g}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt$. *Entonces*

$$\tilde{g}(z) \sim \frac{g(0)}{z} + \frac{g'(0)}{z^2} + \frac{g''(0)}{z^3} + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{z^{n+1}} + \cdots$$

conforme $z \to \infty$, $\arg z = 0$.

Demostración. Fije $n \ge 0$ y suponga $z > \max(B_0, B_1, \ldots, B_n)$. Entonces, la repetida integración por partes da

$$\tilde{g}(z) = -\sum_{k=0}^{n-1} \left(\lim_{T \to \infty} \frac{e^{-zt} g^{(k)}(t)}{z^{k+1}} \Bigg|_{t=0}^{T} \right) + \frac{1}{z^n} \int_0^\infty e^{-zt} g^{(n)}(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{z^{k+1}} + \frac{1}{z^n} \int_0^\infty e^{-zt} g^{(n)}(t)\, dt$$

ya que $|e^{-zt} g^{(k)}(T)| \le A_k e^{(B_k - z)T}$, y este último término se va a 0 conforme T crece. Por lo tanto,

$$z^n |\tilde{g}(z) - S_n(z)| \le \int_0^\infty |e^{-zt} g^{(n)}(t)| dt \le \int_0^\infty A_n e^{(B_n - z)t}\, dt = \frac{A_n}{z - B_n}$$

y esto se va a 0 conforme z crece, como necesitábamos. ■

El segundo resultado (7.2.6) se aplica tanto a funciones infinitamente diferenciables que no son analíticas, como a funciones que no son acotadas, como los polinomios. El primero (7.2.5) incluye funciones tales como $g(z) = \text{sen } e^{t^2}$ cuya derivada no es de orden exponencial.

Teorema de Watson

Casi el mismo argumento que se usó para la proposición 7.2.5 establecerá una expansión con una función h ligeramente más complicada.

Teorema de Watson 7.2.7. *Sea* g(z) *analítica y acotada en un dominio que contiene al eje real. Hágase*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2}\, g(y)\, dy$$

para z real. Entonces

$$f(z) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}}\left(a_0 + \frac{a_2}{z} + \frac{a_4 \cdot 1 \cdot 3}{z^2} + \frac{a_6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{z^3} + \cdots\right)$$

conforme $z \to \infty$, $\arg z = 0$, *donde* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *cerca de cero.*

Demostración. Primero observe que

$$h(z) = \frac{g(z) - (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{2n-1} z^{2n-1})}{z^{2n}}$$

es acotada en el eje real ya que g es acotada y puesto que $h(z) \to a_{2n}$ conforme $z \to 0$. Por lo tanto, obtenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2} \left[g(y) - (a_0 + a_1 y + \cdots + a_{2n-1} y^{2n-1})\right] dy \right| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2} y^{2n}\, dy$$

Usamos ahora el hecho de que para $z > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2} y^{2k}\, dy = \sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdots \frac{2k-1}{z^{k+1/2}} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2} y^{2k+1}\, dy = 0$$

(véase el ejercicio 7), para obtener

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2} g(y)\, dy - \left(\frac{a_0\sqrt{2\pi}}{z^{1/2}} + \frac{a_2\sqrt{2\pi}}{z^{1+1/2}} + \frac{a_4\sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3}{z^{2+1/2}} + \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a_{2n-2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{z^{n-1+1/2}} \right) \right| \leq M\sqrt{2\pi}\, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{z^{n+1/2}}$$

a partir de lo cual el teorema se sigue. ■

Método del descenso más pronunciado

Finalmente regresamos a situaciones en las cuales h puede ser más complicada y en las que se necesitan técnicas más sofisticadas. Una de estas técnicas es el llamado método del descenso más pronunciado o el método del punto silla. Fue descubierto por P. Debye en 1909 aproximadamente. Vamos a buscar una expansión de la forma

$$f(z) \sim g(z)\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z_2} + \cdots\right)$$

para una función particularmente simple $g(z)$ y estaremos interesados principalmente en obtener el primer término. El método aquí descrito funciona bien si f tiene la forma especial $f(z) = \int_\gamma e^{zh(\xi)}\, d\xi$. Usaremos contornos $\gamma(t)$ definidos para toda $t \in \mathbf{R}$. Podemos integrar sobre tales contornos infinitos de la misma manera en que integraríamos sobre contornos ordinarios, tan pronto como verifiquemos la convergencia de las integrales.

Teorema del descenso más pronunciado 7.2.8. *Sea* $\gamma:]-\infty, \infty[\to \mathbf{C}$ *una curva* $\mathbf{C}_1$ *en* $\mathbf{C}$. *(*γ *puede estar definida únicamente en un intervalo finito.) Sea* $\zeta_0 = \gamma(t_0)$ *un punto en* γ *y sea* $h(\zeta)$ *una función continua a lo largo de* γ *y analítica en* ζ_0. *Considere las siguientes hipótesis: Para* $|z| \geq R$ *y* $\arg z$ *fijo.*

(i) $f(z) = \int_\gamma e^{zh(\zeta)}\, d\zeta$ *converge absolutamente.*
(ii) $h'(\zeta_0) = 0;\ h''(\zeta_0) \neq 0.$
(iii) $\operatorname{Im} zh(\zeta)$ *es constante para* ζ *en* γ *en alguna vecindad de* ζ_0.
(iv) $\operatorname{Re} zh(\zeta)$ *tiene un máximo estricto en* ζ_0 *a lo largo de toda la curva* γ.

Entonces

$$f(z) \sim \frac{e^{zh}(\zeta_0)\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}\ \sqrt{-h''(\zeta_0)}} \tag{1}$$

conforme $z \to \infty$, $\arg z$ *fijo. El signo de la raíz cuadrada se escoge de tal manera que* $\sqrt{z}\ \sqrt{-h''(\zeta_0)} \cdot \gamma'(t_0) > 0$.

Observaciones

(i) Para lograr las condiciones (i) a (iv) puede ser necesario deformar a γ aplicándole el teorema de Cauchy. Una trayectoria γ que satisface estas condiciones es llamada una *trayectoria de descenso más pronunciado.*
(ii) La expansión asintótica en la conclusión del teorema depende únicamente de $h(\zeta_0)$ y $h''(\zeta_0)$ y no del comportamiento de h en toda γ (excepto, por supuesto, que h debe satisfacer las hipótesis del teorema.) Se pueden utilizar derivadas de orden superior si se necesitan términos adicionales.
(iii) El origen del término "descenso más pronunciado" se puede derivar de las condiciones (iii) y (iv) de la siguiente manera. Recuerde que $\operatorname{Im} zh(\zeta) = v(\zeta)$ y $\operatorname{Re} zh(\zeta) = u(\zeta)$ son armónicas conjugadas, y el hecho de que v sea constante sobre γ significa que u cambia más rápidamente en la dirección de γ. Ya que ζ_0 es un máximo, $u(\zeta) = \operatorname{Re} zh(\zeta)$ decrece lo más rápidamente cuando se mueve desde ζ_0 en la dirección de γ. Así, la curva γ es llamada la trayectoria del descenso más pronunciado. El término "método de punto silla" se originó de la manera siguiente: La función $u(\zeta) = \operatorname{Re} zh(\zeta)$ tiene un máximo sobre γ en ζ_0. Pero $h''(\zeta_0) \neq 0$ implica que u no es constante y, por lo tanto, ζ_0 debe ser un punto silla de u ya que las funciones armónicas nunca tienen un máximo o mínimo local (véase la figura 7.2.2).

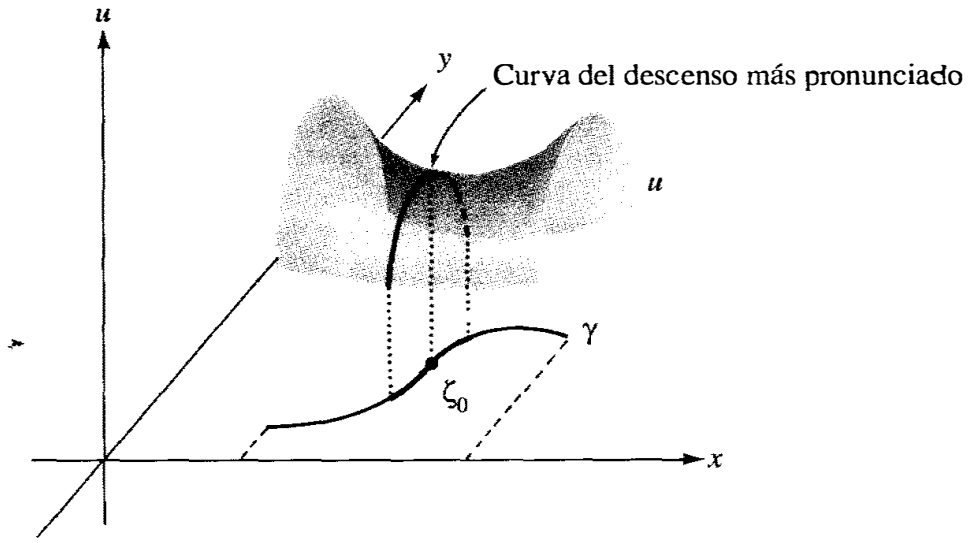


Figura 7.2.2. El método del punto silla.

(iv) Frecuentemente el signo correcto de la raíz cuadrada puede determinarse al examinar el signo de la integral que define a $f(z)$.

Demostración. Divida a γ en tres porciones γ_1, C y γ_2, como se ilustra en la figura 7.2.3. Escoja a C de tal manera que esté en una vecindad de ζ_0 suficientemente pequeña para que (1) $h(\zeta)$ sea analítica y (2) se satisfaga la condición (iii). Claramente, $f(z) = I_1(z) + I_2(z) + J(z)$, donde utilizamos las notaciones $J(z) = \int_C e^{zh(\zeta)}\, d\zeta$ y $I_k(z) = \int_{\gamma_k} e^{zh(\zeta)}\, d\zeta$, $k = 1, 2$.

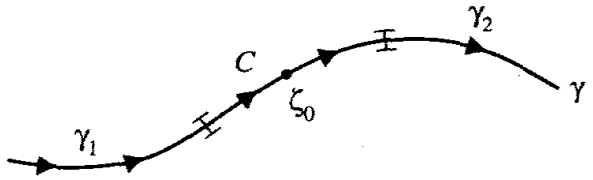


Figura 7.2.3. El método del descenso más pronunciado.

Vamos a mostrar que, para z grande, la parte de la integral que realmente importa es $J(z)$, así que una aproximación asintótica para $J(z)$ también dará una para $f(z)$. El ejemplo resuelto 7.2.11 dice que, en aras de hacer esto, es suficiente mostrar que $I_k(z)/J(z) = o(1/z^n)$ para toda n positiva. Para demostrar esto, observe que

$$|I_k(z)| = \left| \int_{\gamma_k} e^{zh(\zeta)}\, d\zeta \right| \leq \int_{\gamma_k} e^{\operatorname{Re} zh(\zeta)} |d\zeta|$$

Pero

$$J(z) = \int_C e^{zh(\zeta)}\, d\zeta = \int_C e^{\operatorname{Re} zh(\zeta)} e^{i \operatorname{Im} zh(\zeta)}\, d\zeta$$

Ya que Im $zh(\zeta)$ es constante sobre C, obtenemos

$$|J(z)| = \left| \int_C e^{\text{Re } zh(\zeta)}\, d\zeta \right|$$

Si C es lo suficientemente corta para que el $\arg(\gamma')$ cambie en menos que $\pi/4$ a lo largo de C, entonces obtenemos $|J(z)| > (1/\sqrt{2}) \int_C e^{\text{Re } zh(\zeta)} |d\zeta|$. Por lo tanto,

$$\left| \frac{I_k(z)}{J(z)} \right| \leq \frac{\displaystyle\int_{\gamma_k} e^{\text{Re } zh(\zeta)}\, |d\zeta|}{\displaystyle\int_C e^{\text{Re } zh(\zeta)}\, |d\zeta|} \sqrt{2}$$

Ahora, sea $\tilde{C}$ un subintervalo de C estrictamente menor, centrado en ζ_0. Entonces

$$\left| \frac{I_k(z)}{J(z)} \right| \leq \frac{\displaystyle\int_{\gamma_k} e^{\text{Re } zh(\zeta)}\, |d\zeta|}{\displaystyle\int_{\tilde{C}} e^{\text{Re } zh(\zeta)}\, |d\zeta|} \sqrt{2}$$

Fije z_0 y sea α el mínimo de Re $(zh(\zeta))$ sobre $\tilde{C}$. Existe una $\varepsilon > 0$ tal que $\text{Re}(z_0 h(\zeta)) \leq \alpha - \varepsilon$ para toda $\zeta \in \gamma_k$. Así, usando el hecho de que z está sobre el mismo rayo que z_0,

$$\frac{\displaystyle\int_{\gamma_k} e^{\text{Re } zh(\zeta)}\, |d\zeta|}{\displaystyle\int_{\tilde{C}} e^{\text{Re } zh(\zeta)}\, |d\zeta|} = \frac{\displaystyle\int_{\gamma_k} e^{\text{Re } z_0 h(\zeta) e^{\text{Re}\,(z - z_0)h(\zeta)}}\, |d\zeta|}{\displaystyle\int_{\tilde{C}} e^{\text{Re } z_0 h(\zeta) e^{\text{Re}\,(z - z_0)h(\zeta)}}\, |d\zeta|} \leq \frac{\left(\displaystyle\int_{\gamma_k} e^{\text{Re } z_0 h(\zeta)}\, |d\zeta| \right) e^{|z - z_0|(\alpha - \varepsilon)/|z_0|}}{\left(\displaystyle\int_{\tilde{C}} e^{\text{Re } z_0 h(\zeta)}\, |d\zeta| \right) e^{|z - z_0|\alpha/|z_0|}}$$

Esta expresión es un factor constante, digamos M, por $e^{-|z - z_0|(\varepsilon)/|z_0|}$. Lo anterior es, por cierto, $O(1/z)$ (y de hecho es $O(1/z^n)$ para toda $n \geq 1$) así que hemos demostrado que $I_k(z)/J(z) = O(1/z^n)$ para toda $n \geq 1$. Esto localiza el problema a una vecindad alrededor de ζ_0, donde se hace la mayor parte de la contribución a la integral. También, podemos reducir la longitud de C sin afectar la conclusión de que $f(z) \sim J(z)$ conforme $z \to \infty$.

Enseguida, escribimos

$$h(\zeta) = h(\zeta_0) - w(\zeta)^2$$

donde $w(\zeta)$ es analítica e invertible (abusando de la notación, denotamos a la inversa como $\zeta(w)$), donde $w(\zeta_0) = 0$, y donde

$$[w'(\zeta_0)]^2 = \frac{-h''(\zeta_0)}{2}$$

(véase el ejemplo resuelto 6.3.7.) Puesto que Im $(zh(\zeta)) =$ Im $(zh(\zeta_0))$ sobre C y Re $(zh\ (\zeta)) <$ Re $(zh\ (\zeta_0))$, vemos que $z[w(\zeta)]^2$ es real y mayor que cero sobre C; también, por nuestra elección de la rama para $\sqrt{\ }$, $\sqrt{z}w(\zeta)$ es real y como una función del parámetro t de la curva, tiene derivada positiva en t_0. Así, al contraer C si es necesario, podemos asumir que $\sqrt{z}w(\zeta)$ es creciente a lo largo de C.

$$J(z) = \int_C e^{zh(\zeta)}\,d\zeta = \int_C e^{zh(\zeta_0)} \cdot e^{-zw(\zeta)^2}\,d\zeta = e^{zh(\zeta_0)} \int_C e^{-z[w(\zeta)]^2}\,d\zeta$$

podemos cambiar variables al hacer $\sqrt{z}w(\zeta) = y$ y obtenemos

$$J(z) = e^{zh(\zeta_0)} \int_{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1}^{\sqrt{|z|}\varepsilon_2} e^{-y^2} \frac{d\zeta}{dw}\frac{dy}{\sqrt{z}} = \frac{e^{zh(\zeta_0)}}{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1}^{\sqrt{|z|}\varepsilon_2} e^{-y^2} \frac{d\zeta}{dw}\,dy$$

puesto que y es real sobre C; escogemos números positivos ε_1 y ε_2 tales que $[-\sqrt{|z|}\varepsilon_1, \sqrt{|z|}\varepsilon_2]$ esté en el rango de y correspondiente a ζ sobre C. Enseguida escribimos

$$\zeta = \zeta_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots$$

así que

$$\frac{d\zeta}{dw} = a_1 + 2a_2 w + 3a_3 w^2 + \cdots$$

donde $w = y/\sqrt{z}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{J(z)}{e^{zh(\zeta_0)}\sqrt{\pi}} &= \int_{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1}^{\sqrt{|z|}\varepsilon_2} e^{-y^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right)^{k-1} \right] dy \\
&= \int_{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1}^{\sqrt{|z|}\varepsilon_2} e^{-y^2} \left[\sum_{k=0}^{N} (k+1) a_{k+1} \left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right)^{k} \right] dy \\
&\quad + \int_{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1}^{\sqrt{|z|}\varepsilon_2} e^{-y^2} O\left(\left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right)^{N+1} \right) dy \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{(k+1)a_{k+1}}{(\sqrt{z})^k} + \int_{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1}^{\sqrt{|z|}\varepsilon_2} e^{-y^2} y^k\,dy \\
&\quad + \int_{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1}^{\sqrt{|z|}\varepsilon_2} e^{-y^2} O\left(\left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right)^{N+1} \right) dy
\end{aligned}$$

Por el ejercicio 7, sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^k\,dy = \begin{cases} \dfrac{(2m)!\sqrt{\pi}}{m!2^{2m}} & \text{si } k = 2m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k = 2m+1 \text{ es impar} \end{cases}$$

y así llegamos a la serie

$$S = \sum \frac{(k+1)a_{k+1}}{(\sqrt{z})^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^k \, dy = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!\sqrt{\pi}}{m!2^{2m}} \frac{(2m+1)a_{2m+1}}{z^m}$$

Esto da la serie deseada:

$$\frac{J(z)}{e^{zh(\zeta_0)}/\sqrt{z}} - S_M = -\sum_{k=0}^{2M} \frac{(k+1)a_{k+1}}{(\sqrt{z})^k} \left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1} e^{-y^2} y^k \, dy + \int_{\sqrt{|z|}\varepsilon_2}^{\infty} e^{-y^2} y^k \, dy \right)$$
$$+ \int_{-\sqrt{|z|}\varepsilon_1}^{\sqrt{|z|}\varepsilon_2} e^{-y^2} O\left(\left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right)^{2M+1} \right) dy$$

Las primeras dos integrales son $o(1/\sqrt{z})^{2M})$, por la proposición 7.2.3(iv), ya que $e^{-y^2}y^k = o(1/y^{2M+1})$. En la tercera, existe una constante B_M tal que el integrando está acotado por

$$\frac{B_M e^{-y^2}|y|^{2M+1}}{|\sqrt{z}|^{2M+1}} = \left(\frac{B_M}{|z|^M} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{|z|}} \right) e^{-y^2}|y|^{2M+1}$$

Puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}|y|^{2M+1} \, dy < \infty$$

este término es también $o(1/|z|^M)$. Entonces,

$$J(z) \sim \frac{e^{zh(\zeta_0)}S}{\sqrt{z}}$$

y por el ejemplo resuelto 7.2.11, también lo es $f(z)$. En consecuencia,

$$f(z) \sim e^{zh(\zeta_0)} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \left(a_1 + \frac{1 \cdot 3a_3}{z} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5a_5}{z^2} + \cdots \right)$$

Para completar la demostración, observe que

$$a_1 = \frac{d\zeta}{dw}(0) \frac{1}{\frac{dw}{d\zeta}(\zeta_0)} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{-h''(\zeta_0)}}$$

así que

$$f(z) \sim \frac{e^{zh(\zeta_0)} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}\sqrt{-h''(\zeta_0)}}$$

como se quería. ■

Observe que para obtener los términos de orden mayor en la expansión

$$f(z) \sim \frac{e^{zh(\zeta_0)}}{\sqrt{z}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-h''(\zeta_0)}} \left(1 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots\right) \tag{2}$$

uno debe poder calcular más términos de la serie $\zeta = \zeta_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots$ en la demostración precedente. En casos simples, estos términos de orden mayor pueden ser evaluados explícitamente; véase el teorema de Watson (7.2.7). No se darán aquí los detalles del método para obtener términos de orden mayor, porque estos términos se necesitan únicamente en cálculos muy refinados. El término principal que se dio en el teorema del descenso más pronunciado, es el importante.

Las aplicaciones de este teorema, que se dan en la siguiente sección, tratan principalmente con el caso en el que z es real y positivo. Claramente, en ese caso, las condiciones (iii) y (iv) del teorema pueden ser escritas equivalentemente con o sin la z.

Una demostración similar a la dada anteriormente conduce a lo siguiente. (Véase el ejercicio 8.)

Teorema generalizado del descenso más pronunciado 7.2.9. *Si se satisfacen las condiciones del teorema del descenso más pronunciado* (7.2.8), *pero* f *tiene la forma* $f(z) = \int_\gamma e^{zh(\zeta)} g(\zeta)\, d\zeta$ *donde* $g(\zeta)$ *es una función continua y acotada sobre* γ, *con* $g(\zeta_0) \neq 0$. *Entonces*

$$f(z) \sim \frac{e^{zh(\zeta_0)} \sqrt{2\pi}\, g(\zeta_0)}{\sqrt{z}\sqrt{-h''(\zeta_0)}}$$

Método de la fase estacionaria

Si el exponente del integrando del teorema 7.2.8 es puramente imaginario, podemos obtener un resultado relacionado conocido como el *método de la frase estacionaria*. Este método fue desarrollado en parte por Lord Kelvin en 1887 y se aplicará al estudio de las funciones de Bessel en la siguiente sección.

Teorema de la fase estacionaria 7.2.10. *Sea* [a, b] *un intervalo acotado en el eje real. Sea* h(t) *analítica en una vecindad de* [a, b] *y real para todo real* t. *Sea* g(t) *una función de valores reales o complejos en* [a, b] *con derivada continua. Suponga*

$$f(z) = \int_a^b e^{izh(t)} g(t)\, dt$$

Si $h'(t) = 0$ *en exactamente un punto* t_0 *en*]a, b[*y* $h''(t_0) \neq 0$, *entonces, conforme* $z \to \infty$ *en el eje real positivo, tenemos*

$$f(z) \sim \frac{e^{izh(t_0)}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}\sqrt{\pm h''(t_0)}} e^{\pm \pi i/4} g(t_0)$$

Se utiliza el signo más si $h''(t_0) > 0$ *y se usa el signo menos si* $h''(t_0) < 0$.

La fórmula asintótica para f se puede escribir como

$$\lim_{z \to +\infty} \sqrt{z} e^{-izh(t_0)} \int_a^b e^{izh(t)} g(t)\, dt = \frac{\sqrt{2\pi} e^{\pm \pi i/4} g(t_0)}{\sqrt{\pm h''(t_0)}}$$

Esta fórmula también tiene sentido cuando $g(t_0) = 0$ y lo estableceremos en esa forma. Observamos que al dividir a g en sus partes real e imaginaria, es suficientemente demostrar el teorema para g con valores reales.

El nombre "fase estacionaria" viene de la interpretación de que el integrando es una cantidad compleja con amplitud (magnitud) $g(t)$ y ángulo fase $zh(t)$. La intuición detrás de la fórmula es que la contribución principal de la integral debe venir de la vecindad de t_0, donde el ángulo fase varía tan lentamente como es posible. Para ver por qué, piense a la integral en términos de sus partes real e imaginaria:

$$f(z) = \int_a^b g(t) \cos(zh(t))\, dt + i \int_a^b g(t) \operatorname{sen}(zh(t))\, dt$$

Si z es muy grande, entonces $zh(t)$ cambia muy rápidamente en las regiones donde $h'(t)$ no es cero. Así, cos $(zh(t))$ y sen $(zh(t))$ oscilan rápidamente. La figura 7.2.4 ilustra esto con $h(t) = t^2$ para las gráficas de cos $(10\, t^2)$ y cos $(20\, t^2)$. Si g es del todo razonable, las oscilaciones resultantes de la integral deben tender a cancelarse *excepto* cerca de los puntos donde $h'(t) = 0$.

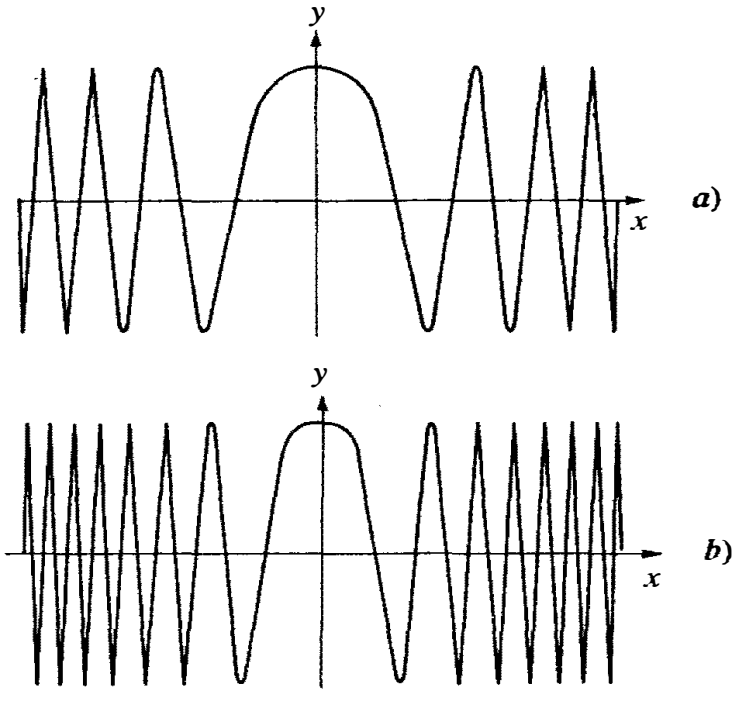


Figura 7.2.4. Las gráficas de (*a*) $y = \cos(10t^2)$ y (*b*) $y = \cos(20t^2)$.

Podría también esperarse que los extremos del intervalo de integración contribuyeran, pero resulta que en el peor de los casos esta contribución es proporcional a $1/z$ y, por lo tanto, no interferirá con el resultado que esperamos demostrar: que la integral se comporta como $1/\sqrt{z}$.

Debemos ser capaces de estimar la integral, para z grande, usando únicamente una porción de la trayectoria cercana a t_0. En este corto intervalo aproximamos entonces a $g(t)$ mediante la constante $g(t_0)$, y a $h(t)$ mediante su aproximación de Taylor de segundo orden $h(t_0) + [h''(t_0)/2](t - t_0)^2$, para obtener

$$f(z) \approx e^{izh(t_0)}\, g(t_0) \int e^{izh''(t_0)(t-t_0)^2/2}\, dt$$

donde la integral es sobre algún intervalo pequeño centrado en t_0. Al cambiar variables se produce

$$f(z) \approx \frac{e^{izh(t_0)}\, g(t_0)\sqrt{2}}{\sqrt{z}\sqrt{h''(t_0)}} \int e^{ix^2}\, dx$$

Ahora la integral es sobre algún intervalo de la forma $[-A\sqrt{z}, A\sqrt{z}]$. Sabemos, de las integrales de Fresnel en el ejercicio resuelto 4.3.17, que conforme z se va a infinito, esta integral converge a $\sqrt{\pi/2}(1 + i) = \sqrt{\pi}e^{\pi i/4}$. Esto nos deja con exactamente el resultado que queremos, con la obvia modificación para el caso en el que $h''(t_0) < 0$.

Veremos algo de la aplicabilidad de esta fórmula en la siguiente sección, cuando estudiemos las funciones de Bessel. Kelvin las usó para estudiar el modelo de las olas de la proa y la popa de un barco en movimiento. En cualquier aplicación particular, la amplitud $g(t)$ usualmente se comporta bien, pero al volver a la derivación intuitiva que se dio en la demostración es un poco engañoso. El primer paso requiere que la función g sea lo suficientemente suave para que cuando se multiplique por las rápidamente oscilantes $\cos(zh(t))$ y $\operatorname{sen}(zh(t))$, aporte algo para lo cual efectivamente la integral se cancele lejos de t_0 y para lo cual cualquier cancelación no sea efectiva cerca de t_0. Esto no pasa si g en sí misma tiene muchas oscilaciones en muy altas frecuencias. La continuidad sola no es suficiente para prevenir esto, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.2.11. *Encuentre una función continua* g *para la cual sea falsa la conclusión del teorema de la fase estacionaria* (7.2.10).

Solución. Sea $\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2) \cos(k^6 t)$. Esta serie converge uniforme y absolutamente para $t \in \mathbf{R}$, ya que el k-ésimo término está dominado por $1/k^2$. Así, ϕ es continua. Defina $g(t)$ en el intervalo $I = [-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi}]$ como $g(t) = 2t\,\phi(t^2)$ cuando $t \geq 0$, y como $g(t) = 0$ cuando $t < 0$, y considere la integral

$$f(z) = \int_I e^{-izt^2}\, g(t)\, dt$$

Ésta satisface el modelo de (7.2.10), con $h(t) = -t^2$, $t_0 = 0$ y $h''(0) < 0$. Sin embargo, para un entero positivo n, tenemos

$$f(n) = \int_{\mathbf{I}} e^{-int^2} g(t)\, dt = \int_0^{\sqrt{2\pi}} e^{-int^2} \phi(t^2) 2t\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-inx} \phi(x)\, dx = \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k^6 x) \right] dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \cos(k^6 x)\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(k^6 x)\, dx - i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(k^6 x)\, dx \right]$$

Estas integrales son todas 0 excepto la primera, en el solo caso en que $k^6 = n$ y en el que es π. Así $f(k^6) = \pi/k^2$. En otras palabras, para un entero positivo z, tenemos $f(z) = 0$ a menos que z sea una sexta potencia, en cuyo caso $f(z) = \pi / \sqrt[3]{z}$. Por lo tanto, $\sqrt{z} f(z)$ no permanece acotada y la condición del teorema 7.2.10 no puede ser posible que se satisfaga. ▼

En este ejemplo, la función g no es lo suficientemente suave para hacer que funcione el teorema 7.2.10. Tiene demasiada influencia de sus componentes de alta frecuencia, y se necesita alguna condición para prevenir esto. El requerimiento de una primera derivada continua (en el sentido de una variable real), especificada en el teorema 7.2.10, es una de tales condiciones. Esto implica una propiedad que es formulada en términos de las oscilaciones de g y la cual es de central importancia en la teoría de integración, llamada *variación acotada*. Algunas de las ideas acerca de esta propiedad y una demostración del teorema 7.2.10 se bosquejan en el suplemento de esta sección, el cual se puede considerar opcional.

SUPLEMENTO A LA SECCIÓN 7.2: VARIACIÓN ACOTADA Y LA DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE LA FASE ESTACIONARIA

En el método de la fase estacionaria, vimos que necesitamos imponer algunas condiciones en la amplitud que limitarían la cantidad de oscilaciones de alta frecuencia que pueda tener. Esta clase de cosas es a menudo necesitada en la teoría que involucra integrales; la noción de variación acotada provee las herramientas adecuadas para tratar con esta situación.

Definición 7.2.12. *Suponga que* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$.

(i) *Si* P *es una partición de* [a, b] *dada por* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, *entonces la* ***variación de*** f *en* [a, b] ***relativa a*** P *es* $V_P f = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$.

(ii) ***La variación total de*** f *en* [a, b] *es* $V_{[a,b]} f = \sup \{V_P f\}$, *donde la mínima cota superior se toma de todas las posibles particiones. (Puede ser* $+\infty$.*)*

(iii) *Si* $V_{[a,\,b]}\,f < \infty$, *decimos que* f *es de* ***variación acotada*** *y escribimos* $f \in \mathbf{VA}([a, b])$.

Algunos ejemplos importantes de tales funciones se incluyen en la siguiente:

Proposición 7.2.13

(i) *Si* f *es monótona y acotada en* [a, b], *entonces* $f \in \mathbf{VA}([a, b])$ y $V_{[a,b]}f = |f(b) - f(a)|$.
(ii) *Si* f *es diferenciable en un intervalo acotado* [a, b] *y* $|f'(x)| < M$ *para toda* $x \in [a, b]$, *entonces* $f \in \mathbf{VA}([a, b])$ *y* $V_{[a,\,b]}\,f \leq |b - a|M$.
(iii) *Si* f *tiene una derivada continua en el intervalo acotado* [a, b] *–esto es, si* $f \in C^1([a, b])$– *entonces* $f \in \mathbf{VA}([a, b])$.

Demostración. El primer resultado es inmediato, ya que las diferencias sucesivas de punto a punto entre cualquier partición son todas del mismo signo y los valores en puntos intermedios se cancelan. Lo segundo se demuestra al aplicar el teorema del valor medio a cada subintervalo de cualquier partición y el tercero se sigue ya que si f' es continua en el intervalo compacto $[a, b]$, entonces es acotada. ■

Es posible para una función continua el no tener variación acotada. En $[-1, 1]$ hágase $f(0) = 0$ y $f(x) = x\cos(1/x)$ para $x \neq 0$. (Véase la figura 7.2.5.). Entonces tenemos $|f(1/n\pi) - f(1/(n + 1)\pi)| = (2n + 1)/n(n + 1)\pi > 1/n\pi$. Ya que las series armónicas divergen, se pueden crear particiones usando estos puntos que dan una variación arbitrariamente grande.

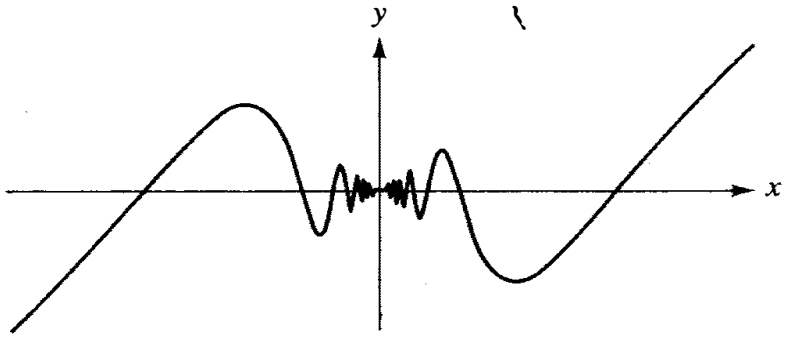


Figura 7.2.5. La función continua $x\cos(1/x)$ tiene variación no acotada.

Algunas de las propiedades importantes de las funciones de variación acotada se ennumeran en la siguiente proposición.

Proposición 7.2.14. Suponga que $f \in \mathbf{VA}([a,b])$.

(i) *Si* $[c, d] \subset [a, b]$, *entonces* $f \in \mathbf{VA}([c, d])$ *y* $V_{[c,\,d]}f \leq V_{[a,\,b]}f$.
(ii) $V_{[a,\,c]}\,f + V_{[c,\,b]}f = V_{[a,\,b]}f$ *si* $a < c < b$.
(iii) $(Vf)(x) = V_{[a,\,x]}f$ *es una función creciente acotada en* [a, b], *con* $(Vf)(a) = 0$ *y* $(Vf)(b) = V_{[a,\,b]}f$.

(iv) *Si* $a \le x \le y \le b$, *entonces* $(Vf)(y) - (Vf)(x) = V_{[x, y]}f$.
(v) f *es la diferencia de dos funciones crecientes acotadas:* $f = f_1 - f_2$, *con* $f_1 = (Vf + f)/2$ *y* $f_2 = (Vf - f)/2$.

Demostración. La primera afirmación se sigue de que cualquier partición de $[c, d]$ puede ser extendida con los intervalos $[a, c]$ y $[d, b]$ para obtener una partición de $[a, b]$, proporcionando un candidato más grande para $V_{[a, b]}f$. Para la segunda, únanse particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$ para obtener una partición de $[a, b]$ y muestre que $V_{[a, c]}f + V_{[c, b]}f \le V_{[a, b]}f$. Para la desigualdad opuesta, sea $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ cualquier partición de $[a, b]$, con $\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| > V_{[a, b]} - \varepsilon$. Tómese N con $t_N \le c \le t_{N+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} V_{[a, b]}f &< \sum_{0}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{N}^{N+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \varepsilon \\ &< \sum_{0}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(c) - f(t_N)| + |f(t_{N+1}) - f(c)| + \sum_{N+2}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \varepsilon \\ &\le V_{[a, c]}f + V_{[c, b]}f + \varepsilon \end{aligned}$$

Ya que esto se satisface para cualquier $\varepsilon \ge 0$, tenemos la desigualdad deseada. La tercera afirmación es clara y la cuarta se sigue de ésta y de la segunda. Para la última afirmación, use (iv) para mostrar que las funciones indicadas son crecientes.■

La última propiedad será la que se utilice directamente en la demostración del teorema 7.2.10. La herramienta mediante la cual la usaremos, será el segundo teorema del valor medio para integrales.

Segundo teorema del valor medio para integrales 7.2.15. *Si* f *es acotada y creciente en* [a, b] *y* g *es integrable, entonces existe un punto* c *en* [a, b] *tal que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt + f(b)\int_c^b g(t)\,dt$$

Demostración. *Sea*

$$F(x) = f(a)\int_a^x g(t)\,dt + f(b)\int_x^b g(t)\,dt$$

Entonces $F(a) = f(b)\int_a^b g(t)\,dt$ y $F(b) = f(a)\int_a^b g(t)\,dt$ y

$$f(a)\int_a^b g(t)\,dt \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le f(b)\int_a^b g(t)\,dt$$

Puesto que F es continua en $[a, b]$, la conclusión se sigue del teorema del valor intermedio.■

También necesitamos las siguientes estimaciones.

Lema 7.2.16. *Si* f *es diferenciable en* [a, b] y $|f'(x)| \le M$ *para toda* x *en* [a, b], *entonces* $|f(y) - f(x)|$, $|(Vf)(y) - (Vf)(x)|$, $|f_1(y) - f_1(x)|$, y $|f_2(y) - f_2(x)|$ *son acotadas superiormente, cada una de ellas, por* $M|y - x|$.

Demostración. La primera conclusión se sigue del teorema del valor medio, y la segunda de la proposiciones 7.2.13 (ii) y 7.2.14(iv). Las últimas dos se siguen de la primera y de la segunda, y las fórmulas para f_1 y f_2 dadas en la proposición 7.2.14(v).▼

El primer paso en la derivación intuitiva del teorema 7.2.10 fue que las contribuciones a la integral de las partes del intervalo lejanas a t_0, tienden a cancelarse y pueden omitirse al compararlas con la contribución de intervalos cortos cercanos a t_0. El único punto crítico de h estaba en t_0 y h' y h'' eran continuas, así que lejos de t_0, la derivada permanece alejada en 0 y podemos aplicar el siguiente lema.

Lema 7.2.17. *Suponga que* h *tiene una segunda derivada continua en* [a, b], *que* h'(x) *nunca es* 0 *en* [a, b] *y que* g *tiene una derivada continua en* [a, b]. *Entonces* $\int_a^b e^{izh(t)}\, g(t)\, dt = O(1/z)$.

Demostración. $\psi(x) = g(x)/h'(x)$ tiene una derivada continua en $[a, b]$ y, por lo tanto, tiene variación acotada y puede escribirse como la diferencia de dos funciones crecientes, $\psi = \psi_1 - \psi_2$. Entonces

$$\int_a^b e^{izh(t)} g(t)\, dt = \frac{1}{z}\int_a^b \psi_1(t) \cos(zh(t))\, zh'(t)\, dt + \frac{i}{z}\int_a^b \psi_1(t) \operatorname{sen}(zh(t))\, zh'(t)\, dt$$

$$-\frac{1}{z}\int_a^b \psi_2(t) \cos(zh(t)) zh'(t)\, dt - \frac{i}{z}\int_a^b \psi_2(t) \cos(zh(t)) zh'(t)\, dt$$

Cada una de estas integrales puede manejarse mediante el segundo teorema del valor medio para integrales. La primera es típica. Existe un punto x entre a y b con

$$\left|\int_a^b \psi_1(t) \cos(zh(t)) zh'(t)\, dt\right| = \left| \psi_1(a)\int_a^x \cos(zh(t)) zh'(t)\, dt + \psi_1(b)\int_x^b \cos(zh(t))\, zh'(t)\, dt\right|$$

$$= |\psi_1(a)[\operatorname{sen}(zh(x)) - \operatorname{sen}(zh(c))] + \psi_1(b)\,[\operatorname{sen}(zh(b)) - \operatorname{sen}(zh(x))]|$$

$$\le 2|\psi_1(a)| + 2|\psi_1(b)|$$

Las otras se tratan similarmente para obtener

$$\left| \int_a^b e^{izh(t)} g(t)\, dt \right| \leq \frac{4}{z} [|\psi_1(a)| + |\psi_1(b)| + |\psi_2(a)| + |\psi_2(b)|]$$

como se necesitaba.▼

Ahora estamos listos para completar la demostración del teorema 7.2.10. Ya que t_0 es el único punto crítico de h en $[a, b]$, sabemos que para toda $\delta > 0$, $h'(t)$ nunca es 0 en $[a, t_0 - \delta]$ o en $[t_0 + \delta, b]$, y así, por el último lema, las integrales de $e^{izh(t)}\, g(t)$ sobre cada uno son $O(1/z)$ y, por lo tanto, $o(1/\sqrt{z})$. Así, para establecer el teorema 7.2.10 es suficiente mostrar que

$$\lim_{z \to \infty} \sqrt{z} e^{-ih(t_0)} \int_J e^{izh(t)} g(t)\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\pm h''(t_0)}} e^{\pm \pi i/4} g(t_0)$$

donde $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Podemos fijar δ tan pequeña como queramos mientras que su elección no dependa de z. En el transcurso de la demostración encontraremos condiciones para esa elección.

Sabemos que h es analítica en una vecindad de t_0. Por el ejemplo resuelto 6.3.7 existe una función analítica $w(t)$ tal que $h(t) = h(t_0) \pm [w(t)]^2$ para t cercana a t_0 y w es localmente uno a uno. Podemos escoger w de tal manera que sea real y estrictamente creciente en J si se selecciona a δ lo suficientemente pequeña. Éste es nuestro primer criterio para δ. Escogemos el signo más si $h''(t_0) > 0$ y el signo menos si $h''(t_0) < 0$. Puesto que $w(t_0) = 0$ y w es continua, $w(t_0 + \delta) = c$ y $w(t_0 - \delta) = d$, donde $c < 0 < d$. El cambio de variables $x = w(t)$ da

$$\int_J e^{izh(t)} g(t)\, dt = e^{izh(t_0)} \int_c^d e^{\pm izx^2} \psi(x)\, dx$$

donde $\psi(x) = g(w^{-1}(x))/(w^{-1})'(x)$. La función ψ tiene una derivada continua en $[c, d]$. El punto $x = 0$ corresponde a $t = t_0$, y $h''(t_0) = \pm 2w(t_0)w''(t_0) \pm 2[w'(t_0)]^2$. Entonces, $(w^{-1})'(0) = 1/w'(t_0) = \sqrt{\pm h''(t_0)}/2$. Puesto que ψ' es continua, ψ tiene variación acotada y puede escribirse como la diferencia $\psi_1 - \psi_2$ de dos funciones crecientes. Sea $\varepsilon > 0$, puesto que c y d se van a 0 conforme $\delta \to 0$, podemos usar el lema 7.2.16 para seleccionar a δ lo suficientemente pequeña de tal modo que las cantidades $|\psi_1(c) - \psi_1(0)|$, $|\psi_1(d) - \psi_1(0)|$, $|\psi_2(c) - \psi_2(0)|$, y $|\psi_2(d) - \psi_2(0)|$ sean todas menores que ε. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sqrt{z} e^{-izh(t_0)} \int_J e^{izh(t)} g(t)\, dt &= \sqrt{z} \int_c^d e^{\pm izx^2} \psi(x)\, dx \\
&= \int_c^d \cos(zx^2)\, \psi_1(x)\, \sqrt{z}\, dx \pm i \int_c^d \operatorname{sen}(zx^2)\, \psi_1(x) \sqrt{z}\, dx \\
&\quad - \int_c^d \cos(zx^2) \psi_2(x) \sqrt{z}\, dx \mp i \int_c^d \operatorname{sen}(zx^2)\, \psi_2(x) \sqrt{z}\, dx
\end{aligned}$$

Como en la demostración del lema 7.2.17, cada integral puede ser manejada mediante el segundo teorema del valor medio para integrales y la primera es típica. Existe un punto y entre c y d, con

$$\int_c^d \cos(zx^2)\,\psi_1(x)\sqrt{z}\,dx = \psi_1(c)\int_c^y \cos(zx^2)\,\sqrt{z}\,dx + \psi_1(d)\int_y^d \cos(zx^2)\,\sqrt{z}\,dx$$
$$= \psi_1(c)\int_{c\sqrt{z}}^{y\sqrt{z}} \cos(u^2)\,du + \psi_1(d)\int_{y\sqrt{z}}^{d\sqrt{z}} \cos(u^2)\,du$$

Utilizando las integrales de Fresnel del ejemplo resuelto 4.3.17, éstas convergen conforme z se va a $+\infty$. Puesto que $c < 0 < d$, el límite es $\psi_1(d)\sqrt{\pi/2}$ si $y < 0$, es $\psi_1(c)\sqrt{\pi/2}$ si $y > 0$ y es $\{[\psi_1(c) + \psi_1(d)]/2\}\sqrt{\pi/2}$ si $y = 0$. Pero cada una de ellas está a una distancia $\varepsilon\sqrt{\pi/2}$ de $\psi_1(0)\sqrt{\pi/2}$. Argumentos similares para las otras tres integrales muestran que toda la suma converge al límite que es

$$\psi_1(0)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \pm i\psi_1(0)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \psi_2(0)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mp i\psi_2(0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

con un error no mayor que $\varepsilon\sqrt{\pi/2}$ en cada término. Así, obtenemos un límite que no está a una distancia mayor que $2\varepsilon\sqrt{2\pi}$ del punto $[\psi_1(0) - \psi_2(0)]\,(1 \pm i)\sqrt{\pi/2} = \psi(0)\sqrt{\pi}e^{\pm\pi i/4} = \sqrt{2\pi}g(t_0)e^{\pm\pi i/4}/\sqrt{\pm h''(t_0)}$, justo como se deseaba. Esto completa la demostración del teormea 7.2.10. ■

Ejemplos resueltos

7.2.18. *Suponga que* $f(z) = I(z) + J(z)$, *que* $I(z)/J(z) = O(1/z^M)$ *para todo entero positivo* M, *y que*

$$J(z) \sim g(z)\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right)$$

Muestre que

$$f(z) \sim g(z)\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right)$$

Solución. Puesto que $I(z)/J(z) = O(1/z^M)$, sabemos que $z^M I(z)/J(z)$ permanece acotada y, por lo tanto, $z^{M-1}I(z)/J(z) \to 0$. Así, $I(z)/J(z) = \sigma(1/z^N)$ para todo entero $N \geq 0$. Existe una función $B_N(z)$ tal que $z^N I(z) = B_N(z)J(z)$ y $B_N(z) \to 0$ conforme $z \to \infty$. Calculemos ahora

$$\left|z^N\left[\frac{f(z)}{g(z)} - S_N(z)\right]\right| \leq \left|\frac{z^N I(z)}{g(z)}\right| + \left|z^N\left[\frac{J(z)}{g(z)} - S_N(z)\right]\right|$$
$$\leq \left|B_N(z)\,\frac{J(z)}{g(z)}\right| + \left|z^N\left[\frac{J(z)}{g(z)} - S_N(z)\right]\right|$$

El primer término se va a 0, ya que $B_N(z) \to 0$ y $J(z)/g(z) \to a_0$. El segundo término se va 0 puesto que $J(z) \sim g(z)(a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \cdots)$. Esto completa la demostración.

7.2.19. *Sea* $h(\zeta) = \zeta^2$, $\zeta_0 = 0$. *Encuentre una curva* γ *que satisfaga las hipótesis del teorema del descenso más pronunciado. (En otras palabras, encuentre una trayectoria de descenso más pronunciado.) Tome* arg z = 0, *esto es,* z *es real,* z > 0.

Solución. Sea $h(\zeta) = u + iv$, así que si $\zeta = \xi + i\eta$, $u = \xi^2 - \eta^2$ y $v = 2\xi\eta$. La discusión que sigue al teorema de descenso más pronunciado, indica que la trayectoria de descenso más pronunciado está definida por v = constante (puesto que en nuestro caso z es real, $z > 0$). En consecuencia, la línea de descenso más pronunciado a través de $\zeta_0 = 0$ es $\xi = 0$ o $\eta = 0$. Ya que u debe tener un máximo en $\zeta_0 = 0$, la curva γ está definida por $\xi = 0$.

7.2.20. *Demuestre que*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2} \cos y \, dy \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}} \left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{2^2 2! z^2} - \cdots\right)$$

conforme $z \to \infty$; arg z = 0.

Solución. Aplicamos el teorema de Watson. Aquí

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{5!} - \cdots$$

Por lo tanto, $a_0 = 1$, $a_2 = \dfrac{-1}{2!}$, $a_4 = \dfrac{1}{4!}$, $\cdots$

y entonces

$$f(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1 \cdot 3}{4! z^2} - \cdots\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(1 - \frac{1}{2z} + \frac{1}{2^2 2! z^2} - \cdots\right)$$

Ejercicios

1. Muestre que si $f(z) = O(h(z))$, $g(z) = O(h(z))$, y a y b son constantes, entonces $af(z) + bg(z) = O(h(z))$.
2. Muestre que la equivalencia asintótica es una relación de equivalencia, en el sentido de que se satisfacen las siguientes tres propiedades:

   a) *Reflexiva:* $f \sim f$.
   b) *Simétrica:* Si $f \sim g$, entonces $g \sim f$.
   c) *Transitiva:* Si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f \sim h$.

3. Si $f(x) \sim a_2/x^2 + a_3/x^3 + \cdots$ para $x \in [0, \infty[$, muestre que

$$g(x) = \int_x^{\infty} f(t)\, dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \frac{a_4}{3x^3} + \cdots$$

4. Sea $f(x) = \int_x^\infty e^{-t}/t\, dt$. Use integración por partes para mostrar que

$$f(x) \sim e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 2}{x^3} - \cdots\right)$$

5. Muestre que

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \cdots$$

6. Sea $g(z)$ analítica en z_0 y sean $g'(z_0) = 0$ y $g''(z_0) \neq 0$, de tal manera que cerca de z_0, $g(z) - g(z_0) = [w(z)]^2$ con w analítica, $w'(z_0) \neq 0$. Demuestre que existen exactamente dos curvas perpendiculares sobre las cuales Re g (respectivamente, Im g) son constantes a través de z_0. (Recuerde que la proposición 1.5.12 muestra que si $f'(z_0) \neq 0$, Re f tiene exactamente una curva de nivel a través de z_0.) Muestre también que las líneas de Re g e Im g constantes se intersecan a 45°.

7. *a*) (Véase el ejercicio 21, sección 7.1.) Muestre que si $z > 0$, entonces, para enteros $k \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2} y^{2k}\, dy = \sqrt{2\pi}\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{z^{k+1/2}}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2} y^{2k+1}\, dy = 0$$

b) Muestre que para enteros $m \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} y^{2m}\, dy = \sqrt{\pi}\, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m} = \frac{(2m)!\sqrt{\pi}}{m!2^{2m}}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} y^{2m+1}\, dy = 0$$

8. Sea $h_n(t) = \sqrt{n}e^{-nt^2}$. El área bajo la gráfica de $h_n(t)$ es $\sqrt{\pi}$ y para toda $\varepsilon > 0$, $h_n(t) \to 0$ uniformemente fuera de $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Tal sucesión es llamada una *sucesión aproximante* a δ. Véase la figura 7.2.6.

a) Muestre que si $g(t)$ es continua y $0 < N < \infty$, entonces $\int_{-N}^{N} g(t)h_n(t)\, dt \to g(0)\sqrt{\pi}$ conforme $n \to \infty$.

b) Muestre que si $g(t)$ es continua y acotada, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h_n(t)\, dt \to g(0)\sqrt{\pi}$ conforme $n \to \infty$.

9. La expansión

$$\int_x^\infty t^{-1}e^{x-t}\, dt \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \cdots$$

fue discutida en el ejemplo 7.2.2. Calcule $S_4(10)$ y $S_5(10)$ numéricamente y encuentre una cota superior para los errores respectivos. Discuta cómo cambian los errores en $S_n(x)$ conforme n y x crecen. Por ejemplo, para una x dada, ¿se reducen los errores si tomamos n muy grande?

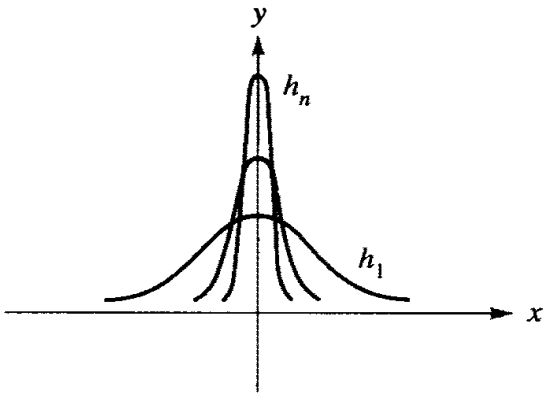


Figura. 7.2.6. Sucesión aproximante a δ.

10. Bosqueje la demostración del teorema generalizado del descenso más pronunciado (7.2.9) usando el ejercicio 8.

11. Encuentre una expansión asintótica para

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2} \operatorname{sen} y^2 \, dy$$

(Asuma que $z \to \infty$, $z > 0$.)

12. Muestre que si $f(z) = O(\phi(z))$ y $g(z) = o(h(z))$, entonces $f(z)g(z) = o(\phi(z)h(z))$.

13. Encuentre la trayectoria del descenso más pronunciado a través de $t_0 = 0$ si $h(t) = \cos t$. (Tome z real, $z > 0$.)

14. Demuestre que $\int_C e^{-y^2} \, dy = \sqrt{\pi}$, donde C es la línea a 45°, $z = t + it$ con $-\infty < t < \infty$ mostrando que

$$\int_C e^{-y^2} \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy$$

(*Sugerencia.* Muestre que $\int_{\gamma_x} e^{-\zeta^2} \, d\zeta \to 0$ conforme $x \to \infty$, donde γ_x es la línea vertical que une a x con $x + ix$ o use el ejemplo resuelto 4.3.17.)

15. Repita el ejercicio 13 pero bajo la suposición que z está en el eje imaginario positivo.

16. Muestre que el primer término en el teorema de Watson puede ser obtenido como un caso especial del teorema generalizado del descenso más pronunciado, si $g \geq 0$ en el eje real.

17. Encuentre la fórmula asintótica para f cuando la trayectoria encontrada en el ejercicio 13 es usada en el teorema del descenso más pronunciado.

18. Use el teorema del descenso más pronunciado para obtener la fórmula asintótica para f usando la trayectoria γ que se obtuvo en el ejemplo resuelto 7.2.19.

19. Encuentre la fórmula asintótica para f cuando la trayectoria γ encontrada en el ejercicio 15 es utilizada en el teorema del descenso más pronunciado.

7.3. LA FÓRMULA DE STIRLING Y LAS FUNCIONES DE BESSEL

En esta sección se aplicará la fórmula del descenso más pronunciado para demostrar la fórmula de Stirling para la función gama $\Gamma(z)$. Se desarrollarán también algunas de las propiedades de las funciones de Bessel $J_n(z)$, que están definidas

para $n = \ldots, -1, 0\ 1, \ldots$, y se usará el método de la fase estacionaria para obtener una fórmula asintótica para estas funciones.

Fórmula de Stirling

Fórmula de Stirling 7.3.1

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \tag{1}$$

conforme $z \to \infty$ *en el eje real positivo.*

Observación. Una extensión de la demostración dada aquí muestra que este resultado también se satisface para $-\pi/2 + \delta \leq \arg z \leq \pi/2 - \delta$, para toda $\delta > 0$ (véase la figura 7.3.1).

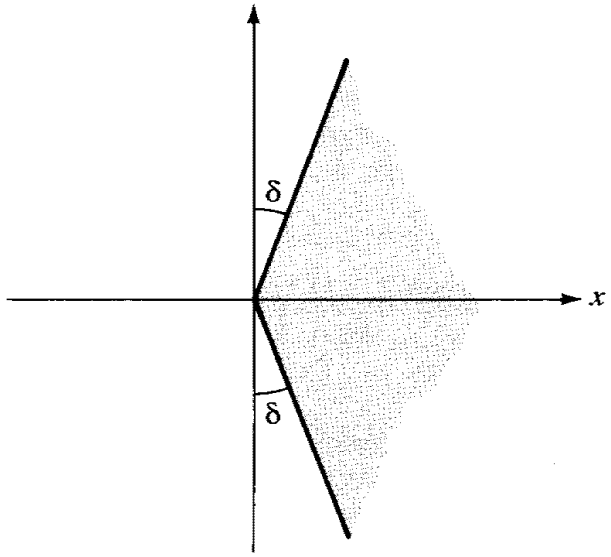


Figura 7.3.1. La región de validez para la fórmula de Stirling.

Demostración. Recuerde, de la fórmula 12 en la tabla 7.1.1, que para $\operatorname{Re} z > 0$, tenemos la integral de Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

Hemos estado preocupados en el caso en el que z es real y positivo. Queremos reescribir la integral de tal manera que se pueda aplicar el teorema del descenso más pronunciado (7.2.8). Para hacer esto, hacemos el cambio de variable $t = z\tau$. Obtenemos

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z\, dt = z^{z+1} \int_0^\infty e^{z(\log \tau - \tau)}\, d\tau$$

Así, $\Gamma(z+1)/z^{z+1}$ tiene la forma

$$\int_\gamma e^{zh(\zeta)}\,d\zeta$$

donde $h(\zeta) = \log \zeta - \zeta$ y γ es el eje real positivo, $[0, \infty[$. Debemos comprobar las hipótesis (i) a la del método del descenso más pronunciado (7.2.8). Sea $\zeta_0 = 1$, claramente $h(\zeta_0) = -1$, $h'(\zeta_0) = 0$ y $h''(\zeta_0) \neq 0$; por ende, se satisfacen las hipótesis (i) y (ii) del método. También, $h(\zeta)$ es real sobre γ, y en consecuencia (iii) es válida. Para demostrar (iv), sabemos que $\mathrm{Re}(zh(t)) = xh(t)$tiene un máximo si $h(t)$ lo tiene. Pero $h(t)$ tiene un máximo de -1 a $\zeta_0 = 1$ sobre γ (véase la figura 7.3.2). En consecuencia, (iv) se satisface. Por lo tanto,

$$\frac{\Gamma(z+1)}{z^{z+1}} \sim \frac{e^{zh(\zeta_0)}}{\sqrt{z}\sqrt{-h''(\zeta_0)}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

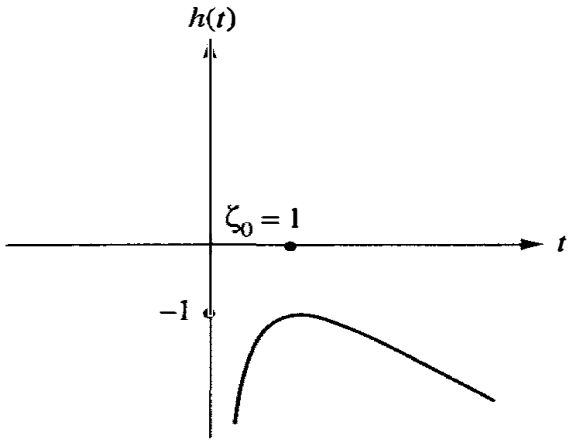


Figura 7.3.2. La gráfica de $h(t) = \log t - t$.

Así, que $\Gamma(z+1) \sim z^{z+1/2}e^{-z}\sqrt{2\pi}$, como se requería.■

Si $z = re^{i\theta}$ no fuera real, el eje x dejaría de ser la trayectoria de descenso más pronunciado y la trayectoria de integración tendría que ser deformada en tal trayectoria utilizando el teorema de Cauchy.

Si se examina este método más cuidadosamente, uno encuentra que los primeros términos son

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi}z^{z+1/2}\,e^{-z}\left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \cdots\right) \tag{2}$$

esto es,

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi}z^{z+1/2}\,e^{-z}\left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right]$$

Sin embargo, cuando resolvemos problemas particulares, usualmente encontramos que el primer término es el más importante.

Puesto que $\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z)$, obtenemos $\Gamma(x) \sim e^{-x}x^{x-1/2}(2\pi)^{1/2}$, mencionado anteriormente.

Funciones de Bessel

En el resto de esta sección se incluirá una breve discusión de algunas propiedades básicas de las funciones de Bessel y se describirá una forma en la que se puede aplicar el método de la fase estacionaria para obtener una fórmula asintótica. Las funciones de Bessel (cuyas propiedades principales se enlistan en la tabla 7.3.1), son estudiadas porque ellas surgen de manera natural en las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales parciales, tales como la ecuación de Laplace, cuando estas ecuaciones son expresadas en términos de coordenadas cilíndricas. Las funciones de Bessel se pueden definir de diferentes maneras. Encontramos que la siguiente definición es conveniente.

Tabla 7.3.1. Resumen de las propiedades de las funciones de Bessel.

1. $J_n(z) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\,(n\theta - z \operatorname{sen} \theta)\, d\theta$, donde n es un entero.
2. $|J_n(z)| \leq 1$ para z real.
3. $J_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{n+2k}}{2^{n+2k}K!(n+k)!}$, $n \geq 0$.
4. J_n es entera y tiene un cero de orden n en $z = 0$; $J_0(0) = 1$.
5. $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$.
6. Ecuación de Bessel:
$$\frac{d^2J_n}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dJ_n}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)J_n = 0$$
7. $\dfrac{d}{dz}[z^{-n} J_n(z)] = -z^{-n} J_{n+1}(z)$.
8. $\dfrac{d}{dz} J_n(z) = \dfrac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z)$.
9. $\dfrac{d}{dz} J_n(z) = \dfrac{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)}{2}$
10. $J_n(z) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$ conforme $z \to \infty$, z real y mayor que cero.

Definición 7.3.2. *Sea* $z \in \mathbf{C}$ *fijo y considere la función*

$$f(\zeta) = e^{z(\zeta - 1/\zeta)/2}$$

Expanda $f(\zeta)$ *en una serie de Laurent alrededor de* 0. *El coeficiente de* ζ^n, *donde* n *es positivo o negativo, es denotado por* $J_n(z)$ *y es llamado la* ***función de Bessel*** *de orden* n, *llamamos a* $e^{z(\zeta - 1/\zeta)/2}$ *la* ***función generadora.***

Para empezar el desarrollo de estas propiedades reescribimos la definición como,

$$e^{z(\zeta - 1/\zeta)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\zeta^n \tag{3}$$

De la fórmula para los coeficientes de una expansión de Laurent (véase el teorema 3.3.1), vemos que

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \zeta^{-n-1} e^{z(\zeta - 1/\zeta)/2}\, d\zeta$$

donde γ es cualquier círculo alrededor de 0. Si utilizamos el círculo unitario $\zeta = e^{i\theta}$ y escribimos la integral explícitamente, obtenemos

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-(n+1)i\theta} e^{iz\,\mathrm{sen}\,\theta} e^{i\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{iz\,\mathrm{sen}\,\theta - ni\theta}\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-iz\,\mathrm{sen}\,\theta + ni\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\,\mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta \end{aligned} \tag{4}$$

Aun cuando $J_n(z)$ estará bien definida para valores no enteros de n en la ecuación (10), la ecuación (4) es válida únicamente si n es un entero. La ecuación (4) muestra que $|J_n(z)| \leq 1$ para z real. Las gráficas de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ se muestran en la figura 7.3.3.

Enseguida mostraremos que $J_n(z)$ es entera y se describirá un método para encontrar su serie de potencias. Para llevar a cabo estas faenas, es conveniente hacer el cambio de variables $\zeta \mapsto 2\zeta/z$ obteniendo, para cada z fija,

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_\gamma \zeta^{-n-1} \exp\left(\zeta - \frac{z^2}{4\zeta}\right) d\zeta \tag{5}$$

Al escribir la exponencial como una serie de potencias da

$$\exp\left(\frac{-z^2}{4\zeta}\right) = 1 - \frac{z^2}{4\zeta} + \frac{z^4}{2\cdot(4\zeta)^2} - \cdots$$

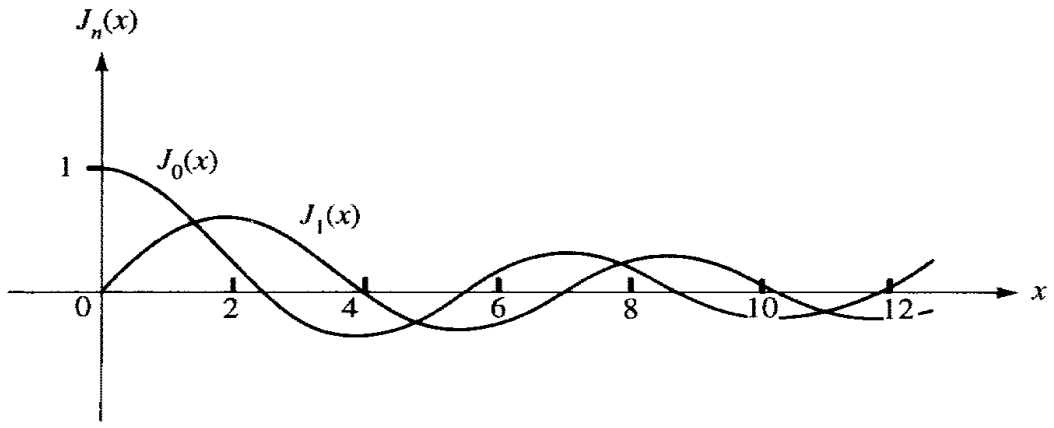


Figura 7.3.3. Las funciones de Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$.

Esta serie converge uniformemente en ζ sobre γ (¿por qué?), así que podemos integrar la ecuación (5) término a término (véase el teorema 3.1.9) y obtener

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \int_\gamma \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+k+1}}\, d\zeta$$

Si $n \geq 0$, el residuo de e^ζ/ζ^{n+k+1} en $\zeta = 0$ es $1/(n+k)!$ (¿por qué?) y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z)^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!} \\ &= \frac{z^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 1(n+1)} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(n+1)(n+2)} - \cdots\right] \end{aligned} \tag{6}$$

Así, $J_n(z)$ es entero para $n \geq 0$ y tiene un 0 de orden n en $z = 0$. Similarmente, para $n \leq 0$, uno encuentra que

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n} z^{-n+2k}}{2^{-n+2k}(k-n)!k!} \tag{7}$$

(véase el ejercicio 11). Se sigue que, para $n \leq 0$,

$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z) \tag{8}$$

La relación de las funciones de Bessel con las ecuaciones diferenciales es la siguiente: $J_n(z)$ es una solución de la *ecuación de Bessel*:

$$\frac{d^2 J_n}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dJ_n}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) J_n = 0 \tag{9}$$

La ecuación (9) se obtiene al diferenciar la ecuación (4) o la ecuación (5) para $J_n(z)$, e insertar el resultado en las ecuaciones de Bessel (véase el ejercicio 1). Observe que J_n y J_{-n} satisfacen la ecuación (9).

Si $n \geq 0$ pero n es un entero, podemos todavía hacer que $J_n(z)$ tenga sentido en la ecuación (6) al hacer

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{n+2k}}{2^{n+2k} k! \Gamma(n+k+1)} \tag{10}$$

Algunas identidades básicas se pueden obtener de las siguientes relaciones:

$$\frac{d}{dz}[z^{-n} J_n(z)] = -z^{-n} J_{n+1}(z) \qquad \text{si} \qquad z \neq 0 \tag{11}$$

Esto puede demostrarse directamente al diferenciar la serie de potencias. (La diferenciación término a término es válida, por supuesto (véanse las secciones 3.1 y 3.2). Se le pide al estudiante que establezca tal demostración en el ejercicio 4.

En la identidad (11), diferenciamos $z^{-n} J_n(z)$ para obtener

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{n}{z}[J_n(z)] - J_{n+1}(z) \tag{12}$$

Escribiendo $-n$ en lugar de n, llegamos a

$$\frac{d}{dz}[z^n J_{-n}(z)] = -z^n J_{-n+1}(z)$$

Pero $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ y, por ende,

$$\frac{d}{dz}[z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z)$$

esto es,

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_n(z) \tag{13}$$

Combinando las ecuaciones (12) y (13), obtenemos

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \tfrac{1}{2}[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \tag{14}$$

Las relaciones (11), (12) y (14) son llamadas las *relaciones de recurrencia* para las funciones de Bessel. Por ejemplo, si conocemos J_n y J_{n-1}, la ecuación (14) determina recursivamente a J_{n+1}.

Nuestro estudio se concluye con la fórmula asintótica para $J_n(z)$.

Fórmula asintótica para las funciones de Bessel 7.3.3. *La siguiente fórmula se satisface para cualquier entero* n:

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{15}$$

conforme $z \to \infty$, z *real y mayor que* 0. *(La ecuación* (15) *es también válida para* $|\arg z| < \pi$.)

Demostración. Utilizamos el teorema de la fase estacionaria (7.2.10) y la representación

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{iz\,\mathrm{sen}\,\theta - ni\theta}\,d\theta + \int_0^{\pi} e^{-iz\,\mathrm{sen}\,\theta + ni\theta}\,d\theta\right) \tag{16}$$

obtenida en la ecuación (4). Primero vamos a considerar la función

$$f(z) = \int_0^{\pi} e^{iz\,\mathrm{sen}\,\theta - ni\theta}\,d\theta$$

En la notación del teorema de la fase estacionaria, $h(t) = \mathrm{sen}\ t$ y $g(t) = e^{-int}$. Claramente h es analítica y real para t real, y g es C^1.

El intervalo $[a, b]$ es $[0, \pi]$, y $h'(t) = \cos t$ se anula únicamente en $t_0 = \pi/2$. En este punto, $h''(t_0) = -\mathrm{sen}\,(\pi/2) = -1 < 0$. Así, usamos el signo menos en la fórmula asintótica para f, lo que da

$$f(z) \sim \frac{e^{iz}\sqrt{2\pi}e^{-\pi i/4}}{\sqrt{z}} \cdot e^{-ni\pi/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\,e^{i(z - n\pi/2 - \pi/4)} \tag{17}$$

Similarmente, si hacemos $g(z) = \int_0^{\pi} e^{-iz\,\mathrm{sen}\,\theta + in\theta}\,d\theta$, obtenemos

$$g(z) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\,e^{-i(z - n\pi/2 - \pi/4)} \tag{18}$$

(La demostración de esto se pide en el ejercicio 9.) Sumando las ecuaciones (17) y (18), obtenemos, de la ecuación (16),

$$J_n(z) \sim \left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cdot 2\cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

que es el resultado deseado. ■

En consecuencia, para x grande, $J_n(x)$ se comporta como $\sqrt{2/\pi x}\,[\cos(x - \theta)]$, donde θ es un cierto ángulo llamado de *desfasamiento.*

Ejercicios

1. Demuestre que $J_n(z)$ satisface la ecuación de Bessel (fórmula 6 de la tabla 7.3.1).
2. Muestre que

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]$$

y que

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} \left[1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right]$$

conforme $z \to \infty$. (z es real y mayor que 0.)

3. Demuestre que $J'_0(z) = -J_1(z)$, utilizando la ecuación (4).
4. Demuestre que $d[z^{-n} J_n(z)]/dz = -z^{-n} J_{n+1}(z)$, para toda n.
5. Demuestre que $J_2(z) = J''_0(z) - J'_0(z)/z$.
6. Use las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel y el teorema de Rolle del cálculo, para mostrar que entre dos ceros positivos, reales y consecutivos de $J_n(x)$, hay exactamente un 0 de $J_{n+1}(x)$. Muestre que $J_n(x)$ y $J_{n+1}(x)$ no tienen raíces comunes.
7. Demuestre que $J_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z}$ (sen z), utilizando la definición de $J_n(z)$ para n no entera, dada por la ecuación (10).
8. Verifique que la expansión asintótica para $J_n(z)$ es consistente con la ecuación de Bessel.
9. Complete la demostración de que

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

mostrando que

$$\int_0^{\pi} e^{-iz \operatorname{sen} \theta + ni\theta} \, d\theta \sim \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \, e^{-i(z - n\pi/2 - \pi/4)}$$

(La función del lado izquierdo de la expresión es llamada una *función de Hankel.*)

10. Verifique que $\phi(x) = J_n(kx)$ es una solución de

$$\frac{d}{dx}(x\phi') + \left(k^2 x - \frac{n^2}{x} \right) \phi(x) = 0$$

con $\phi(0) = 0$, $\phi(a) = 0$, donde ka es cualquiera de los ceros de J_n, $n \neq 0$.

11. Establezca las ecuaciones (7) y (8).

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1. Establezca la convergencia del producto infinito y evalúelo

$$\prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

2. Establezca la convergencia del producto infinito y evalúelo

$$\prod_1^\infty \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$$

3. Use el ejemplo resuelto 7.1.10 para mostrar que

$$\sqrt{2} = \left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{9}{10}\right)\left(\tfrac{11}{10}\right)\left(\tfrac{13}{14}\right)\cdots$$

4. Use el ejemplo resuelto 7.1.10 para mostrar que

$$\sqrt{3} = 2\left(\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right)\left(\tfrac{10}{11}\right)\left(\tfrac{14}{13}\right)\left(\tfrac{16}{17}\right)\left(\tfrac{20}{19}\right)\cdots$$

5. ¿Sobre qué regiones es convergente cada uno de los siguientes productos?

a) $\prod_1^\infty (1 - z^n)$ *b)* $\prod_1^\infty (1 - n^{-z})$

6. Sea $H_m = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^m$. Demuestre que

$$\log \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} H_n z^n \qquad \text{para } |z| < 1$$

donde γ es la constante de Euler.

7. Sea $f(z) = \int_0^\pi e^{iz \operatorname{sen} t} \operatorname{sen}^2 t\, dt$. Utilice el método de la fase estacionaria para dar una fórmula asintótica para $f(z)$ conforme $z \to \infty$, z real y positivo.

8. Demuestre que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + Q(z)$$

donde $Q(z)$ es entera. Además, muestre que

$$Q(z) = \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

9. Desarrolle $\int_0^\infty e^{-t^3} dt$ en términos de la función gama. (*Sugerencia.* Haga el cambio de variable $y = t^3$.)

10. Muestre que $|d^k J_n(z)/dz^k| \le 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, para cualquier n, z real.

11. Demuestre que $\Gamma(\frac{1}{2} + iy) \to 0$ conforme $y \to \infty$.

12. Muestre que $\lim_{x \to \infty} J_n(x) = 0$

13. Obtenga una expansión asintótica para $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zy^2/2} \cos y^2\, dy$ (conforme $z \to \infty$, $z > 0$).

14. Demuestre que $x^n J_n(x) = \int_0^x t^n J_{n-1}(t)\, dt$, $n = 1, 2, \ldots$

15. Demuestre que $J_n(iy) \sim i^n e^y/\sqrt{2\pi y}$ (conforme $y \to \infty$, $y > 0$).

16. En este ejercicio se le pide desarrollar algunas propiedades de las *funciones de Legendre* (véase el ejercicio de repaso 34, capítulo 3). Estas funciones se encuentran en el estudio de las ecuaciones diferenciales (específicamente en la ecuación de Laplace en tres dimensiones, la cual describe una amplia gama de fenómenos físicos), cuando se utilizan coordenadas esféricas.[2]

a) Para $-1 < x < 1$, hágase

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_\gamma \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}}\, dt$$

donde γ es el contorno que se muestra en la figura 7.R.1. Al diferenciar bajo el signo de la integral (véase el ejemplo resuelto 2.4.15), muestre que $P_n(x)$ resuelve la *ecuación de Legendre*:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

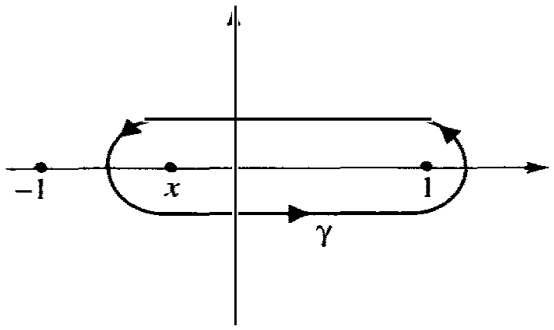


Figura 7.R.1. El contorno para la función de Legendre.

b) Para un entero n, deduzca la *fórmula de Rodrígues*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Esta fórmula da una extensión analítica obvia de $P_n(z)$.

c) Muestre que

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{(t^2-2tx+1)^{1/2}}\bigg|_{t=0}$$

y deduzca del teorema de Taylor que

$$\frac{1}{(1-2tz+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n$$

d) Desarrolle relaciones de recurrencia para los coeficientes de las soluciones de la ecuación de Legendre. Luego use estas relaciones para mostrar que las soluciones enteras deben ser de la forma

[2] Consulte, por ejemplo, G.F.D. Duff y D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*, Nueva York, Wiley, 1965.

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}, \quad n \text{ par}$$

o de la forma

$$\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}, \quad n \text{ impar}$$

Muestre que éstos son en realidad polinomios, esto es, que a_k y b_k se anulan para k grande.

e) Utilice *c*) para mostrar que $nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$.

f) Demuestre que $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$.

g) Muestre que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{2}{(2n+1)} & n = m \end{cases}$$

(*Sugerencia:* utilice *b*) para demostrar el caso en el que $n \neq m$; utilice *c*) para demostrar el caso en el que $n = m$.)

17. Obtenga la fórmula asintótica $P_n(z) \sim [(2n)!/2^n(n!)^2]z^n$ conforme $z \to \infty$, usando la parte *b*) del ejercicio 16.

8

La transformada de Laplace y aplicaciones

Este capítulo final da una introducción a la transformada de Laplace y a algunas de sus aplicaciones. La primera sección introduce dos propiedades claves que hacen a la transformada de Laplace útil para las ecuaciones diferenciales: Primero, ésta se comporta bien con respecto de la diferenciación, y segundo, se puede recuperar una función si se conoce su transformada de Laplace. La cercanamente relacionada transformada de Fourier también disfruta de estas propiedades. Esto se discutió en la sección 4.3; véase también el complemento a la sección 8.3.

En la sección 8.2 se desarrollan técnicas para invertir la transformada de Laplace; en la sección 8.3 se consideran algunas aplicaciones de la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

8.1. PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

La transformada de Laplace es una poderosa herramienta que es utilizada tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Es importante, por lo tanto, tener una buena comprensión tanto de su teoría básica como de su utilidad. Considere una función (de valores reales o complejos) $f(t)$ definida en $]0, \infty[$. La *transformada de Laplace* de f como la función $\tilde{f}$ de una variable compleja z dada por

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt \tag{1}$$

$\tilde{f}$ estará bien definida para aquellas $z \in \mathbf{C}$ para las cuales la integral converja. Otras notaciones comunes para $\tilde{f}$ una son $\mathcal{L}(f)$ o simplemente F.

Por razones técnicas, será conveniente imponer una leve restricción a las funciones que consideremos. Vamos a querer que f: $[0, \infty[\to \mathbf{C}$ (o $\mathbf{R}$) sea de *orden exponencial*. Esto significa que debe haber constantes $A > 0$, $B \in \mathbf{R}$, tales que

$$|f(t)| \leq Ae^{tB} \tag{2}$$

para $t \geq 0$. En otras palabras, f no debe crecer demasiado rápido; por ejemplo, cualquier polinomio satisface esta condición (¿por qué?). *Se supondrá que todas las funciones en el resto de este capítulo son de orden exponencial.* También se supondrá que en cualquier intervalo finito $[0, a]$, f es acotada e integrable. (Si, por ejemplo, suponemos que f es continua a trozos, esta última condición se satisface.)

Abscisa de convergencia

El primer resultado importante concierne a la naturaleza del conjunto en el cual $\tilde{f}(z)$ está definida y es analítica.

Teorema de convergencia para las transformadas de Laplace 8.1.1. *Sea* f: $[0, \infty[\to \mathbf{C}$ (o $\mathbf{R}$) *de orden exponencial y sea*

$$\tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$$

Existe un único número $\sigma, -\infty \leq \sigma < \infty$, *tal que*

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} f(t)\, dt \begin{cases} \text{converge si } \operatorname{Re} z > \sigma \\ \text{diverge si } \operatorname{Re} z < \sigma \end{cases} \tag{3}$$

Más aún, $\tilde{f}$ *es analítica en el conjunto* $A = \{z \mid \operatorname{Re} z > \sigma\}$ *y tenemos*

$$\frac{d}{dz}\tilde{f}(z) = -\int_0^{\infty} te^{-zt} f(t)\, dt \tag{4}$$

para $\operatorname{Re} z > \sigma$. *El número* σ *es llamado la* ***abscisa de convergencia,*** *y si definimos al número* ρ como

$$\rho = \inf \{B \in \mathbf{R} \mid \text{existe una } A > 0 \text{ tal que } |f(t)| \leq Ae^{Bt}\} \tag{5}$$

entonces $\sigma \leq \rho$.

El conjunto $\{z \mid \operatorname{Re} z > \sigma\}$ es llamado el *semiplano de convergencia.* (Si $\sigma = -\infty$, éste es todo $\mathbf{C}$.) Véase la figura 8.1.1. En general, es difícil decir cuando $\tilde{f}(z)$ convergerá en la línea vertical $\operatorname{Re} z = \sigma$.

La demostración de este teorema y resultados de convergencia más detallados, se dan en el suplemento al final de esta sección.

Si hay algún peligro de confusión, podemos escribir $\sigma(f)$ para σ o $\rho(f)$ para ρ. Una manera conveniente de calcular $\sigma(f)$ se describe en los ejemplos resueltos 8.1.12 y 8.1.13. El mapeo $f \mapsto \tilde{f}$ es claramente lineal en el sentido de que $(af+bg)^{\sim} = a\tilde{f} + b\tilde{g}$, válido para $\operatorname{Re} z > \text{máx}\,[\sigma(f), \sigma(g)]$. Es también cierto que el mapeo es uno a uno; esto es, $\tilde{f} = \tilde{g}$ implica que $f = g$; una función $\phi(z)$ es la transformada de Laplace de a lo más una función. De manera precisa:

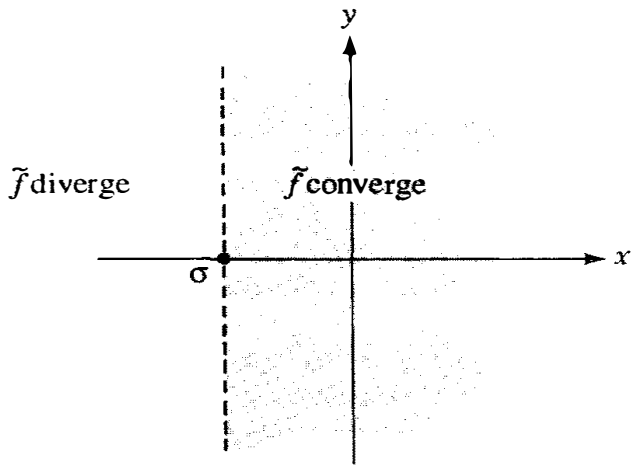


Figura 8.1.1. Semiplano de convergencia de la transformada de Laplace.

Teorema de unicidad para las transformadas de Laplace 8.1.2. *Suponga que* f *y* h *son continuas y que* $\tilde{f}(z) = \tilde{h}(z)$ *para* $\operatorname{Re} z > y_0$, *para alguna* y_0. *Entonces,* $f(t) = h(t)$ *para toda* $t \in [0, \infty[$.

Este teorema no es tan simple como parece. No hay suficiente maquinaria para dar una demostración completa, pero al final de esta sección se dan las ideas principales de una demostración. Usando las ideas de la teoría de integración, podemos extender el resultado del teorema de unicidad a funciones discontinuas también, pero tendríamos que modificar lo que queremos decir con "igualdad de funciones". Por ejemplo, si $f(t)$ cambia en un solo valor de t, $\tilde{f}$ no cambia.

El teorema de unicidad nos permite dar una respuesta significativa al problema, "Dada $g(z)$, encontrar $f(t)$ tal que $\tilde{f} = g$", porque resulta claro que puede haber a lo más una de tales f (continua). Llamaremos a f la *transformada de Laplace inversa* de g: en la siguiente sección se consideran los métodos para encontrar a f cuando g está dada.

Transformadas de Laplace de derivadas

La principal utilidad de la transformada de Laplace es que nos permite transformar problemas diferenciales en problemas algebraicos. Cuando estos últimos han sido resueltos, las respuestas a los problemas originales se obtienen usando la transformada de Laplace inversa. El procedimiento se basa en el siguiente teorema.

Proposición 8.1.3. *Sea* f(t) *continua en* [0, ∞[*y* C^1 *a trozos, esto es, continuamente diferenciable a trozos. Entonces, para* Re z > ρ (*como se definió en el teorema de convergencia* (8.1.1)),

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^{\sim}(z) = z\tilde{f}(z) - f(0) \tag{6}$$

Demostración. Por definición,

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^{\sim}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\,\frac{df}{dt}(t)\,dt$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\lim_{t_0 \to \infty}\left(e^{-zt} f(t)\Big|_0^{t_0}\right) + \int_0^{\infty} z e^{-zt} f(t)\,dt$$

Por la definición de ρ, $|e^{-Bt_0} \cdot f(t_0)| \le A$ para alguna $B <$ Re z. Así, obtener $|e^{-zt_0} \cdot f(t_0)| = |e^{-(z-B)t_0}|\,|e^{-Bt_0} \cdot f(t_0)| \le e^{-(\text{Re } z - B)t_0} A$, lo cual se aproxima a 0 conforme $t_0 \to \infty$. Por lo tanto, obtenemos $-f(0) + z\tilde{f}(z)$, como se aseguró.■

Observe que hemos demostrado que $(df/dt)^{\sim}(z)$ existe para Re $z >$ ρ, aun cuando su abscisa de convergencia podría ser menor que ρ.

Si aplicamos la ecuación (6) a d^2f/dt^2, obtenemos

$$\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)^{\sim}(z) = z^2\tilde{f}(z) - zf(0) - \frac{df}{dt}(0) \tag{7}$$

La ecuación (4) del teorema de convergencia (8.1.1) es la fórmula de relación $\tilde{g}(z) = d\tilde{f}(z)/dz$, donde $g(t) = -tf(t)$. En el ejercicio 19 se le pide al estudiante que demuestre la siguiente proposición, la cual contiene una fórmula similar para integrales.

Proposición 8.1.4. *Sea* $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$. *Entonces, para* Re z > máx [0, ρ(f)],

$$\tilde{g}(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{z} \tag{8}$$

Los teoremas de traslación y de convolución

En la tabla 8.1.1, al final de esta sección, se enlistan algunas fórmulas que son útiles para calcular $\tilde{f}(z)$. Las demostraciones de estas fórmulas son directas y están

incluidas en los ejercicios y ejemplos. Sin embargo, tres de estas fórmulas son lo suficientemente importantes para que se dé una explicación por separado, lo cual se hace en los siguientes tres teoremas.

Primer teorema de traslación 8.1.5. *Fije* $a \in \mathbf{C}$ *y sea* $g(t) = e^{-at} f(t)$. *Entonces, para* $\text{Re } z > \sigma(f) - \text{Re } a$, *tenemos*

$$\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z + a) \tag{9}$$

Demostración. Por definición

$$\tilde{g}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} e^{-at} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(z+a)t} f(t)\, dt = \tilde{f}(z + a)$$

lo cual es válido si $\text{Re } (z + a) > \sigma$.■

Segundo teorema de traslación 8.1.6. *Sea*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

(*Ésta es llamada la* ***función de salto unitario o de Heaviside***.) *También, sean* $a \geq 0$ *y* $g(t) = f(t - a)H(t - a)$; *esto es*

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ f(t - a) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

(véase la figura 8.1.12). *Entonces, para* $\text{Re } z > \sigma$, *tenemos*

$$\tilde{g}(z) = e^{-az} \tilde{f}(z) \tag{10}$$

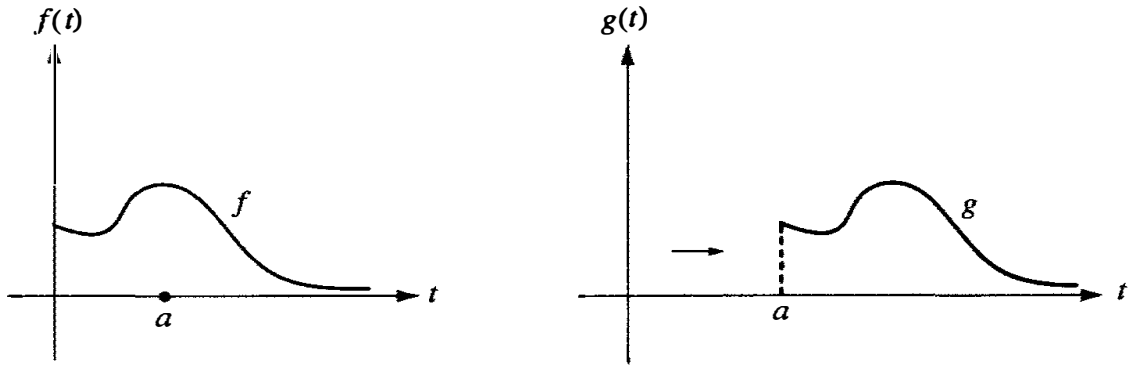


Figura 8.1.2. La función g en el segundo teorema de desfasamiento.

Demostración. Por definición y puesto que $g = 0$ para $0 \le t < a$,

$$\tilde{g}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt = \int_a^\infty e^{-zt} f(t-a)\, dt$$

Haciendo $\tau = t - a$, obtenemos

$$\tilde{g}(z) = \int_0^\infty e^{-z(\tau + a)} f(\tau)\, dt = e^{-za}\tilde{f}(z) \quad \blacksquare$$

De la ecuación (10) podemos deducir que si $a \ge 0$ y $g(t) = f(t)H(t-a)$, entonces $\tilde{g}(z) = e^{-az}\tilde{F}(z)$, donde $F(t) = f(t+a)$, $t \ge 0$ (véase la figura 8.1.3).

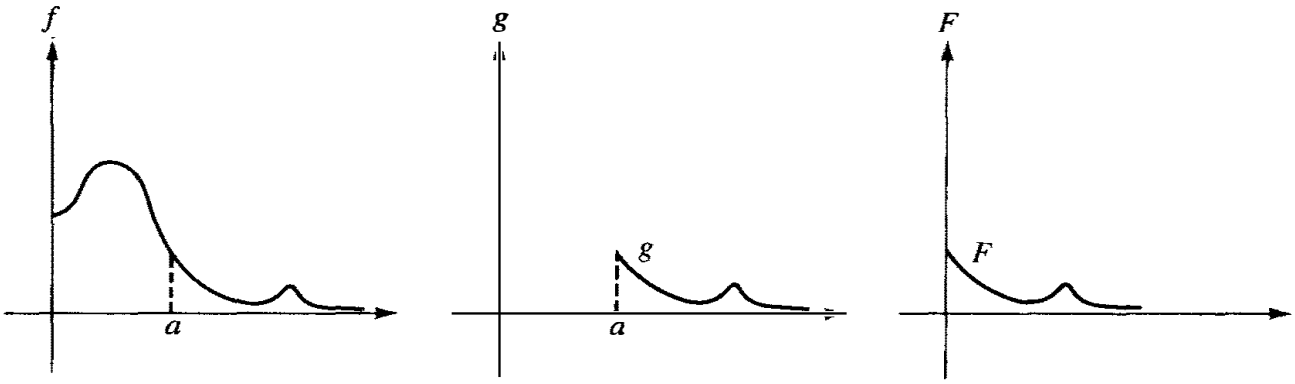


Figura 8.1.3. *F* se obtiene de *f* al trasladar y truncar.

La *convolución* de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ está definida como

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau \quad \text{para} \quad t \ge 0 \tag{11}$$

donde hacemos $f(t) = 0$ si $t < 0$. (Así, la integración es realmente sólo desde 0 hasta t). La operación de convolución está relacionada con las transformadas de Laplace de la siguiente manera.

Teorema de convolución 8.1.7. *Tenemos* $\mathrm{f} * \mathrm{g} = \mathrm{g} * \mathrm{f}$, *y*

$$(\mathrm{f} * \mathrm{g})\tilde{}(z) = \tilde{\mathrm{f}}(z) \cdot \tilde{\mathrm{g}}(z) \tag{12}$$

siempre que $\mathrm{Re}\ z > \max\,[\rho(f), \rho(g)]$.

Brevemente, la ecuación (12) establece que la transformada de Laplace de una convolución de dos funciones es el producto de sus transformadas. Es precisamente esta propiedad la que hace de la convolución una operación de interés para nosotros.

Demostración. Tenemos

$$(f * g)^{\sim}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \left[\int_0^{\infty} f(t-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau \right] dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-z\tau} e^{-z(t-\tau)} \int_0^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau\, dt$$

Para Re $z >$ máx $[\rho(f), \rho(g)]$. Las integrales de $\tilde{f}(z)$ y $\tilde{g}(z)$ convergen absolutamente, así que podemos intercambiar el orden de integración[1] y obtener así

$$\int_0^{\infty} e^{-z\tau} \left[\int_0^{\infty} e^{-z(t-\tau)} f(t-\tau) dt \right] g(\tau)\, d\tau$$

Si hacemos $s = t - \tau$ y recordamos que $f(s) = 0$ si $s < 0$, obtenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} \tilde{f}(z) g(\tau)\, d\tau = \tilde{f}(z) \cdot \tilde{g}(z)$$

Al cambiar las variables no es difícil verificar que f * g = g * f, pero tal verificación también se sigue de lo que hemos hecho si f y g son continuas. Tenemos $(f * g)^{\sim} = \tilde{f} \cdot \tilde{g} = \tilde{g} \cdot \tilde{f} = (g * f)^{\sim}$. En consecuencia, $(f * g - g * f)^{\sim} = 0$, así que por el teorema de unicidad (8.1.2), $f * g - g * f = 0$.■

Demostraciones técnicas de los teoremas

Para demostrar el teorema de convergencia (8.1.1), vamos a utilizar el siguiente importante resultado.

Lema 8.1.8. *Suponga que* $\tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$ *converge para* $z = z_0$. *Asuma que* $0 \leq \theta < \pi/2$ *y defina el conjunto*

$$S_\theta = \{z \text{ tal que } |\arg.(z - z_0)| \leq \theta\}$$

(véase la figura 8.1.4). *Entonces* $\tilde{f}$ *converge uniformemente en* S_θ.

[1] Este es un teorema concerniente a la teoría de integración del cálculo avanzado. Véase, por ejemplo, J. Marsden, *Elementary Classical Analysis* Nueva York, W. H. Freeman & Company, 1974, cap. 9.

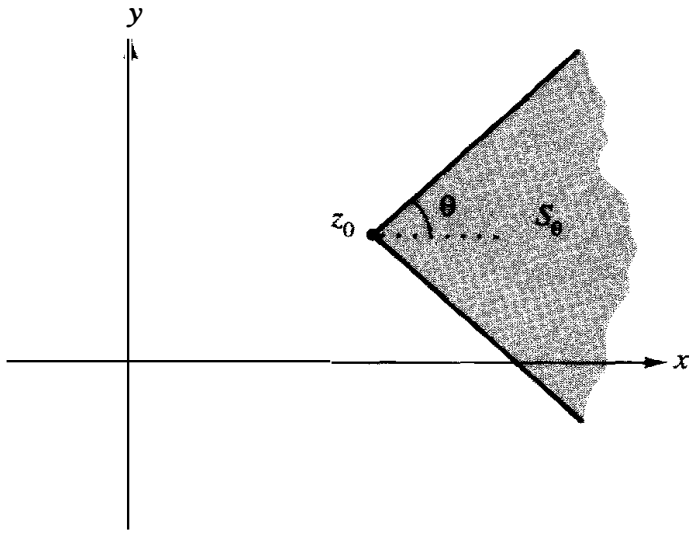


Figura 8.1.4. Sector de convergencia uniforme.

Demostración. Sea $h(x) = \int_0^x e^{-z_0 t} f(t)\, dt - \int_0^\infty e^{-z_0 t} f(t)\, dt$, de tal manera que $h \to 0$ conforme $x \to \infty$. Debemos mostrar que para toda $\varepsilon > 0$, existe una t_0 tal que $t_1, t_2 \geq t_0$ implica que

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t)\, dt \right| < \varepsilon$$

para toda $z \in S_\theta$. Se sigue que $\int_0^x e^{-zt} f(t) dt$ converge uniformemente en S_θ conforme $x \to \infty$, por el criterio de Cauchy. Haremos uso de la función $h(x)$ como sigue. Escríbase

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z - z_0)t} [e^{-z_0 t} f(t)]\, dt$$

Si integramos por partes, obtenemos (como el estudiante puede fácilmente verificar)

$$e^{-(z - z_0)t_2} h(t_2) - e^{-(z - z_0)t_1} h(t_1) + (z - z_0) \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z - z_0)t} h(t)\, dt$$

Dada $\varepsilon > 0$, escójase t_0 tal que $|h(t)| < \varepsilon/3$ y $|h(t)| < \varepsilon' = \varepsilon/(6 \sec \theta)$ si $t \geq t_0$. Entonces, para $t_2 > t_0$,

$$|e^{-(z - z_0)t_2} h(t_2)| \leq |h(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ya que $|e^{-(z - z_0)t_2}| = e^{-(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)t_2} \leq 1$, pues $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$. Similarmente, para $t_1 > t_0$,

$$|e^{-(z - z_0)t_1} h(t_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Debemos todavía estimar el último término:

$$\left|(z-z_0)\int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t}h(t)\,dt\right| \le |z-z_0|\varepsilon'\int_{t_1}^{t_2} e^{-(x-x_0)t}\,dt$$

donde $x = \text{Re } z$ y $x_0 = \text{Re } z_0$. Si $z = z_0$, este término es 0. Si $z \neq z_0$, entonces $x \neq x_0$, y obtenemos

$$\varepsilon' \frac{|z-z_0|}{x-x_0}\left(e^{-(x-x_0)t_1} - e^{-(x-x_0)t_2}\right) < 2\varepsilon' \frac{|z-z_0|}{x-x_0} \le 2\varepsilon' \sec\theta = \frac{\varepsilon}{3}$$

(véase la figura 8.1.5). Observe que la restricción $0 \le \theta < \pi/2$ es necesaria para que $\sec\theta = 1/\cos\theta$ sea finito.

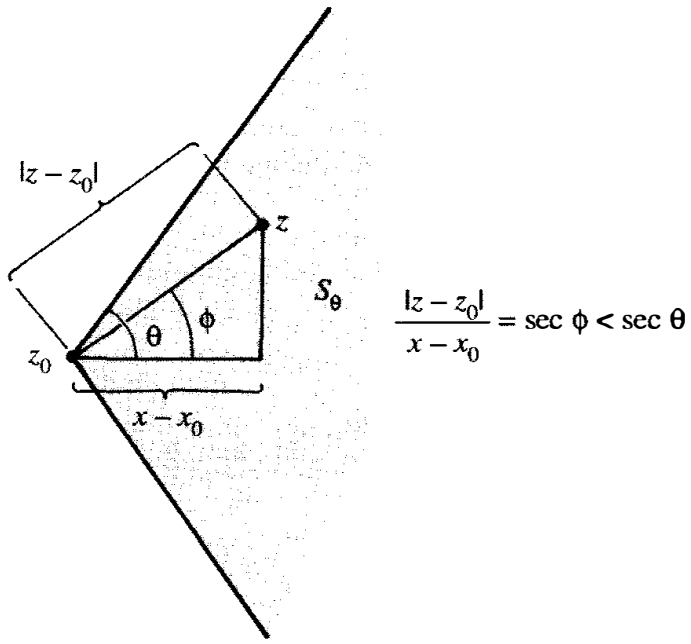


Figura 8.1.5. Algo de geometría en la región S_θ.

Combinando las desigualdades precedentes, obtenemos

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-zt}f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

si $t_1, t_2 \ge t_0$ para toda $z \in S_\theta$, completando así la demostración del lema.▼

Demostración del teorema de convergencia. Sea $\sigma = \inf\{x \in \mathbf{R} \mid \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt$ converge$\}$, donde inf quiere decir "la máxima cota inferior". Notamos, del lema 8.1.8, que si $\tilde{f}(z_0)$ converge, entonces, más específicamente $\tilde{f}(z)$ converge si $\text{Re } z > \text{Re } z_0$, puesto que z está en alguna S_θ para z_0 (¿por qué?).

Sea $\text{Re } z > \sigma$. Por la definición de σ, existe una $x_0 < \text{Re } z$ tal que $\int_0^\infty e^{-x_0 t} f(t)\,dt$ converge. Por lo tanto, $\tilde{f}(z)$ converge, por el lema 8.1.8. Recíprocamente, asuma que $\text{Re } z < \sigma$ y $\text{Re } z < x < \sigma$. Si $\tilde{f}(z)$ converge, entonces $\tilde{f}(x)$ converge y, por lo

tanto, decir que $\sigma \leq x$ es una contradicción. En consecuencia, $\tilde{f}(z)$ no converge si Re $z < \sigma$.

Enseguida, utilizando el teorema de convergencia analítica, demostramos que $\tilde{f}$ es analítica en $\{z \mid \text{Re } z > \sigma\}$. Sea $g_n(z) = \int_0^n e^{-zt} f(t)\, dt$, entonces, $g_n(z) \to \tilde{f}(z)$. Por el ejemplo resuelto 2.4.15, g_n es analítica, con $g'_n(z) = -\int_0^n te^{-zt} f(t)\, dt$. Debemos mostrar que $g_n \to \tilde{f}$ uniformemente en los discos cerrados en $\{z \mid \text{Re } z > \sigma\}$. Pero cada disco está en algún S_θ relativo a alguna z_0, con Re $z_0 > \sigma$ (figura 8.1.6). Esta afirmación es geométricamente clara y puede también verificarse analíticamente.

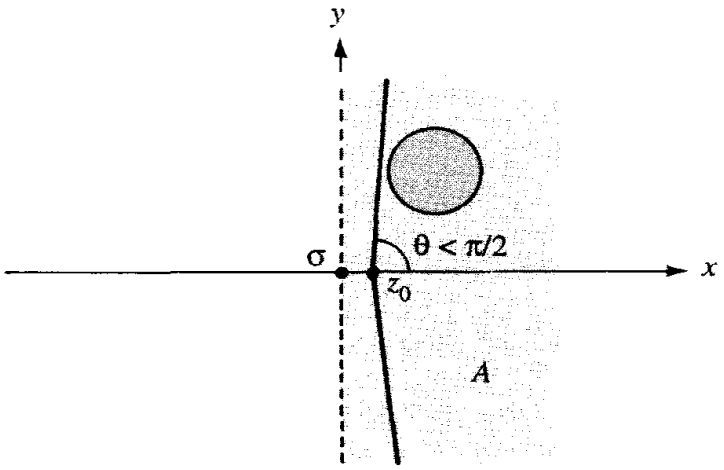


Figura 8.1.6. Cada disco está en S_θ para alguna θ, $0 \leq \theta < \pi/2$.

Así, por el teorema de convergencia analítica (3.1.8), $\tilde{f}$ es analítica en $\{z \mid \text{Re } z > \sigma\}$ y

$$(\tilde{f})'(z) = -\int_0^\infty te^{-zt} f(t)\, dt$$

Sabemos automáticamente que esta representación integral para la derivada de $\tilde{f}$ convergerá para Re $z > \sigma$, así como lo harán todas las derivadas literadas.

Resta mostrar que $\sigma \leq \rho$. Para demostrar esto únicamente necesitamos demostrar que $\sigma \leq B$ si $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$. Esto se cumplirá, por lo que hemos demostrado, si $\tilde{f}(z)$ converge siempre que Re $z > B$. En efecto, vamos a demostrar la convergencia absoluta. Observe que $|e^{-zt} f(t)| = |e^{-(z-B)t} e^{-Bt} f(t)| \leq e^{-(\text{Re } z - B)t} A$. Puesto que $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt = 1/\alpha$ converge para $\alpha > 0$, $\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$ converge absolutamente. ■

Para demostrar que $\tilde{f} = \tilde{h}$ implica que $f = h$ para funciones continuas f y h, es suficiente considerar $f - h$ y demostrar el siguiente caso especial del teorema 8.1.2.

Proposición 8.1.9. *Suponga que* f *es continua y que* $\tilde{f}(z) = 0$ *siempre que* Re $z > y_0$, *para alguna* y_0. *Entonces* $f(t) = 0$ *para toda* $t \in [0, \infty[$.

El lema crucial que usamos para demostrarla es el siguiente.

Lema 8.1.10. *Sea* f *continua en* [0, 1] *y suponga que* $\int_0^1 t^n f(t)\, dt = 0$ *para toda* n = 0, 1, 2,... *Entonces* f = 0.

Esta afirmación es razonable ya que se sigue que $\int_0^1 P(t)f(t)\,dt = 0$ para cualquier polinomio P.

Demostración. La demostración precisa depende del teorema de aproximación de Weierstrass, el cual establece que cualquier función continua es el límite uniforme de polinomios; véase, por ejemplo, J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Nueva York, W.H. Freeman and Company, 1974, cap. 5. Por este teorema, obtenemos que $\int_0^1 g(t)f(t)\,dt = 0$ para cualquier g continua. El resultado se sigue al tomar $g = f$ y aplicar el hecho de que si la integral de una función continua no negativa es cero entonces la función es cero. ▼

Demostración del teorema 8.1.9. Suponga que

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt = 0$$

siempre que Re $z > \sigma$. Fije $x_0 > y_0$ real y hágase $s = e^{-t}$. Al cambiar variables para expresar a las integrales en términos de s, obtenemos, en $z = x_0 + n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\int_0^\infty e^{-nt} e^{-x_0 t} f(t)\,dt = \int_0^\infty s^n h(s)\,ds = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $h(s) = e^{-x_0 t + t} f(t)$. Así, por el lema 8.1.10, h y, en consecuencia f, es cero. ■

Observación. Es útil notar que $\tilde{f}(z) \to 0$ conforme Re $z \to \infty$. Esto se sigue de los argumentos utilizados para demostrar el teorema 8.1.1 (véase el ejercicio de repaso 10).

Tabla 8.1.1. Algunas transformadas de Laplace comunes.

Definición: $\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt$
1. $\tilde{g}(z) = -\frac{d}{dz}\tilde{f}(z)$ donde $g(t) = tf(t)$.
2. $(af + bg)^{\sim} = a\tilde{f} + b\tilde{g}$.
3. $\left(\frac{df}{dt}\right)^{\sim}(z) = z\tilde{f}(z) - f(0)$. (Asuma que f es C^1 a tramos.)
4. $\tilde{g}(z) = \frac{1}{z}\tilde{f}(z)$ donde $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$.
5. $\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z + a)$ donde $g(t) = e^{-at} f(t)$.
6. $\tilde{g}(z) = e^{-az}\tilde{f}(z)$ donde $a > 0$ y $g(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t-a) & t \geq a. \end{cases}$

Tabla 8.1.1. (*Continuación.*)

7. $\tilde{g}(z) = e^{-az}\tilde{F}(z)$ donde $a \geq 0$, $F(t) = f(t + a)$ y $g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < a \\ f(t) & t \geq a. \end{cases}$

8. $(f * g)\tilde{}(z) = \tilde{f}(z) \cdot \tilde{g}(z)$, donde $(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau$.

9. Si $f(t) = e^{-at}$, entonces $\tilde{f}(z) = \dfrac{1}{z + a}$ y $\sigma(f) = -\text{Re } a$.

10. Para $f(t) = \cos at, \tilde{f}(z) = \dfrac{z}{z^2 + a^2}$ y $\sigma(f) = |\text{Im } a|$.

11. Si $f(t) = \text{sen } at, \tilde{f}(z) = \dfrac{a}{z^2 + a^2}$ y $\sigma(f) = |\text{Im } a|$.

12. Si $f(t) = t^a$, $a > -1, \tilde{f}(z) = \dfrac{\Gamma(a + 1)}{z^{a+1}}$ y $\sigma(f) = 0$.

13. Si $f(t) = 1$, $\tilde{f}(z) = \dfrac{1}{z}$ y $\sigma(f) = 0$.

Ejemplos resueltos

8.1.11. *Demuestre la fórmula* 9 *en la tabla* 8.1.1 *y encuentre* $\sigma(f)$ *en ese caso.*

Solución. Por definición

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-zt}dt = \int_0^\infty e^{-(a+z)t}\,dt = -\frac{e^{-(a+z)t}}{a+z}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{z+a}$$

La evaluación en $t = \infty$ está justificada al observar que $\lim_{t\to\infty} e^{-(a+z)t} = 0$ si Re $(a + z) > 0$, ya que $|e^{-(a+z)t}| = e^{-\text{Re}(a+z)t} \to 0$ conforme $t \to \infty$. Entonces, la fórmula es válida si Re $z > -\text{Re } a$.

NOTA. La fórmula para $\tilde{f}$ es válida únicamente para Re $z > -\text{Re } a$, aunque $\tilde{f}$ coincida allí con una función que sea analítica excepto en $z = -a$. Esta situación es similar a aquella de la función gama (véase la fórmula 12 de la tabla 7.1.1).
Finalmente, mostramos que para $f(t) = e^{-at}$, $\sigma(f) = -\text{Re } a$. Acabamos de mostrar que $\sigma(f) \leq -\text{Re } a$. Pero la integral diverge en $z = a$, así que $\sigma(f) \geq -\text{Re } a$, y, en consecuencia $\sigma(f) = -\text{Re } a$.
En el caso en el que $a = 0$, este ejemplo especializa la fórmula 13 de la tabla 8.1.1.

8.1.12. *Suponga que hemos calculado* $\tilde{f}(z)$ *y se ha encontrado que ésta converge para* Re $z > \gamma$. *Suponga también que* $\tilde{f}$ *coincide con una función analítica que tiene un polo sobre la línea* Re $z = \gamma$. *Muestre que* $\sigma(f) = \gamma$.

Solución. Sabemos que $\sigma(f) \leq \gamma$, por la propiedad básica de σ en el teorema de convergencia. También, puesto que $\tilde{f}$ es analítica para Re $z > \sigma$, no puede haber polos en la región $\{z \mid \text{Re } z > \sigma\}$. Si $\sigma(f)$ fuera $< \gamma$, habría un polo en esta región. Por lo tanto, $\sigma(f) = \gamma$ (véase la figura 8.1.7).

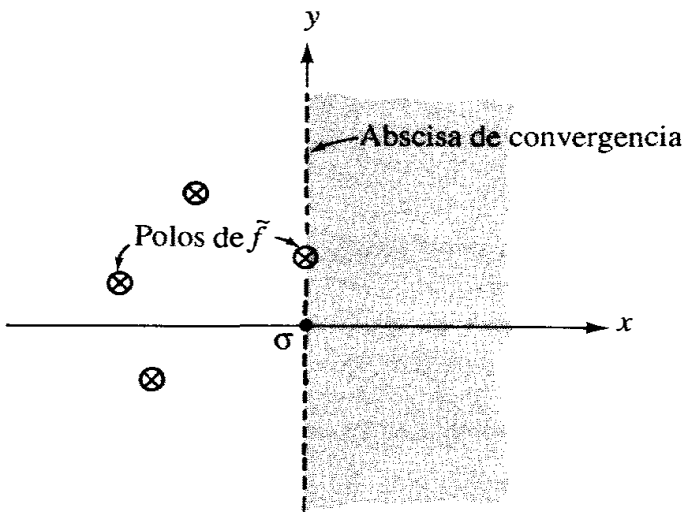


Figura 8.1.7. Localización de los polos de $\tilde{f}$.

8.1.13. *Sea* f(t) = cosh t. *Calcule* $\tilde{f}$ y σ(f).

Solución. $f(t) = \cosh t = (e^t + e^{-t})/2$. Así, por las fórmulas 2 y 9 de la tabla 8.1.1,

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) = \frac{z}{z^2-1}$$

Aquí $\sigma(f)=1$, por el ejemplo resuelto 8.1.12; $\sigma(e^t)=1$ y $\sigma(e^{-t})=-1$, así que $\sigma(f)\leq 1$, pero no puede ser <1 ya que $\tilde{f}$ tiene un polo en $z=1$.

Ejercicios

En los ejercicios del **1** al **9** calcule la transformada de Laplace de $f(t)$ y encuentre la abscisa de convergencia.

1. $f(t) = t^2 + 2$
2. $f(t) = \text{senh } t$
3. $f(t) = t + e^{-t} + \text{sen } t$
4. $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < 1 < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$
5. $f(t) = (t+1)^n$, n un entero positivo.
6. $f(t) = \begin{cases} \text{sen } t & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$
7. $f(t) = t \text{ sen } at$
8. $f(t) = t \text{ senh } at$

9. $f(t) = t \cos at$

10. Utilice los teoremas de traslación para mostrar lo siguiente:

a) Si $f(t) = e^{-at} \cos bt$, entonces

$$\tilde{f}(z) = \frac{z + a}{(z + a)^2 + b^2}$$

b) Si $f(t) = e^{-at} t^n$, entonces

$$\tilde{f}(z) = \frac{\Gamma(n + 1)}{(z + a)^{n+1}}$$

¿A qué es igual $\sigma(f)$ en cada caso?

11. Demuestre la fórmula 10 de la tabla 8.1.1

12. Demuestre la fórmula 11 de la tabla 8.1.1

13. Demuestre la fórmula 12 de la tabla 8.1.1

14. Demuestre la fórmula 13 de la tabla 8.1.1

15. Suponga que f es periódica con periodo p (esto es, $f(t + p) = f(t)$ para toda $t \geq 0$). Demuestre que

$$\tilde{f}(z) = \frac{\int_0^p e^{-zt} f(t)\, dt}{1 - e^{-pz}}$$

es válida si Re $z > 0$. (*Sugerencia.* Desarrolle $\tilde{f}(z)$ como una suma infinita.)

16. Utilice el ejercicio 15 para demostrar que

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - e^{-z}}{1 - e^{-2z}}$$

donde $f(t)$ es como se ilustra en la figura 8.1.8.

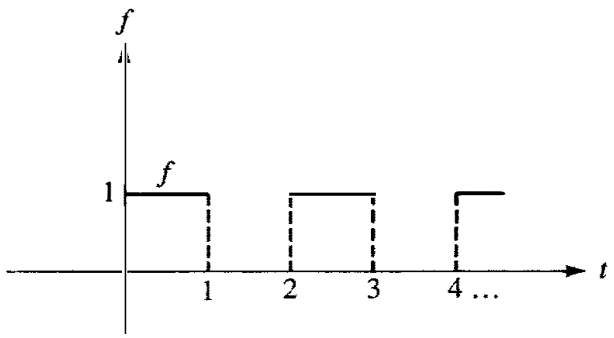


Figura 8.1.8. La función de pulso unitario.

17. Sea $g(t) = \int_0^t e^{-s} \operatorname{sen} s\, ds$. Calcule $\tilde{g}(z)$. Calcule $\tilde{f}(z)$ si $f(t) = tg(t)$.

18. Sea $f(t) = (\operatorname{sen} at)/t$. Muestre que $\tilde{f}(z) = \tan^{-1}(a/z)$.

19. Demuestre la proposición 8.1.4. Primero establezca que $\rho(g) \leq$ máx $[0, \rho(f)]$.

20. Dé una demostración directa de que $f * g = g * f$ (véase el teorema de convolución (8.1.7)).

21. Sea $f(t) = e^{-e^t}$, $t \geq 0$. Muestre que $\sigma(f) = -\infty$.

22. Con respecto del teorema de convergencia (8.1.1), muestre que, en general, $\sigma \neq \rho$. (*Sugerencia*: Considere $f(t) = e^t \operatorname{sen} e^t$ y muestre que $\sigma = 0$, $\rho = 1$.)

8.2. LA FÓRMULA DE INVERSIÓN COMPLEJA

Es importante poder calcular $f(t)$ cuando se conoce $\tilde{f}(z)$.Una fórmula general para tal cálculo, llamada la *fórmula de inversión compleja*, se establecerá en esta sección. También, usando las fórmulas de la tabla 8.1.1 en forma inversa, podemos obtener un número de útiles técnicas alternativas. (Véanse los ejemplos resueltos 8.2.4 y 8.2.5.)

Fórmula de inversión compleja

La demostración de la fórmula de inversión compleja se basa en muchos de los puntos principales que se desarrollaron en los primeros cuatro capítulos de este libro. Ésta debe ser vista como uno de los resultados clave de nuestro análisis de la transformada de Laplace.

Fórmula de inversión compleja 8.2.1. *Suponga que* $F(z)$ *es analítica en* $\mathbf{C}$ *excepto para un número finito de singularidades asiladas y que* F *es analítica en el semiplano* $\{z \mid \operatorname{Re} z > \sigma\}$. *Suponga también que existen constantes positivas* M, R *y* β *tales que* $|F(z)| \leq M/|z|^{\beta}$ *siempre que* $|z| \geq R$; *esto es cierto, por ejemplo, si* $F(z) = P(z)/Q(z)$ *para polinomios* P *y* Q *con grado* $(Q) \geq 1 +$ *grado* (P). *Para* $t \geq 0$, *sea*

$$f(t) = \sum \{\text{residuos de } e^{zt}F(z) \text{ en cada una de sus singularidades en } \mathbf{C}\} \qquad (1)$$

Entonces $\tilde{f}(z) = F(z)$ *para* $\operatorname{Re} z > \sigma$.

Demostración. Sea $\alpha > \sigma$ y considere un rectángulo grande Γ con lados a lo largo de $\operatorname{Re} z = \pm x_1$, $\operatorname{Im} z = y_2$ e $\operatorname{Im} z = -y_1$ seleccionados lo suficientemente grandes para que las singularidades de F estén dentro de Γ y $|z| > R$ en todo Γ. Divida a Γ en una suma de dos trayectorias rectangulares γ y $\tilde{\gamma}$ mediante una línea vertical a través de $\operatorname{Re} z = \alpha$. (Véase la figura 8.2.1.) La demostración de la fórmula de inversión compleja (1) puede también efectuarse usando un círculo grande en lugar del rectángulo Γ. De hecho, en el último parágrafo de la demostración, Γ es ligeramente deformado hasta tal círculo. Sin embargo, la trayectoria rectangular será útil en el corolario 8.2.2, en el cual éste juega un papel parecido al de la trayectoria rectangular en la demostración de la proposición 4.3.4, concerniente a la evaluación de las transformadas de Fourier.

Puesto que todas las singularidades de F están dentro de γ, tenemos

$$\int_{\gamma} e^{zt}F(z)\,dz = 2\pi i \sum \{\text{residuos de } e^{zt}F(z)\} = 2\pi i f(t)$$

así que

$$2\pi i\tilde{f}(z) = \lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-zt}\left[\int_\gamma e^{\zeta t}F(\zeta)\,d\zeta\right]dt = \lim_{r\to\infty}\int_\gamma\int_0^r e^{(\zeta-z)t}F(\zeta)\,dt\,d\zeta$$

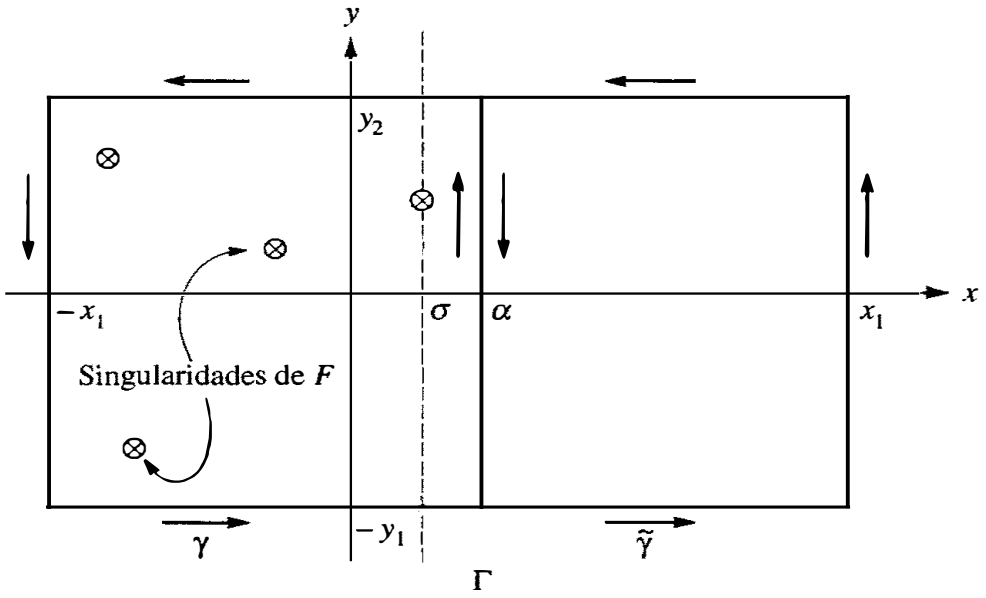


Figura 8.2.1. $\Gamma = \gamma + \tilde{\gamma}$.

Pudimos intercambiar el orden de integración porque ambas integrales están sobre intervalos finitos. Por lo tanto,

$$2\pi i\tilde{f}(z) = \lim_{r\to\infty}\int_\gamma (e^{(\zeta-z)r}-1)\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

Con z fijo en el semiplano Re $z > \alpha$, el término $e^{(\zeta-z)r}$ se aproxima a 0 y el integrando converge uniformemente a $-F(\zeta)/(\zeta-z)$ sobre γ. Obtenemos

$$2\pi i\tilde{f}(z) = -\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - \int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

$$= 2\pi i F(z) - \int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

siempre que Γ sea lo suficientemente grande para que z esté dentro de $\tilde{\gamma}$. Finalmente,

$$\left|\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right| \le \int_\Gamma \frac{M}{|z|^\beta|\zeta-z|}\,|d\zeta| \le \frac{2\pi M\rho}{\rho^\beta(\rho-R)}$$

al escoger a Γ lo suficientemente grande de tal manera que esté fuera del círculo $|\zeta| = \rho > R$ con todas las singularidades de $F(\zeta)/(\zeta-z)$ dentro de este círculo y luego

deformando Γ hasta el círculo. Esta última expresión se va a 0 conforme $\rho \to \infty$. Así, haciendo que Γ se expanda hasta ∞, obtenemos $\tilde{f}(z) = F(z)$. Con una elección adecuada de α esto se puede hacer para cualquier z en el semiplano Re $z > \sigma$.■

El siguiente corolario de teorema y su demostración deben tomarse en cuenta.

Corolario 8.2.2. *Suponga que se satisfacen las condiciones de la fórmula de inversión compleja. Si* F(z) *es analítica para* Re $z > \sigma$ *y tiene una singularidad sobre la línea* Re $z = \sigma$, *entonces* (i) *la abscisa de convergencia de* f *es* σ, *y* (ii)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{zt}F(z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha + iy)t}\,F(\alpha + iy)\,dy \qquad (2)$$

para cualquier constante $\alpha > \sigma$. *La primera integral se toma a lo largo de la línea vertical* Re $z = \alpha$ *y converge como una integral de Riemann impropia; la segunda integral se utiliza como una notación alternativa para la primera.*

Demostración

(i) La fórmula de la inversión compleja (8.2.1) muestra que $\sigma(f) \leq \sigma$ puesto que $\tilde{f}(z)$ converge para Re $z > \sigma$. Si $\sigma(f)$ fuera $< \sigma$, entonces $\tilde{f}(z)$ sería analítica para Re $z > \sigma(f)$, por el teorema de convergencia (8.1.1). Pero F tiene una singularidad en un punto z_0 sobre la línea de Re $z = \sigma$ y, por lo tanto, existe una sucesión de puntos $z_1, z_2, z_3, \ldots$ que converge a z_0, con $F(z_n) \to \infty$. Puesto que $\tilde{f}(z) = F(z)$ para Re $z > \sigma$, y ya que ambas son analíticas en una vecindad agujerada de z_0, éstas serían iguales en esa vecindad agujerada, por el principio de continuación analítica. Esto significaría que $\tilde{f}(z_n) \to \infty$. Pero esto es imposible, ya que $\tilde{f}(z)$ es analítica en Re $z > \sigma(f)$. Así, $\sigma(f) < \sigma$ no es posible. Debemos tener $\sigma(f) = \sigma$.

(ii) De la fórmula de inversión compleja (8.2.1), $2\pi i f(t) = \int_\gamma e^{zt}F(z)\,dz$. Esta integral converge a la integral de la ecuación (2), exactamente como en la demostración de la proposición 4.3.4, conforme x_1, y_1 y $y_2 \to \infty$. Puesto que y_1 y y_2 se van independientemente a ∞, esto establece la convergencia de la integral impropia. (La situación aquí es rotada en 90° de aquella de la proposición 4.3.4.) ■

En los ejemplos resueltos, deben verificarse todas las condiciones del teorema. Si no se satisfacen, la ecuación (2) para $f(t)$ puede no ser válida. La ecuación (1) es algunas veces más conveniente que la tabla 8.1.1 para calcular las transformadas de Laplace inversas, ya que es sistemática y no requiere un trabajo de adivinación de cuál es la fórmula apropiada. Sin embargo, la tabla puede ser útil en los casos en los cuales no se satisfacen las hipótesis del teorema, o resulte inconveniente el verificarlas.

Teorema de expansión de Heaviside

Aplicamos ahora la fórmula de la inversión compleja para el caso en el que $F(z) = P(z)/Q(z)$, donde P y Q son polinomios. Damos un caso simple aquí.

Teorema de expansión de Heaviside 8.2.3. *Sean* P(z) *y* Q(z) *polinomios,* con grado Q ≥ grado P +1. *Suponga que los ceros de* Q *están localizados en los puntos* $z_1, \ldots, z_m$ *y que son polos simples. Entonces, la transformada de Laplace inversa de* F(z) = P(z)/Q(z) *está dada por*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{z_i t} \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)} \tag{3}$$

Más aún, $\sigma(f) = \max \{\text{Re } z_i \mid i = 1, 2, \ldots m\}$.

Demostración. Puesto que grado $Q \geq$ grado $P + 1$, se satisfacen las condiciones de la fórmula de la inversión compleja (8.2.1) (compare con la proposición 4.3.4). Así, $f(t) = \Sigma$ {residuos de $e^{zt}[P(z)/Q(z)]$}. Pero los polos son todos simples y, por lo tanto, por la fórmula 4 de la tabla 4.1.1, tenemos

$$\text{Res}\left(e^{zt}\frac{P(z)}{Q(z)}, z_i\right) = e^{z_i t}\frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}$$

La fórmula para $\sigma(f)$ es una consecuencia del corolario 8.2.2. ■

Ejemplos resueltos

8.2.4. *Si* $\tilde{f}(z) = 1/(z - 3)$, *encuentre* f(t).

Solución. Remítase a la fórmula 9 de la tabla 8.1.1. Sea $a = -3$; entonces obtenemos $f(t) = e^{3t}$. Alternativamente, podríamos obtener el mismo resultado si usamos el teorema de expansión de Heaviside. En este ejemplo, $\sigma(f) = 3$.

8.2.5. *Si* $\tilde{f}(z) = \log(z^2 + z)$, *¿a qué es igual* f(t)?

Solución. Observe que si $g(t) = tf(t)$, entonces, por la fórmula 1 de la tabla 8.1.1,

$$\tilde{g}(z) = -\frac{d}{dz}\tilde{f}(z) = -\frac{d}{dz}\log(z^2 + z) = -\frac{2z + 1}{z^2 + z}$$

Para encontrar $g(t)$ usamos fracciones parciales:

$$\tilde{g}(z) = -\frac{2z + 1}{z^2 + z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z + 1}$$

Por lo tanto, $g(t) = -1 - e^{-t}$, y entonces

$$f(t) = -\frac{1}{t}(1 + e^{-t})$$

Aun cuando este argumento parece satisfactorio, es engañoso porque *en efecto no existe* f(t) *cuya transformada de Laplace sea* $\log(z^2 + z)$. Si existiera, entonces este procedimiento nos llevaría $f(t) = -(1 + e^{-t})/t$. Para cualquier x real,

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt$$

no puede converger porque cerca de 0, e^{-xt} es $\geq \frac{1}{2}$ y $f(t) \geq 1/t$, pero $1/t$ no es integrable. Así, $\tilde{f}$ no existe en ninguno de los sentidos que hemos discutido. El argumento previo en el que se obtuvo $f(t)$ es aparentemente plausible porque asume la existencia de una $f(t)$; véase también la observación al final de la sección 8.1.

8.2.6. *Calcule la transformada de Laplace inversa de*

$$F(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z^2+3z-10)}$$

Luego calcule $\sigma(f)$, *la abscisa de convergencia de* f.

Solución. En este caso, es conveniente la ecuación (1) porque las hipótesis de la fórmula de la inversión compleja (8.2.1) claramente se satisfacen. Así,

$$f(t) = \sum \left\{ \text{residuos de } \frac{e^{zt}z}{(z+1)^2(z^2+3z-10)} = \frac{e^{zt}z}{(z+1)^2(z+5)(z-2)} \right\}$$

Los polos están en $z = -1$, $z = -5$ y $z = 2$. El polo en -1 es doble, mientras que los otros son simples. El residuo en -1 es, por la fórmula 7 de la tabla 4.1.1, $g'(-1)$, donde $g(z) = (e^{zt}z)/(z^2 + 3z - 10)$. Obtenemos entonces

$$\frac{-te^{-t}}{-12} + \frac{e^{-t}}{-12} - \frac{(-e^{-t}) \cdot [2 \cdot (-1) + 3]}{144} = \frac{1}{12}\left(te^{-t} - e^{-t} + \frac{e^{-t}}{12}\right)$$

"El residuo en -5 es $e^{-5t} \cdot 5/16 \cdot 7$; el residuo en 2 es $e^{2t} \cdot 2/9 \cdot 7$. Por lo tanto

$$f(t) = \frac{1}{12}\left(te^{-t} - e^{-t} + \frac{e^{-t}}{12}\right) + \frac{5e^{-5t}}{16 \cdot 7} + \frac{2e^{2t}}{63}$$

Por el corolario 8.2.2, $\sigma(f) = 2$.

8.2.7. *Verifique la fórmula* 9 *de la tabla* 8.1.1 *utilizando la fórmula de inversión compleja.*

Solución. Podemos encontrar la transformada de Laplace inversa de $1/(z + a)$ utilizando la ecuación (1). El único polo, el cual es simple, está en $z = -a$. El residuo de $e^{zt}/(z + a)$ en $z = -a$ es claramente e^{-at}, el cual coincide con la tabla 8.1.1. También, $\sigma(f) = -\text{Re}\, a$ porque el polo de F está en la línea $\text{Re}\, z = -\text{Re}\, a$.

Ejercicios

1. Calcule la transformada de Laplace inversa de cada una de las siguiente funciones

   a) $F(z) = \frac{z}{z^2+1}$ *b)* $F(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ *c)* $F(z) = \frac{z^2}{z^3-1}$

2. Verifique las fórmulas 10 y 11 de la tabla 8.1.1 utilizando el teorema 8.2.1.

3. Explique cuál es el error con el siguiente razonamiento. Sea

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

Entonces, por las fórmulas 6 y 13 de la tabla 8.1.1, $\tilde{g}(z) = e^{-z}/z$. Por la ecuación (1), $g(t) = \text{Res}\,(e^{z(t-1)}/z, 0) = 1$. Por lo tanto, $1 = 0$.

4. Demuestre un teorema de expansión de Heaviside para P/Q cuando Q tiene ceros dobles.
5. Calcule la transformada de Laplace inversa de cada una de las siguientes:

$$a)\ \frac{z}{(z+1)(z+2)} \qquad b)\ \operatorname{senh} z \qquad c)\ \frac{1}{(z+1)^3}$$

6. Utilice el teorema de traslación (fórmula 7 de la tabla 8.1.1) para encontrar una fórmula para la transformada de Laplace inversa de $e^{-z}/(z^2+1)$.
7. Utilice el teorema de convolución para encontrar una fórmula para la transformada de Laplace inversa de la función $\tilde{f}(z)/(z^2+1)$ para $f(t)$ dada.
8. Encuentre la transformada de Laplace inversa de $1/\sqrt{z}$ mediante una modificación adecuada de la demostración de la fórmula de inversión compleja (8.2.1).
9. Encuentre la transformada de Laplace inversa de $(z+1)/[z(z+3)^2]$.
10. Sea $f(t) = J_1(kt)/t$, donde J_1 es la función de Bessel. Muestre que

$$\tilde{f}(z) = \frac{\sqrt{k^2+z^2} - z}{k}$$

8.3. APLICACIÓN DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En esta sección se presentará una breve introducción a una de las muchas aplicaciones de las transformadas de Laplace. El método está basado en la fórmula

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^{\sim}(z) = z\tilde{f}(z) - f(0)$$

y las técnicas para encontrar la inversa de las transformadas de Laplace que fueron desarrolladas en la sección precedente.

Vamos a asumir que las soluciones existen y a intentar encontrar fórmulas para ellas. Cuando se encuentre la fórmula, podemos verificar que, en efecto, es una solución. Sin embargo, algunas veces las soluciones no son diferenciables y entonces no satisfacen estrictamente la ecuación.Tales soluciones deben ser vistas como *soluciones generalizadas*. Un análisis más amplio de estas soluciones conduciría al tema de la teoría de distribuciones. Debe tenerse en cuenta que aun cuando f no sea diferenciable pero sea continua en 0, $z\tilde{f}(z) - f(0)$ está todavía definida y puede mirarse como la *definición generalizada de* $(df/dt)^{\sim}$. Esto se ilustra en el ejemplo 8.3.2.

Ejemplo 8.3.1. *Resuelva la ecuación* $y'' + 4y' + 3y = 0$ *para* $y(t)$, $t \ge 0$, *sujeto a las condiciones de que* $y(0) = 0$ *y* $y'(0) = 1$. *Aquí* y' *representa a* dy/dt.

Solución. Tenemos la transformada de Laplace en cada lado de la ecuación usando la fórmula 3 de la tabla 8.1.1:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^{\sim}(z) = z\tilde{y}(z) - y(0) = z\tilde{y}(z)$$

Si se aplica esto otra vez nos da

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^{\sim}(z) = z^2\tilde{y}(z) - zy(0) - y'(0) = z^2\tilde{y}(z) - 1$$

Por lo tanto, nuestra ecuación resulta $z^2\tilde{y}(z) - 1 + 4z\tilde{y}(z) + 3\tilde{y}(z) = 0$ y, por lo tanto,

$$\tilde{y}(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3} = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

La transformada de Laplace inversa de esta función es, por la fórmula de inversión,

$$y(t) = \sum \left\{\text{residuos de } \frac{e^{zt}}{(z+1)(z+3)} \text{ a } -1, -3\right\}$$

En consecuencia

$$y(t) = \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2}$$

Ésta es la solución deseada, como se puede verificar directamente al sustituir en la ecuación diferencial.▼

Ejemplo 8.3.2. *Resuelva la ecuación* $y'(t) - y(t) = H(t-1)$, $t \geq 0$, $y(0) = 0$, *donde* H *es la función de Heaviside.*

Solución. Otra vez tomamos las transformadas de Laplace en ambos lados de la ecuación. Obtenemos $z\tilde{y}(z) - y(0) - \tilde{y}(z) = e^{-z}/z$. Por lo tanto, $\tilde{y}(z) = e^{-z}/z\,(z-1)$. La transformada de Laplace inversa de $1/[z(z-1)]$ es $1 - e^{-t}$ así que la de $e^{-z}/[z(z-1)]$ es, por la fórmula 6 de la tabla 8.1.1,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ -1 + e^{t-1} & t \geq 1 \end{cases}$$

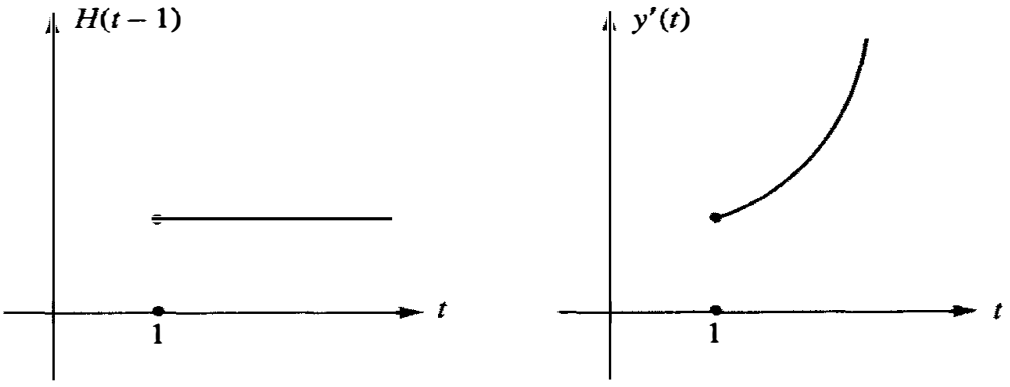


Figura 8.3.1. En $t = 1$ *y* recibe un impulso.

(Observe que la fórmula de inversión compleja (8.2.1) no se aplica tal y como está formulada). Esta solución (véase la figura 8.3.1) no es diferenciable y no puede ser considerada entonces como una solución en el sentido estricto. Sin embargo, es una solución en un sentido generalizado, como se explicó previamente. En la figura 8.3.1, la discontinuidad en $H(t-1)$ causa el salto repentino en $y'(1)$. Decimos que $y(t)$ recibe un "impulso" en $t = 1$.▼

Ejemplo 8.3.3. *Encuentre una solución particular de* $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = f(t)$.

Solución. Vamos a encontrar la solución con $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Al tomar transformadas de Laplace, $z^2\tilde{y}(z) + 2z\tilde{y}(z) + 2\tilde{y}(z) = \tilde{f}(z)$, y así $\tilde{y}(z) = \tilde{f}(z)/(z^2 + 2z + 2)$. La transformada de Laplace inversa de $1/(z^2 + 2z + 2)$ es

$$g(t) = \frac{e^{z_1 t}}{2(z_1 + 1)} + \frac{e^{z_2 t}}{2(z_2 + 1)}$$

donde z_1, z_2 son las dos raíces de $z^2 + 2z + 2$, a saber, $-1 \pm i$. Al simplificar, obtenemos $g(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$. Así, por la fórmula 8 de la tabla 8.1.1,

$$y(t) = (g * f)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$
$$= \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-\tau}\operatorname{sen}\tau\,d\tau$$

Ésta es la solución particular que buscábamos. Generalmente, tales soluciones particulares a ecuaciones de la forma

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y = f \quad a_1, \ldots, a_n \text{ son constantes}$$

se expresarán en forma de una convolución. Para obtener una solución con $y(0)$, $y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ dadas, podemos sumar una solución particular y_p que satisfaga $y_p(0) = 0, y_p'(0) = 0, \ldots, y_p^{(n-1)}(0) = 0$ una solución y_c de la ecuación homogénea en la cual f se hace igual a 0 y con $y_c(0), y_c'(0), \ldots, y_c^{(n-1)}(0)$ dadas. La suma $y_p + y_c$ es la solución buscada. (Estas afirmaciones son fáciles de verificar.) ▼

El método de las transformadas de Laplace es un método sistemático para manejar ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. (Por supuesto, estas ecuaciones pueden ser manejadas también por otros medios). Si los coeficientes no son constantes, el método falla, debido a que la transformada de un producto involucra entonces una convolución y encontrar una solución para $y(z)$ resulta difícil.

SUPLEMENTO DE LA SECCIÓN 8.3: LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y LA ECUACIÓN DE ONDA

La transformada de Fourier, la cual se introdujo en la sección 4.3, proporciona una segunda gran herramienta para resolver ecuaciones diferenciales. Ilustramos ese uso y el papel de la variable compleja enfocados en la ecuación de onda. Nuestra discusión será un tanto informal y vamos a renunciar a la formulación rigurosa de los teoremas.

La ecuación de onda

La ecuación de onda es la ecuación del movimiento que describe el desarrollo de la propagación de una perturbación ondulatoria en un medio. Describe, por ejemplo, el desplazamiento vertical de una cuerda vibrante (véase la figura 8.3.2), la propagación de una onda electromagnética a través del espacio y las ondas sonoras en una sala de conciertos y ciertos tipos de movimientos de ondas de agua.

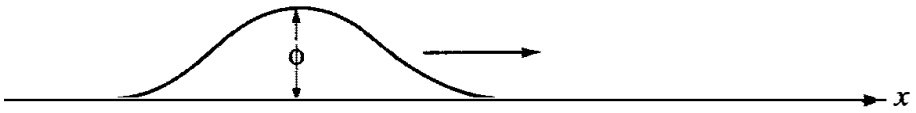


Figura 8.3.2. ϕ es la amplitud de onda.

Consideremos primero el problema homogénero, el caso más simple en el cual una onda viaja a lo largo de una cuerda de densidad constante ρ y bajo una tensión constante T. El desplazamiento vertical $\phi(x, t)$, en la posición x y al tiempo t, satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{1}$$

donde $c = \sqrt{T/\rho}$, la velocidad de propagación, es una constante. Aceptamos este hecho de la física elemental. (La derivación asume que la amplitud es pequeña.)

Observe que si hubiéramos tenido $c = \sqrt{-1}$ en la ecuación (1), la ecuación de movimiento, recobraríamos la ecuación de Laplace (véanse las secciones 2.5 y 5.3). En efecto, al momento en que esa ecuación admite soluciones de la forma $f(x \pm \sqrt{-1}y)$, las soluciones de la ecuación de onda toman la forma $f(x \pm ct)$. El hecho de que la ecuación (1) es de segundo orden en la variable t, sugiere que una solución esté dada en forma única cuando se especifican dos piezas de los datos originales en $t = 0$. Estos datos consisten de $\phi(x, 0)$ y $\partial\phi/\partial t$ en $(x, 0)$; la ecuación (1) da entonces el comportamiento de $\phi(x, t)$ para todas las t subsecuentes.

Para resolver la ecuación (1) realizamos una transformada en la variable x para obtener una ecuación más simple que involucre la variable transformada k. Sin embargo, aquí x va desde $-\infty$ hasta $+\infty$, así que en vez de usar la transformada de Laplace usamos la *transformada de Fourier*. Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, la función transformada de Fourier $\hat{f}$ de f está entonces definida como

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

Hay una fórmula de inversión que es análoga a la fórmula de inversión de Laplace. Ésta es:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk$$

La transformada de Fourier de la función $\phi(x, t)$ está definida como

$$\hat{\phi}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\phi(x, t)\, dx \tag{2}$$

Aquí realizamos la integral con respecto de la variable x, viendo a t como un parámetro fijo. La fórmula de inversión de Fourier se lee ahora

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\hat{\phi}(k, t)\, dk \tag{2'}$$

Estamos ahora listos para resolver la ecuación (1). Al aplicar la ecuación (1) a la ecuación (2') y diferenciar abajo la integral, obtenemos[2]

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2}(k, t) + k^2\hat{\phi}(k,t) = 0 \tag{3}$$

En otras palabras, nuestra técnica de transformación ha reemplazado la ecuación diferencial para $\phi(x, t)$ con una ecuación diferencial simple para $\hat{\phi}(k, t)$. La ecuación (3) es fácil de resolver. La solución es

$$\hat{\phi}(k, t) = A(k)e^{ikct} + B(k)e^{-ikct} \tag{4}$$

donde $A(k)$ y $B(k)$ son dos constantes de integración que pueden depender del parámetro k. Aplicando la fórmula de inversión (2'), tenemos

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [A(k)e^{ik(x+ct)} + B(k)e^{ik(x-ct)}]\, dk \tag{4'}$$

Ésta es nuestra solución a la ecuación (1). Las funciones $A(k)$ y $B(k)$ están determinadas por los datos iniciales $\phi(x, 0)$ y $\partial\phi(x, 0)/\partial t$.

Obsérvese también que la primera integral en la ecuación (4') depende únicamente de la variable $x + ct$, mientras que la segunda depende únicamente de $x - ct$; esto es, $\phi(x, t)$ toma la forma

$$\phi(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

donde las ecuaciones f y g están otra vez determinadas por ϕ y $\partial\phi/\partial t$ en $t = 0$. Podemos verificar mediante la sustitución en la ecuación (1) que esta fórmula para ϕ da en efecto una solución de la ecuación (1).

Algunas soluciones especiales de la ecuación (1) merecen una atención por separado. Éstas son las ondas monocromáticas (uni-frecuencia), y son de la forma

$$\phi(x, t) = e^{i(x/c - t)\omega}$$

[2] La ecuación (3) se puede también obtener al tomar la transformada de Fourier de la ecuación (1) y usando el hecho que $\phi(x, t)$ y $\partial\phi(x, t)/\partial x$ converge a cero conforme $x \to \infty$.

donde ω es la frecuencia. Esta ϕ representa una onda de frecuencia ω que viaja hacia la derecha de la cuerda. Generalmente, $f(x + ct)$ es una onda que se mueve hacia la izquierda y cuya forma es aquella de la gráfica de f, con velocidad c. Similarmente, $g(x - ct)$ es una onda que se mueve hacia la derecha.

En seguida vamos a tratar con el problema no homogéneo. el cual ocurre cuando se le aplica a la onda una fuerza externa. Por ejemplo, suponga que en la cuerda que se ilustra en la figura 8.3.2 se diera una densidad de carga constante q y luego se pusiera en un campo eléctrico externo $E(x, t)$ apuntando en la dirección y. Esto resultaría en que a la cuerda se le aplica una fuerza $F(x, t)$ proporcional a $qE(x, t)$. Debemos resolver entonces la siguiente ecuación del movimiento para el desplazamiento $\phi(x, t)$:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + F(x, t) \tag{5}$$

Por simplicidad, tomamos $F(x, t)$ en la ecuación (5) para que sea periódica con frecuencia ω:

$$F = f(x, \omega)\, e^{i\omega t}$$

Esto nos permite considerar el problema más simple

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + f(x, \omega) e^{i\omega t} \tag{6}$$

Escribimos la solución de la ecuación (6) como $\phi(x, t, \omega)$. Una vez que hemos resuelto la ecuación (6) podemos tratar con el problema de una fuerza general $F(x, t)$. Primero la "Fourier-analizamos", esto es, escribimos F como sigue:

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \omega) e^{-i\omega t}\, d\omega$$

donde

$$f(x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) e^{it\omega}\, dt$$

Superponemos entonces las soluciones de la ecuación (6) para obtener

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t, \omega)\, d\omega$$

Resolvemos la ecuación (6), otra vez tomando la transformada de Fourier con respecto de la variable x, para obtener

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} + k^2 \hat{\phi} = \hat{f}(k, \omega) e^{i\omega t} \tag{7}$$

donde

$$\hat{f}(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x, \omega)\, dx$$

La ecuación (7) es una ecuación diferencial de segundo orden, no homogénea y simple. Al sumar la solución particular

$$\frac{\hat{f}(k, \omega) e^{i\omega t}}{k^2 - (\omega/c)^2}$$

de la ecuación (7) a las soluciones homogéneas de la ecuación (4), obtenemos la solución general de la ecuación (7):

$$\hat{\phi}(t, \omega) = A(k)e^{ikct} + B(k)e^{-ikct} + \frac{\hat{f}(k, \omega)}{k^2 - (\omega/c)^2} e^{i\omega t} \tag{8}$$

La solución de la ecuación (6) es entonces

$$\phi(x, t, \omega) = h(x + ct) + g(x - ct) + (G * f)e^{i\omega t} \tag{8'}$$

Los términos de la ecuación (8') se explican como sigue. Los primeros dos términos son soluciones de la ecuación homogénea (1), y otra vez, éstas son escogidas de manera que se satisfagan los datos iniciales en $t = 0$. El último término, una solución particular de la ecuación no homogénea (6), está dado al tomar la inversa de la transformada de Fourier del último término de la ecuación (8):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \left[\frac{\hat{f}(k, \omega)}{k^2 - (\omega/c)^2} \right] dk$$

Como con la transformada de Laplace, este término es la convolución de G y f, donde $\hat{G} = 1/[k^2 - (\omega/c)^2]$. Esta función $\hat{G}$ juega un papel central en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales. Su transformada,

$$G(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{ikx}}{k^2 - (\omega/c)^2} \right] dk \tag{9}$$

es llamada la "función de Green" y podemos usar integración de contorno para evaluarla en forma cerrada como sigue.

El integrando de la ecuación (9) tiene polos simples en $k = \pm(\omega/c)$. En esta forma presente, la integral en la ecuación (9) no es convergente. Para especificar su valor debemos usar el valor principal de Cauchy. Se pueden obtener varios valores posibles dependiendo de como interpretemos nuestras integrales. Para seleccionar el valor que queremos, vamos a evaluar la ecuación (9) acercando el contorno de integración en la mitad superior del plano complejo k, para $x > 0$ y en la mitad inferior del plano para $x < 0$. Esto es necesario si la integral sobre el semicírculo se aproxima

a 0 conforme el radio se aproxima a infinito. Por el teorema de Cauchy, tomamos los residuos de los polos encerrados. Debemos todavía especificar cómo nos vamos a ir alrededor de las singularidades en $k = \pm\omega/c$. Elecciones diferentes nos llevan diferentes valores de G, pero aun matemáticamente aceptables. Nuestra elección final está determinada por el comportamiento asintótico que queremos tenga G conforme $x \to \infty$. Las soluciones homogéneas de la ecuación (1) en las cuales estamos interesados, se comportan como $\exp(\pm ikx)$, vista como una función de x, y requeriremos el mismo comportamiento de G. Esto puede especificarse mediante la "regla $i\varepsilon$":

$$G(x, \omega) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{ikx}}{k^2 - (\omega/c - i\varepsilon)^2} \right] dk \tag{9'}$$

en la cual todavía acercamos el contorno (como se muestra en la figura 8.3.3) de acuerdo al signo de x.

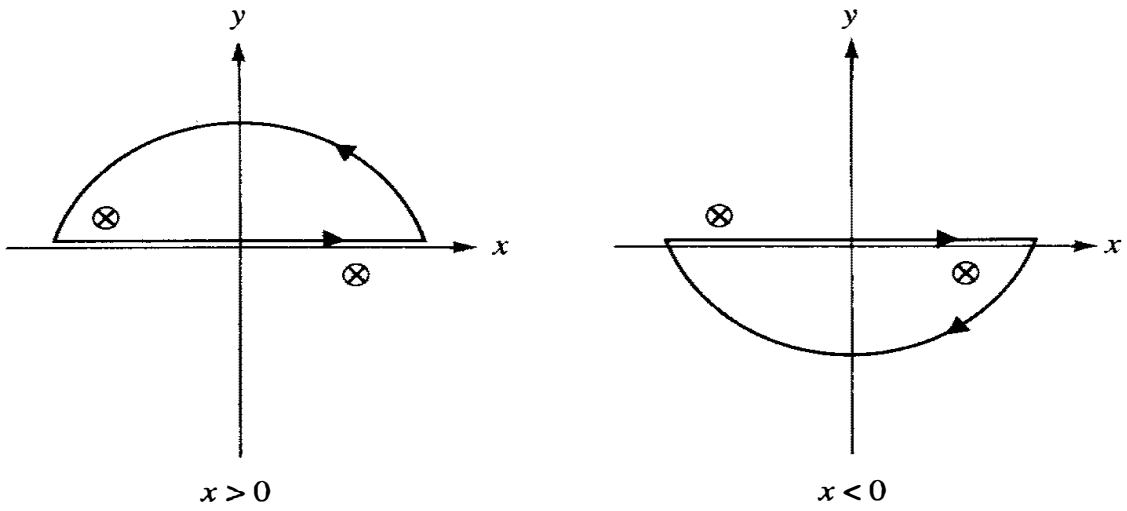


Figura 8.3.3. Contornos para $G(x, \omega)$.

Podemos ahora evaluar $G(x, \omega)$. De la ecuación (9') y el teorema del residuo obtenemos, para $x > 0$,

$$G(x, \omega) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{2\pi} \left[2\pi i \cdot \frac{e^{ix(i\varepsilon + \omega/c)}}{-2(\omega/c - i\varepsilon)} \right] = -\frac{ic}{2\omega} e^{i\omega x/c}$$

Haciendo cálculos similares para $x < 0$ y usando el lado derecho del contorno de la figura 8.3.3, obtenemos

$$G(x, \omega) = \begin{cases} \dfrac{-ic}{2\omega} e^{i\omega x/c} & x > 0 \\ \dfrac{-ic}{2\omega} e^{-i\omega x/c} & x < 0 \end{cases}$$

Equivalentemente,[3]

$$G(x, \omega) = \frac{c}{2i\omega} e^{i\omega|x|/c} \qquad (9'')$$

El problema de dispersión

Cuando el medio a través del cual se propaga la onda no es homogéneo, encontramos el problema de dispersión. Por ejemplo, suponga que la cuerda vibrante de la figura 8.3.2 consiste ahora de las tres piezas unidas suavemente con una pieza de longitud a, que tiene una densidad ρ_2 (la región II en la figura 8.3.4) y las otras dos

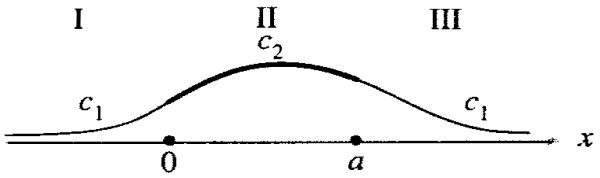


Figura 8.3.4. Dispersión unidimensional.

piezas tienen cada una densidad ρ_1 (las regiones I y III en la figura 8.3.4). Denótese con c_1 y c_2 las correspondientes velocidades de propagación. Asuma que $\rho_2 > \rho_1$. Imagine que una onda incidente $e^{i(x/c_1 - t)\omega}$ viaja a través de la cuerda desde la izquierda. Conforme la onda se mueve sobre el material más denso en $x = 0$, parte de ésta será reflejada hacia atrás, mientras que otra parte será trasmitida hacia adelante. En $x = a$, una parte de la onda será otra vez reflejada hacia atrás mientras que el resto viajará hacia adelante (véase la figura 8.3.5).

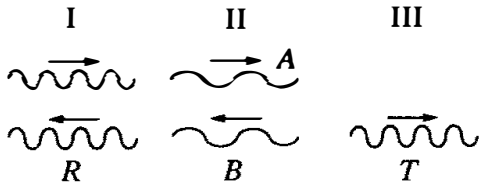


Figura 8.3.5. Reflexión en una dispersión unidimensional.

[3] En los libros de texto sobre la materia de ecuaciones diferenciales, G se obtiene como la solución de

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \omega^2 G = \delta(x - y)$$

donde δ es la "función δ de Dirac". La solución se encuentra mediante la fórmula general

$$G(x, y, \omega) = \begin{cases} -u(x)v(y)/w & x > y \\ -u(y)v(x)/w & x - y \end{cases}$$

Aquí u y v son soluciones de la correspondiente ecuación homogénea y w es su wronskiano, $w = uv' - vu'$. En este caso, tenemos $u = e^{i\omega x}$ y $v = e^{-i\omega x}$. Recobramos la ecuación (9'') al hacer $y = 0$.

Debemos resolver la ecuación de onda en cada región

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad \text{para las regiones I, III}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_2^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad \text{para la región II}$$

No es irrazonable esperar soluciones de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{I}}(x,t) &= e^{i(x/c_1 - t)\omega} + Re^{i(-x/c_1 - t)\omega}\\ \phi_{\mathrm{II}}(x,t) &= Ae^{i(x/c_2 - t)\omega} + Be^{i(-x/c_2 - t)\omega}\\ \phi_{\mathrm{III}}(x,t) &= Te^{i(x/c_1 - t)\omega}\end{aligned}$$

Vamos a requerir que, en $x = 0$ y $x = a$, las soluciones se unan una con la otra y no tengan picos. Matemáticamente esto significa imponer las condiciones de frontera de que ϕ y $\partial\phi/\partial x$ sean continuas en $x = 0, a$. En otras palabras,

$$\phi_{\mathrm{I}}(0,t) = \phi_{\mathrm{II}}(0,t) \qquad \phi_{\mathrm{II}}(a,t) = \phi_{\mathrm{III}}(a,t)$$

$$\frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial\phi_{\mathrm{II}}}{\partial x}(0,t) \qquad \frac{\partial\phi_{\mathrm{II}}}{\partial x}(a,t) = \frac{\partial\phi_{\mathrm{III}}}{\partial x}(a,t)$$

Estas cuatro ecuaciones nos permiten resolver para los coeficientes R, A, B, T. Estamos particularmente interesados en T. Después de efectuar algunas manipulaciones algebraicas encontramos que

$$T = \frac{4c_1c_2e^{it[(1/c_2) - (1/c_1)]\omega a}}{(c_1 + c_2)^2 - (c_1 - c_2)^2e^{2ia\omega/c_2}} \tag{10}$$

(véase el ejercicio II). T es llamada la *amplitud de dispersión* y el cuadrado de su valor absoluto representa la intensidad de onda trasmitida en la región III.

Vamos a permitir que en la ecuación (10), ω resulte una variable compleja y vemos que $T(\omega)$ tiene las siguientes propiedades:

(i) T es meromorfa en ω y tiene polos en el semiplano superior en $\omega = (c_2/a)(n\pi - i\rho)$, donde ρ está determinado por $e^{2\rho} = (c_1 + c_2)^2/(c_1 - c_2)^2$.
(ii) T tiene valor absoluto 1 en aquellos puntos ω para los cuales $e^{2i\omega/c_2} = 1$.
(iii) Conforme $\omega \to +i\infty$, $T \to 0$.
(iv) Conforme $\omega \to -i\infty$, $T \to \infty$.

Relaciones de dispersión

Cuando una función de una variable compleja $f(z)$ comparte las mismas cuatro propiedades que $T(\omega)$, el teorema de Cauchy puede utilizarse para obtener una útil e interesante representación para $f(z)$, como se muestra en el siguiente

Teorema de la transformada de Hilbert 8.3.4. *Si* $f(z)$ *es analítica para* $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ *y* $f(z) \to 0$ *uniformemente conforme* $z \to \infty$ *en el semiplano* $0 < \arg z < \pi$, *entonces* $f(z)$ *satisface las siguientes relaciones de integración:*

(i) *Si* $z_0 = x_0 + iy_0$, *con* $y_0 > 0$, *entonces*

$$f(z_0) = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, 0)}{(x_0 - x)^2 + y_0^2}\, dx \tag{11}$$

y

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, 0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2}\, dx \tag{12}$$

(ii) *Si* $z_0 = x_0$ *es real, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, 0)}{x - x_0}\, dx \tag{13}$$

Demostración. Debido a las suposiciones, podemos aplicar el teorema de Cauchy, usando un semicírculo grande en el semiplano superior, para obtener

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, 0)}{x - z_0}\, dx$$

(véase la sección 4.3). También tenemos

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, 0)}{x - \bar{z}_0}\, dx$$

donde $\bar{z}_0$ está en el semiplano inferior. Si sustraemos estas dos últimas ecuaciones, obtenemos la ecuación (11); si sumamos los términos obtenemos la ecuación (12). La ecuación (13) se sigue de la fórmula 6 de la tabla 4.2.1. ■

Como un corolario, al tomar las partes real e imaginaria de cada lado de la ecuación (11), obtenemos

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x, 0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2}\, dx \tag{11'}$$

donde $f = u + iv$; una ecuación similar se satisface para $v(x, y)$. De la ecuación (12) tenemos

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - x_0)v(x, 0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2}\, dx$$

$$v(x_0, y_0) = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - x_0)u(x, 0)}{(x - x_0)^2 + y_0^2}\, dx \tag{12'}$$

Finalmente, de la ecuación (13), obtenemos

$$u(x_0, 0) = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(x, 0)}{x - x_0} dx$$
$$v(x_0, y_0) = \frac{-1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x, 0)}{x - x_0} dx \qquad (13')$$

La ecuación (11′) nos da los valores de una función armónica en el semiplano superior, en términos de sus valores frontera sobre el eje real y proporciona entonces una solución a la ecuación de Laplace en el semiplano superior (véase el ejercicio 12).

Observe que si $f(z)$ satisface la propiedad simétrica $\overline{f(-x)} = f(x)$ entonces podemos escribir

$$\text{Re}\, f(x_0) = \frac{2}{\pi} \text{V.P.} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im}\, f(x)}{x^2 - x_0^2} x\, dx$$

mientras que si $f(z)$ satisface $\overline{f(-x)} = -f(x)$, entonces

$$\text{Re}\, f(x_0) = \frac{2x_0}{\pi} \text{V.P.} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im}\, f(x)}{x^2 - x_0^2} dx$$

Las ecuaciones (12′) y (13′) pueden ser vistas como las versiones integrales de las ecuaciones de Cauchy-Riemann; éstas simplemente nos dicen; por ejemplo, los valores que debe tomar la parte real de una función analítica, cuando se especifica la parte imaginaria. Cuando las funciones u y v satisfacen la ecuación (13′) decimos que u y v son las "transformadas de Hilbert" una con respecto de la otra. Históricamente, las transformadas de Hilbert fueron las precursoras de una serie de relaciones *llamadas relaciones de dispersión.* Primero se observó que éstas se satisfacían para la constante dieléctrica compleja como una función de la frecuencia incidente, por H. A. Kramers y R de L. Kroning, en 1924. Desde 1950 aproximadamente, éstas han sido estudiadas sistemáticamente y aplicadas a la amplitud de dispersión $T(\omega)$ y a clases bastante generales de problemas de dispersión, para los cuales está definida esta amplitud. La extensión de estas relaciones a problemas de dispersión tridimensionales será considerada posteriormente en este suplemento.

Las relaciones derivadas asumen que $f(z)$ es analítica sólo para Im $z \geq 0$. Sin embargo, existe una segunda clase de problemas de dispersión para funciones que son analíticas en el plano z excepto para la línea de rama a lo largo del eje real.

Proposición 8.3.5. *Si* f(z) *es analítica en el plano* z *con una línea de rama desde* z = a *hasta* ∞, *y si* |f(z)| = $O(1/z)$, *entonces*

$$\text{f(z)} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_a^{\infty} \frac{1}{x - z} [\text{f}(x + i\varepsilon) - \text{f}(x - i\varepsilon)]\, dx$$

(la notación $O(1/z)$ se explica en la sección 7.2; $\lim_{\varepsilon \to 0+}$ significa que el límite se toma para $\varepsilon > 0$.)

Demostración. Tome el contorno de la figura 8.3.6 y aplique el teorema de Cauchy a $f(\zeta)/(\zeta - z)$. ■

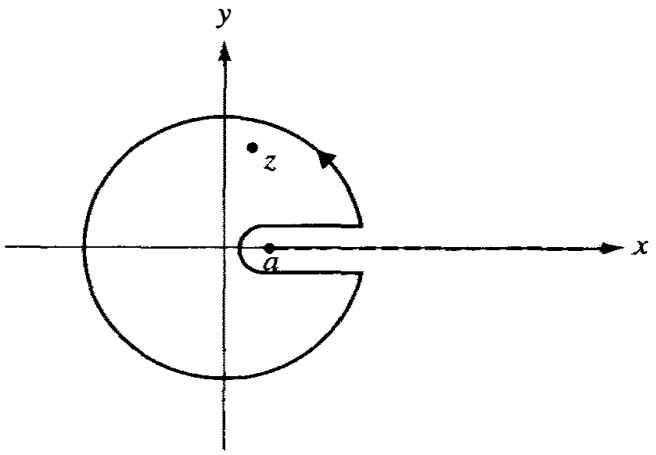


Figura 8.3.6. El contorno usado en la demostración de la proposición 8.3.5.

Si, además de las hipótesis de la proposición 8.3.5, $f(z)$ también satisface la relación $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$, esto es, si $u(x, \varepsilon) + iv(x, \varepsilon) = u(x, -\varepsilon) - iv(x, -\varepsilon)$, de tal manera que la parte real de f es continua mientras que la parte imaginaria es discontinua, entonces obtenemos

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{1}{x - z} \operatorname{Im} f(x + i\varepsilon)\, dx$$

En efecto, cuando z se mueve sobre el eje real, podemos tomar las partes reales de cada lado de la ecuación precedente para obtener

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\text{V.P.}}{\pi} \int_a^\infty \frac{1}{x - x_0} \operatorname{Im} f(x + i\varepsilon)\, dx$$

La ecuación de onda en tres dimensiones

Las ideas que se han desarrollado hasta ahora en esta sección para el movimiento de onda en una dimensión, pueden extenderse fácilmente a problemas de dimensión mayor. En dos dimensiones, la cuerda vibrante es remplazada por una membrana vibrante. En tres dimensiones podemos pensar en las ondas del sonido que se propagan en el aire. La presión $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ satisface entonces la ecuación de movimiento,

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\boldsymbol{r}, t) = \nabla^2 \phi(\boldsymbol{r}, t) + F(\boldsymbol{r}, t) \tag{14}$$

donde F representa alguna fuente externa de ondas, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, y

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es el operador de Laplace. Cuando la ecuación (14) es expresada en términos de coordenadas rectangulares, las soluciones homogéneas y no homogéneas de la ecuación (14) se obtienen en mucho en la misma forma en que se obtuvieron previamente. El nuevo y excitante aspecto de la ecuación (14) que no está presente en una dimensión, surge en el problema de dispersión, y éstos son más interesantes y manejables cuando el medio de dispersión tiene simetría esférica.

Considere una onda incidente plana $e^{i(x/c - \omega)t}$ que viaja desde la izquierda del eje x y que tropieza con una pelota localizada en el origen (figura 8.3.7). Una parte de la onda puede penetrar la pelota, parte de la onda se dispersa por la superficie de la pelota y luego viaja radialmente hacia afuera, y el resto de la onda simplemente evita a la pelota. Para resolver para ϕ, procedemos como anteriormente. Primero obtenemos las soluciones para ϕ en las regiones I y II separadamente y luego requerimos que ϕ y la derivada radial $\partial\phi/\partial r$ sean continuas en la superficie de la pelota. Eventualmente, este procedimiento especifica la onda total que resulta de la "impureza" del medio de la región II.

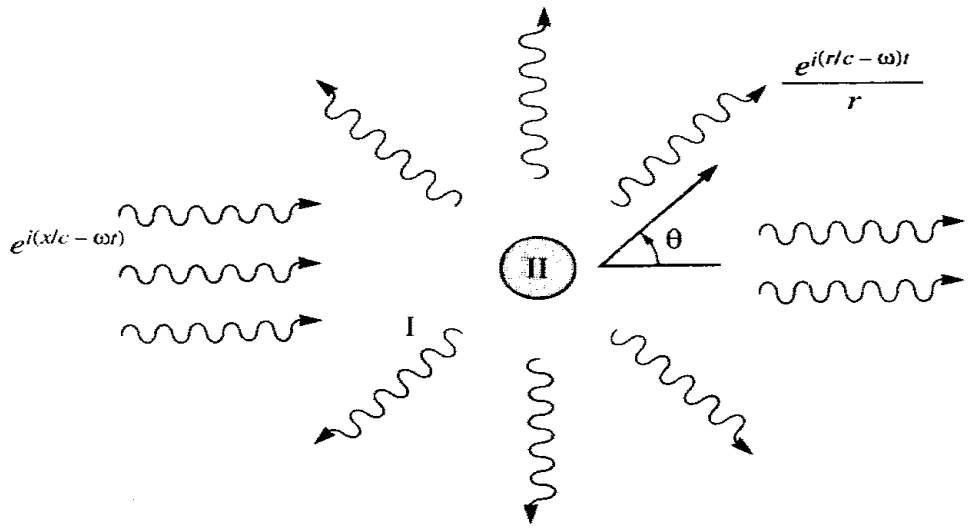


Figura 8.3.7. Dispersión de una onda por un obstáculo esférico.

Estos cálculos no se detallan aquí porque tal tarea nos podría llevar demasiado lejos dentro del campo de las ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, la forma del resultado final no es muy difícil de anticipar. La onda en la región I será la suma de la onda incidente y la onda radial que sale, y esto tomará la forma asintótica

$$\phi_I(r,\ t) \sim \left[e^{ix/c} + \frac{e^{ir/c}}{r} f(\omega, \theta) \right] e^{-i\omega t}$$

conforme $|r| = r \to \infty$. Aquí $f(\omega, \theta)$ es la cantidad de onda dispersa que viaja a un ángulo θ con el eje de simetría (véase la figura 8.3.7); ésta es la analogía tridimensional de la amplitud de dispersión $T(\omega)$ del problema unidimensional que se discutió al principio de la sección.

Observe que f es ahora una función de *dos* variables complejas ω y θ. Físicamente ocurren dispersiones observables, por supuesto únicamente cuando ω y θ son reales, con $0 \le \theta \le \pi$. Pero al estudiar las propiedades de f para los valores comple-

jos de ω y θ, como lo haremos en los siguientes párrafos, ganamos un entendimiento más profundo de las características de f.

Será conveniente cambiar variables como sigue:

$$s = \frac{4\omega^2}{c^2} \qquad t = -2\frac{\omega^2}{c^2}(1 - \cos\theta)$$

Defina la función A de dos variables complejas s y t como $A(s, t) = f(\omega, \theta)$. Para una gran clase de problemas de dispersión, se puede mostrar que A tiene las siguientes propiedades:

(i) $A(s, t)$ es analítica en las dos variables complejas s y t, con líneas ramas desde $s = a$ hasta ∞ y desde $t = b$ hasta ∞.
(ii) $A(s, t) = O(1/s)$ conforme $s \to \infty$ para cada t.
(iii) $A(\bar{s}, t) = \overline{A(s, t)}$ para t real.

Al aplicar la proposición 8. 3. 5,

$$A(s_0, t_0) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_a^\infty \frac{1}{s - s_0} [A(s + i\varepsilon, t_0) - A(s - i\varepsilon, t_0)]\, ds & s_0, t_0 \text{ en } \mathbf{C} \quad (15) \\ \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_b^\infty \frac{1}{s - s_0} \operatorname{Im} A(s + i\varepsilon, t_0)\, ds & t_0 \text{ real} \quad (16) \end{cases}$$

En la ecuación (15) estamos integrando $A(\zeta, t)$ para ζ ligeramente arriba y abajo del eje real, considere ahora el integrando; por la propiedad (i) de $A(s, t)$ podemos escribir una relación de dispersión en la variable t, como sigue:

$$A(s + i\varepsilon, t_0) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{1}{t - t_0} [A(s + i\varepsilon, t + i\delta) - A(s + i\varepsilon, t - i\delta)]\, dt$$

Si usamos una representación similar para el segundo término de la ecuación (15) finalmente obtenemos la *doble relación de dispersión*

$$A(s_0, t_0) = \frac{1}{\pi^2} \int_a^\infty \frac{1}{s - s_0} \left[\int_b^\infty \frac{1}{t - t_0} \rho(s, t)\, dt \right] ds \qquad (17)$$

donde

$$\rho(s, t) = \lim_{\varepsilon, \delta \to 0+} \left(\frac{1}{2i}\right)^2 [A(s + i\varepsilon, t + i\delta) - A(s + i\varepsilon, t - i\delta) - A(s - i\varepsilon, t + i\delta) + A(s - i\varepsilon, t - i\delta)].$$

La ecuación (17) es la representación para $A(s, t)$ obtenida primero por S. Mandelstam en 1958.

Ejercicios

Resuelva las ecuaciones diferenciales en los ejercicios del **1** al **9** usando transformadas de Laplace.

1. $y'' - 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$

2. $y'' + 6y - 7 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

3. $y'' + 9y = H(t-1), y(0) = y'(0) = 0$

4. $y' + y = e^t, y(0) = 0$

5. $y' + y + \int_0^t y(\tau)\, d\tau = f(t)$ donde $y(0) = 1$ y

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1, t \ge 2 \\ 1 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

6. $y'' + 9y = H(t), y(0) = y'(0) = 0.$

7. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones para $y_1(t)$, $y_2(t)$ usando transformadas de Laplace.

$$a) \begin{cases} y_1' + y_2 = 0 \\ y_2' + y_1 = 0 \end{cases} \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 0 \qquad b) \begin{cases} y_1' + y_2' + y^1 = 0 \\ y_2' + y_1 = 3 \end{cases} \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$$

8. $y' + y = \cos t, y(0) = 1$

9. Resuelva $y'' + y = t \operatorname{sen} t, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

10. Estudie la solución de $y'' + \omega_0^2 y = \operatorname{sen} \omega t$, $y(0) = y'(0) = 0$, y examine el comportamiento de las soluciones para varias ω, especialmente aquellas cercanas a $\omega = \omega_0$. Interprete estas soluciones en términos de oscilaciones forzadas.

11. Aplique las condiciones de frontera de la página 523 para obtener expresiones par $T(\omega)$, $R(\omega)$ y $B(\omega)$. Verifique que cuando ω es real,

$$|T(\omega)|^2 + |R(\omega)|^2 = 1$$

(Esta última relación expresa la "conservación de la intensidad": En un medio sin pérdida disipativa, la intensidad unitaria de la onda incidente de la figura 8.3.5 es igual a la suma de la intensidad de la onda R reflejada hacia atrás en la región I y la intensidad de la onda T trasmitida en la región III.)

12. Ya que la ecuación (11) resuelve el problema de Dirichlet para el semiplano superior, aplíquelo al problema ilustrado en el lado derecho de la figura 5.3.5 y obtenga la misma solución. Así, tenemos dos métodos para resolver la ecuación de Laplace; el mapeo conforme y las relaciones integrales del tipo descrito por la ecuación (11).

13. Como una aplicación de la proposición 8.3.5, sea

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} = r^{-1/2} e^{-i\theta/2} \qquad \text{para } 0 < \theta < 2\pi$$

definida en el plano z con una línea rama a lo largo del eje real positivo. ¿Qué igualdad resulta?

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1. Calcule la transformada de Laplace y la abscisa de convergencia para $f(t) = H(t-1)$ sen $(t-1)$.
2. Calcule la transformada de Laplace y la abscisa de convergencia para $f(t) = H(t-1) + 3e^{-(t+6)}$.
3. Calcule la transformada de Laplace y la abscisa de convergencia para

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

4. Sea $f(t)$ una función acotada de t. Muestre que $\sigma(f) \le 0$.
5. Calcule la transformada de Laplace y la abscisa de convergencia para

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

6. Si $f(t) = 0$ para $t < 0$, entonces $\hat{f}(y) = \tilde{f}(iy)$ es llamada la *transformada de Fourier* de f. Use el corolario 8.2.2 para mostrar que, bajo condiciones adecuadas,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}\,dy$$

(Este resultado es llamado el *teorema de inversión para transformadas de Fourier*.)

7. Calcule la transformada de Laplace inversa y la abscisa de convergencia para

$$F(z) = \frac{e^{-z}}{z^2 + 1}$$

8. Calcule la transformada de Laplace inversa y la abscisa de convergencia para

$$F(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$$

9. Calcule la transformada de Laplace inversa y la abscisa de convergencia para

$$F(z) = \frac{z}{(z+1)^2} + \frac{e^{-z}}{z}$$

10. *a*) Sea $\tilde{f}(z)$ la transformada de Laplace de $f(t)$. Muestre que $\tilde{f}(z) \to 0$ conforme Re $z \to \infty$.
    b) Utilice *a*) para mostrar que, bajo condiciones adecuadas, $z\tilde{f}(z) \to f(0)$ conforme Re $z \to \infty$.
    c) ¿Puede un polinomio distinto de cero ser la transformada de Laplace de alguna $f(t)$?
    d) ¿Puede una función entera F distinta de cero ser la transformada de Laplace de una función $f(t)$?

11. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando transformadas de Laplace:

    a) $y'' + 8y + 15 = 0$, $y(0) + 1$, $y'(0) = 0$ *b*) $y' + y = 3$, $y(0) = 0$

12. Suponga que $f(t) \ge 0$ y es infinitamente diferenciable. Demuestre que $(-1)^k\tilde{f}^{(k)}(z) \ge 0$, k

$= 0, 1, 2, \ldots$ para $z \geq 0$. (El recíproco, llamado el *teorema de Bernstein*, es también cierto pero es más difícil de demostrar.)

13. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando transformadas de Laplace.

a) $y'' + y = H(t-1), y(0) = 0, y'(0) = 0$ *b)* $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$

14. He aquí otra manera para resolver la ecuación de Laplace, tome las transformadas de Fourier de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \qquad (a)$$

con respecto de la variable x (utilice el método descrito en la página 518); muestre que este método de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(k, y) - k^2 \hat{u}(k, y) = 0 \qquad (b)$$

Resolvemos, sumamos sobre todas las soluciones y guardamos únicamente aquellas que decaen exponencialmente en el límite $y \to +\infty$ y obtenemos así la fórmula

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - ky}\, dk \qquad (c)$$

Con relativa facilidad, $A(k)$ puede ser evaluada en términos de los datos en la frontera en $y = 0$. Puesto que en $y = 0$ la ecuación (b) se reduce a

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx}\, dk$$

$A(k)$ debe ser, en efecto, la transformada de Fourier de $u(x, 0)$.
Si utilizamos este resultado, sustituimos en la ecuación (b) e intercambiamos los ordenes de integración, obtenemos

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(z, 0) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-z) - |k|y}\, dk \right) dz$$

Realizando la integral con respecto a k obtenemos

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(z, 0) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(x-z)^2 + y^2}\, dz \qquad (d)$$

En referencia con la ecuación (d) muestre que

$$\frac{y}{(x-z)^2 + y^2} = \frac{-\partial}{\partial w} G(x, y | z, w) \Big|_{w=0}$$

donde

$$G(x, y \mid z, w) = \log |r - r'|$$

con $r = x + iy$, $r' = z + iw$. (La función G es llamada la *función de Green* y es reconocida como el potencial de r causado por una carga unitaria en el punto r' en el plano.)

15. Muchos problemas en matemáticas aplicadas incluyen una serie infinita

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

en la cual la función $F(z)$ tiene singularidades además de todas aquellas de cada $f_n(z)$. Estas singularidades se introducen por fallas en la convergencia de la serie. El ejemplo más simple de este tipo de series es

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

Los términos individuales en el lado derecho de la ecuación son funciones enteras, la función que su suma define, tiene un polo simple en $z = 1$. Como un segundo ejemplo considere

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

Los términos del lado derecho de esta ecuación tienen singularidades en $z = 0$; su suma es singular en $z = 1$.
Considere

$$F(j) = \sum_{n=0}^{\infty} [g \log(j - \alpha)]^n$$

donde α y g son constantes.

a) ¿Cuáles son las propiedades analíticas de cada uno de los términos individuales en el lado derecho de la última ecuación?
b) Al sumar las series en forma cerrada, verifique que la suma en esta ecuación tiene un polo en $j = \alpha + e^{1/g}$.

Respuestas a los ejercicios impares

1.1. Introducción a los números complejos

1. *a)* $6 + 4i$ *b)* $\frac{11}{17} + i\frac{10}{17}$ *c)* $\frac{3}{2} - i\frac{5}{2}$

3. $z = \pm (2 - i)$

5. $\text{Re}\,\frac{1}{z^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ $\quad \text{Im}\,\frac{1}{z^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

$\text{Re}\,\frac{1}{3z + 2} = \frac{3x + 2}{(3x + 2)^2 + 9y^2}$ $\quad \text{Im}\,\frac{1}{3z + 2} = \frac{-3y}{(3x + 2)^2 + 9y^2}$

7. No; hágase $z = w = i$.

9. Si $z = x + iy$, entonces Re (iz) = Re $(ix - y) = -y = -$ Im (z), e Im (iz) = Im $(ix - y) = x$ = Re (z).

11. En el texto se bosquejó la demostración de la ley asociativa para la multiplicación. Mostramos que la adición es conmutativa y dejamos las otras al lector: si $z = x + iy$ y $w = u + iv$, donde x, y, u y v son reales, entonces z y w corresponden a (x, y) y (u,v) respectivamente y entonces

$$\begin{aligned} z + w &= (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \\ &= (u + x, v + y) = (u, v) + (x, y) = w + z \end{aligned}$$

como se quería.

13. Primero muestre que $a = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ y $b = -2xy/(x^2 + y^2)$. Entonces muestre que los cuadrados de éstos suman 1.

15. Un número complejo z puede ser escrito como $z = x + iy$ de una manera única, con x y y reales, correspondiente al vector (x, y). A los números reales se les hace corresponder con vectores de la forma $(x, 0)$ y así $y = 0$, y por lo tanto $z = x = \text{Re}\, z$.

17. *a)* -4 *b)* i

19. *a)* $\sqrt{1 + \sqrt{i}} = \pm \left(\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}}{2^{3/4}} + i \frac{\sqrt{-1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}}{2^{3/4}} \right)$

o $\sqrt{1 + \sqrt{i}} = \pm \left(\frac{\sqrt{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}}{2^{3/4}} - i \frac{\sqrt{1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}}{2^{3/4}} \right)$

b) $\sqrt{1 + i} = \pm \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \right)$

c) Véase el ejemplo resuelto 1.1.6.

1.2. Propiedades de los números complejos

1. *a)* $z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{2\pi k}{5} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi k}{5}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$

b) $z = \cos\left(\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{2\pi k}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{2\pi k}{4}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3$

3. $(3 - 8i)^4/(1 - i)^{10}$

5. $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \cdot \text{sen}^2 x + 5\cos x \cdot \text{sen}^4 x$
$\text{sen}\,5x = \text{sen}^5 x - 10\cos^2 x \cdot \text{sen}^3 x + 5\cos^4 x \cdot \text{sen}\,x$

7. $\sqrt{\dfrac{377}{5}}$

9. Utilice la identidad $(1 - w)(1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}) = 1 - w^n$.

11.
$$\begin{aligned} |a - b|^2 + |a + b|^2 &= (a - b)(\overline{a - b}) + (a + b)(\overline{a + b}) \\ &= (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) + (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) \\ &= |a|^2 - a\bar{b} - b\bar{a} + |b|^2 + |a|^2 + a\bar{b} + b\bar{a} + |b|^2 \\ &= 2(|a|^2 + |b|^2) \end{aligned}$$

13. Todos los puntos deben tener el mismo argumento. Éstos deben estar sobre el mismo rayo que parte del origen.

15. No; tome $z = i \cdot z^2 = |z|^2$ si y sólo si z es real.

17. Cada lado es un número real positivo cuyo cuadrado es

$a^2a'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 + b^2b'^2$.

19. $|z - (8 + 5i)| = 3$

21. El eje real.

23. $1 + |a|$.

25. Utilice la fórmula de De Moivre y la identidad $1 + w + \cdots + w^n = (1 - w^{n+1})/(1 - w)$,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \text{Re}\left[\sum_{k=0}^{n}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^k\right]$$

$$= \text{Re}\,\frac{1 - (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^{n+1}}{1 - \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta} = \text{Re}\,\frac{1 - \cos(n+1)\theta - i\,\text{sen}\,(n+1)\theta}{1 - \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}$$

$$= \frac{1 - \cos\theta - \cos(n+1)\theta + \cos(n+1)\theta\cos\theta + \text{sen}\,(n+1)\theta\,\text{sen}\,\theta}{2 - 2\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2\,\text{sen}\,(\theta/2)\,\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\,\text{sen}\,(\theta/2)}$$

27. *a)* $(z_2 - z_1)/(z_3 - z_1)$ (–) es real.

b) $\left(\dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}\right) \cdot \left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\right)$ es real.

29. Multiplique por $1 - w$ y utilice el ejercicio 9 para mostrar que la suma es $-n/(1-w)$.

1. 3. Algunas funciones elementales

1. *a*) $e^2(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)$ *b*) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 1)\left(\frac{1}{e} + e\right) + i\frac{1}{2}(\cos 1)\cdot\left(e - \frac{1}{e}\right)$

3. *a*) $z = \pm\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n - i\frac{1}{2}\log 2\right)$

b) $z = \pm[2\pi n - i\log(4 + \sqrt{15})]$. (NOTA. $\log(4 - \sqrt{15}) = -\log(4 + \sqrt{15})$.)

5. *a*) $\log 1 = 2\pi n i$ *b*) $\log i = \pi i/2 + 2\pi n i$

7. *a*) $e^{\pi/2}e^{-2\pi n} = e^{-2\pi(n - 1/4)}$

b) $e^{(1/2)\log 2 - 2\pi n - \pi/4}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

9. $z = n\pi$ para cualquier entero n

11. Puesto que $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, $|e^z|$ se va a 0 a lo largo de los rayos que apuntan al semiplano izquierdo. Éste es 1 a lo largo del eje imaginario y se va a $+\infty$ a lo largo de los rayos hacia el semiplano derecho.

13. *a*) $e^{x^2 - y^2}(\cos 2xy + i \operatorname{sen} 2xy)$ *b*) $e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$

c) $e^{x/(x^2 + y^2)}\left(\cos\frac{y}{x^2 + y^2} - i \operatorname{sen}\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$

15. $$\operatorname{sen}(\pi/2 - z) = \frac{e^{i(\pi/2 - z)} - e^{-i(\pi/2 - z)}}{2i} = e^{\pi i/2}\frac{e^{-iz} - e^{iz}e^{-\pi i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos z$$

Las otras dos afirmaciones se siguen de una manera similar.

17. $$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y$$
$$= \operatorname{sen}^2(x)(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y$$
$$= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \geq \operatorname{senh}^2 y$$

y así $|\operatorname{sen} z| \geq |\operatorname{senh} y|$. La otra desigualdad se sigue de una manera similar.

19. No, ni siquiera para a y b reales. Hágase $a = 2$, $b = -1$. Entonces $|a^b| = |2^{-1}| = \frac{1}{2}$, pero $|a|^{|b|} = 2$.

21. Si $|z| = 1$, entonces $z = e^{i\theta}$ para alguna θ y, por lo tanto, $z + 1/z = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. Como θ varía desde 0 hasta 2π, esto cubre el intervalo $[-2, 2]$ dos veces.

23. Puesto que $|1/z| = 1/|z|$, el mapeo intercambia el interior y el exterior del círculo unitario. Los círculos de radio r son transformados en círculos de radio $1/r$. Si $z = re^{i\theta}$, entonces $1/z = (1/r)e^{-i\theta}$ y en consecuencia, el radio definido por $\arg z = \theta$ es transformado en el radio con argumento $-\theta$.

25. Esto se satisface si $b \log a$ tiene su parte imaginaria en $[-\pi, \pi]$. De otra manera, la fórmula se lee $\log a^b = b \log a + 2\pi i k$.

27. Éstas son las raíces n-ésimas de 1, puesto que $(w^k)^n = [(e^{2\pi i/n})^k]^n = e^{2\pi k i} = 1$. Todas ellas son diferentes, ya que $w^j = w^k$ implica que $e^{2\pi i(k - j)/n} = 1$. Por la proposición 1.3.2 (vii), esto obliga a que $(k - j)/n$ sea un entero.

29. sen $z = 0$ si y sólo si $e^{iz} = e^{-iz}$ o $e^{2iz} = 1$. Por la proposición 1.3.2 (vii), esto sucede exactamente cuando $2iz = 2\pi ni$, o $z = n\pi$.

31. El máximo es $\cosh(2\pi) \approx 267$ y se alcanza en $z = 2\pi i$, $\pi + 2\pi i$ y $2\pi + 2\pi i$.

33. *a*) $\approx 24 - i4.5$ *b*) $\approx 1.17 - i(1.19) + 2\pi ni$ *c*) $\approx 96.16 - i1644.43$

35. No, sen z no es uno a uno en $0 \leq \text{Re } z < 2\pi$. Por ejemplo, sen (0) = sen (π) = 0. Sabemos que sen z = sen $(z + 2\pi)$. Supongamos ahora que sen z = sen w. Entonces

$$0 = \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} w = 2 \operatorname{sen} z \, \frac{z-w}{2} \cos \frac{z+w}{2}$$

y por el ejercicio **29** y un resultado similar para el coseno,

$$\left.\begin{array}{ll} z - w = 2k\pi & k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots \\ \text{o} \qquad z + w = n\pi & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \end{array}\right\} (*)$$

Utilizando el ejercicio 34 y este resultado, para cada $z_0 \in \mathbf{C}$ *existe precisamente una* w, con $-\pi/2 \leq \text{Re } w \leq \pi/2$ tal que sen $w = z_0$, siempre que, por ejemplo, se omita la porción de la frontera que está abajo del eje real. Al tomar este valor de w se define una rama de $\operatorname{sen}^{-1} z_0$. Las otras están dadas por el par de fórmulas (*).
La discusión para $\cos^{-1}$ es análoga.

1.4. Funciones continuas

1. Puesto que $|w|^2 = (\text{Re } w)^2 + (\text{Im } w)^2$, las tres afirmaciones se siguen de la observación de que si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $a \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$.

3. Puesto que f es continua, existe una $\delta > 0$, tal que $|z - z_0| < \delta$ implica $|f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$. Así, $f(z) \neq 0$, puesto que si $f(z)$ fuera igual a 0, entonces $|f(z_0)|$ sería menor que $|f(z_0)|/2$, lo cual es absurdo.

5. Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito de puntos y sea z_0 su complemento. Sea $\delta_k = |z_0 - a_k|$ y sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1/2, \ldots, \delta_n/2\}$. Entonces ninguna a_k puede estar en $D(z_0, \delta)$ ya que $\delta < |z_0 - a_k|$.

7. Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| = |\bar{z} - \bar{z}_0| = |\overline{(z - z_0)}| = |z - z_0| < \varepsilon$. Así, para cualquier $z_0 \in \mathbf{C}$, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

9. $\mathbf{C}\backslash\{2\pi ni \mid n \text{ es un entero}\}$

11. $|z| < 1$

13. *a*) Abierto, no es cerrado. *b*) Ni abierto ni cerrado. *c*) No es abierto, cerrado.

15. *a*) Conexo y compacto. *b*) Compacto, no conexo.
c) Conexo, no compacto. *d*) Ni compacto ni conexo.

17. $z \in \mathbf{C}\backslash f^{-1}(A) \Leftrightarrow z \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(z) \notin A \Leftrightarrow f(z) \in \mathbf{C}\backslash A \Leftrightarrow z \in f^{-1}(\mathbf{C}\backslash A)$

19. Si los U_α son conjuntos abiertos y $z \in \bigcup_\alpha U_\alpha$ entonces $z \in U_{\alpha_0}$, para alguna α_0.
Puesto que U_{α_0} es abierto, existe una $\varepsilon > 0$ tal que $D(z, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Esto muestra que la unión es abierta, ya que esto se puede hacer para cualquier z.

21. $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(0; 1/n) = \{0\}$, y este conjunto no es abierto.

23. Sea $R > 0$. Necesitamos mostrar que existe una n tal que $|z^n/n| \geq R$ siempre que $n > N$. Un poco de aritmética muestra que esto es equivalente a $(nR)^{1/n} \leq |z|$. Pero se puede usar la regla de L'Hôpital para mostrar que $\lim_{n \to \infty} (nR)^{1/n} = 1$. (Primero tome logaritmos y utilice la regla de L'Hôpital para mostrar que $\log (nR)^{1/n} \to 0$.) Puesto que $|z| > 1$ tenemos la desigualdad que necesitamos para n suficientemente grande.

1.5. Funciones analíticas

1. *a*) Analítica en todo **C**. La derivada es $3(z+1)^2$.
b) Analítica en $\mathbf{C}\backslash\{0\}$. La derivada es $1 - 1/z^2$.
c) Analítica en $\mathbf{C}\backslash\{1\}$. La derivada es $-10[1/(z-1)]^{11}$.
d) Analítica en $\mathbf{C}\backslash\{e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}, 1, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$. La derivada es

$$-[1/(z^3-1)^2(z^2+2)^2]\cdot[(z^3-1)2z+3z^2(z^2+2)]$$

3. *a*) Si $n \geq 0$, es analítica en donde sea. Si $n < 0$ es analítica en todos lados excepto en 0. La derivada es nz^{n-1}.
b) Analítica en $\mathbf{C}\backslash\{0, i, -i\}$. La derivada está dada por

$$-2\frac{1}{(z+1/z)^3}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$$

c) Analítica excepto en las raíces n-ésimas de 2, $\sqrt[n]{2}e^{2\pi ik/n}$. La derivada está dada por

$$\frac{(1-n)z^n-2}{(z^n-2)^2}$$

5. *a*) Localmente, f rota $\theta = 0$ y multiplica la longitud por 1.
b) Localmente, f rota un ángulo $\theta = 0$ y alarga longitudes por un factor de 3.
c) Localmente, f rota un ángulo π y alarga longitudes por un factor de 2.

7. $(f^{-1}\circ f)'(z) = (f^{-1})'(f(z))f''(z)$. Pero $(f^{-1}\circ f)(z) = z$, y así $(f^{-1}\circ f)'(z) = 1$. Por lo tanto, $(f^{-1})'(f(z))\cdot f'(z) = 1$.

9. $f(z) = z^2 + 3z + 2 = (x^2 - y^2 + 3x + 2) + i(2xy + 3y)$ y, por lo tanto, $\partial u/\partial x = 2x + 3 = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -2y = -\partial v/\partial x$.

11. Puesto que $x = r\cos\theta$ y $y = r\ \text{sen}\ \theta$, la regla de la cadena nos da

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\,\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

Al resolver para $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ nos da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Similarmente,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \text{sen}\,\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

y así, las ecuaciones de Cauchy-Riemann resultan

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \text{sen}\,\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

y

$$\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Si multiplicamos la primera por cos θ y la segunda por sen θ y sumamos, nos da $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$. Similarmente, $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

13. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

Entonces, las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ son son equivalentes a decir que la cantidad compleja $\partial f/\partial \bar{z}$ es 0.

15. Si $f = u + iv$, entonces $\partial u/\partial x = 0 = \partial u/\partial y$ ya que u es constante. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, también $\partial v/\partial y = \partial u/\partial x = 0$ y $\partial v/\partial x = -\partial w/\partial y = 0$. Así, $f'(z) = \partial u/\partial x + i\,(\partial v/\partial x) = 0$ en todo A. Puesto que A es conexo, f es constante.

17. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$. Por lo tanto, $2\partial v/\partial y = 0$ y así $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ son idénticamente 0 en A. En consecuencia, u depende únicamente de y, y v depende sólo de x. Pero entonces $\partial u/\partial y$ y puede depender únicamente de y y $\partial v/\partial x$ únicamente de x. Puesto que $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ para toda x y y, $\partial u/\partial y$ y $-\partial v/\partial x$ son iguales a la misma constante real c. Así, $u = cy + d_1$ y $v = -cx + d_2$. Por lo tanto, $f = u + iv = -ic(x + iy) + (d_1 + id_2)$.

19. *a*) $\mathbf{C}\setminus\{1\}$. *b*) Sí *c*) eje $x\setminus\{1\}$; círculo unitario $\setminus\{1\}$. *d*) 90°

21. $\mathbf{C}\setminus\{1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}\}$

23. *a*) u es la parte imaginaria de la función $f(z) = z^2 + 3z + 1$, la cual es analítica en todo **C**. Por lo tanto, u es armónica en **C**.

b) Verifique las segundas derivadas directamente en la ecuación de Laplace o bien observe que u es la parte real de $f(z) = 1/(z - 1)$ para ver que u es armónica en $\mathbf{C}\setminus\{1\}$.

25. Localmente en B, $w = \text{Re } g$, donde g es analítica. Entonces $w \circ f = \text{Re}\,(g \circ f)$. Pero $g \circ f$ es analítica y así $w \circ f$ es armónica.

27. *a*) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$ para toda (x, y)

b) Necesitamos que $\partial v/\partial y = \partial u/\partial x = e^x \cos y$; así, $v(x, y) = e^x \text{ sen } y + g(x)$. Entonces $e^x \text{ sen } y + g'(x) = \partial v/\partial x = -\partial u/\partial y = e^x \text{ sen } y$. Así, $g'(x) = 0$ y, por lo tanto, g es constante. Para obtener $v(0, 0) = 0$, tome $v(x, y) = e^x \text{ sen } y$.

c) $e^z = e^x \cos y + ie^x \text{ sen } y$. Por los incisos *a*) y *b*), las partes real e imaginaria satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy-Riemann 1.5.8 y, por lo tanto, f es analítica.

29. *a*) No. Contraejemplo: $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = x$ son armónicas, pero $u(v(x, y), 0) = x^2$ no es armónica.

b) No. Contraejemplo: $u(z) = v(z) = x$. Entonces $u(z) \cdot v(z) = x^2$ no es armónica.

c) Sí.

31. Escriba

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ y } V = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

entonces $f = U + iV$. Por suposición. U y V tienen derivadas parciales continuas. Por la suposición de la continuidad de las segundas parciales para u y v, obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} \text{ esto es, } \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f. Las otra ecuaciones resultan de

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial V}{\partial y}$$

f es entonces analítica por el teorema de Cauchy-Riemann(1.5.8).

1.6. Diferenciación de las funciones elementales

1. *a*) Analítica para toda z; la derivada es $2z + 1$.
b) Analítica en $\mathbf{C}\setminus\{0\}$; la derivada es $-1/z^2$.
c) Analítica en $\mathbf{C}\setminus\{z = (2k+1)\pi/2 | k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$; la derivada es $1/\cos^2 z$.
d) Analítica en $\mathbf{C}\setminus\{1\}$. La derivada es

$$\frac{2z^3 - 3z^2 - 1}{(z-1)^2} \exp \frac{z^3 + 1}{z - 1}$$

3. *a*) 1 *b*) El límite no existe
5. No
7. Sí
9. *a*) Analítica en $\mathbf{C}\setminus\{\pm 1\}$. La derivada es $-(z^2+1)/(z^2-1)^2$.
b) Analítica en $\mathbf{C}\setminus\{0\}$. La derivada es $(1 - 1/z^2)e^{z + 1/z}$.
11. El mínimo es $1/e$, en $z = \pm i$.
13. El mapeo $z \mapsto 2^{z^2}$ es una composición de funciones enteras y, por lo tanto, es entera, $z^{2z} = e^{2z \log z}$ es analítica en la región de analiticidad del logaritmo elegida.

Ejercicios de repaso del capítulo 1

1. $e^i = \cos(1) + i \operatorname{sen}(1)$ $\quad \log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi i}{4} + 2\pi n i$, n un entero

$$\operatorname{sen} i = i\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \quad \exp[2\log(-1)] = 1$$

3. $e^{\pi i/16}1$, $e^{\pi i/16}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, $e^{\pi i/16}i$, $e^{\pi i/16}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$,

$e^{\pi i/16}(-1)$, $e^{\pi i/16}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$, $e^{\pi i/16}(-i)$, $e^{\pi i/16}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

5. $z = 2\pi n \pm i \log(\sqrt{3} + \sqrt{2})$
7. *a*) El eje real. *b*) Un círculo, centrado en $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$ de radio $\frac{3}{8}$.
9. *a*) $(z^3 + 8)' = 3z^2$ en todo $\mathbf{C}$.

b) $\left(\frac{1}{z^3+1}\right)' = \frac{-3z^2}{(z^3+1)^2}$ en $\mathbf{C}\setminus\{-1, e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}\}$

c) $[\exp(z^4 - 1)]' = 4z^3 \exp(z^4 - 1)$, en todo $\mathbf{C}$.

d) $[\operatorname{sen}(\log z^2)]' = \frac{2}{z}\cos(\log z^2)$, en todo $\mathbf{C}$ excepto en todo el eje imaginario.

11. Analítica en $\mathbf{C}\setminus\{0\}$; $(e^{1/z})' = -e^{1/z}/z^2$
b) Analítica en $\mathbf{C}\setminus\{z = (\pi/2) + 2\pi n \setminus n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$; $(1/(1 - \operatorname{sen} z)^2)' = 2(\cos z)/(1 - \operatorname{sen} z)^3$
c) $\mathbf{C}\setminus\{\pm a\}$; $[e^{az}/(a^2 + z^2)]' = [(a^2 + z^2)ae^{az} - 2ze^{az}]/(a^2 + z^2)^2$

13. *a*) No. *b*) Sí. *c*) Sí.

15. Si y sólo f es constante.

17. $x = y = -1$.

19. Observe que $v(x, y) = 0$ en A. Por lo tanto,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

y las ecuaciones de Cauchy-Riemann dan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Así, f' es idénticamente 0 en el conjunto conexo A. Por lo tanto, por la proposición 1.5.5, f es constante en A.

21. Por hipótesis, $(d/dz)(f(z) - \log z) = 0$. Utilice ahora la proposición 1.5.5.

23. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(z_0 - h)^n - z_0^n}{h} = f'(z_0)$ donde $f(z) = z^n$

25. Fije una rama de log, por ejemplo, la rama principal, la cual es analítica en $\mathbf{C}\setminus\{$eje real no positivo$\}$. Entonces podemos escribir $z^z = e^{z \log z}$, la cual es analítica en la región de analiticidad del logaritmo escogida. La derivada es $z^z(1 + \log z)$.

27. $z = 2e^{i\pi/2}, 2e^{7\pi i/6}, 2e^{11\pi i/6}$

29. Éstas son las partes real e imaginaria de z^3.

31. *a*) 0. *b*) Diferenciable en todos los puntos $z \in \mathbf{C}$.

33. *a*) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$ y, por lo tanto, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. *b*) $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$

35. $z = i, -1, -i, 1$

37. $f(z) = f(2z) = f(4z) = \cdots = f(2^n z)$ para cualquier z y cualquier entero positivo n. Si hacemos $w = 2^n z$, obtenemos $f(w/2^n) = f(w)$ para toda n. Si hacemos que $n \to \infty$ y usamos la continuidad de f en 0, nos da $f(0) = f(w)$. Puesto que esto no se puede hacer para cualquier w en $\mathbf{C}$, f es constante.

2.1. Integrales de contorno

1. *a*) $2 + i\frac{1}{2}$ *b*) $\frac{1}{2}[\cos(2 + 2i) - \cos(2i)]$ *c*) 0

3. La rama principal del logaritmo es una función que es analítica en un conjunto abierto que contiene a γ y cuaya derivada es $1/z$ allí. Puesto que γ es cerrada, el valor de la integral es 0, por el teorema fundamental de cálculo para integrales de contorno (2.1.7).

5. No; por ejemplo, sea $f(z) = z$, $\gamma(t) = it$ para $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\int_\gamma \operatorname{Re} f = \int_0^1 0 \cdot i\, dt = 0$$

pero

$$\operatorname{Re}\int_\gamma f = \operatorname{Re}\int_0^1 iti\,dt = \operatorname{Re}\left(-\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) = -\frac{1}{2}$$

7. *a*) $2\pi i$ *b*) $-\frac{i}{3}$

9. Para $|z| = 1$ tenemos

$$\left|\frac{1}{2+z^2}\right| = \frac{1}{|2+z^2|} \le \frac{1}{2-|z|^2} = 1$$

ya que $|z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$. Por lo tanto,

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{2+z^2}\right| \le 1 \cdot l(\gamma) = \pi$$

11. *a*) $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z} = 2\pi i \int_{|z|=1}\frac{dz}{|z|} = 0 \int_{|z|=1}\frac{|dz|}{z} = 0 \int_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right| = 2\pi$ *b*) $-\frac{i}{3}$

13. 0

15. Si $z = e^{i\theta}$ está sobre γ, entonces

$$\left|\frac{\operatorname{sen} z}{z^2}\right| = |\operatorname{sen} z| \le \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-\operatorname{sen}\theta} + e^{\cos\theta}}{2} \le e$$

Puesto que γ tiene longitud 2π, la estimación se sigue de la proposición 2.1.6.

2.2. El teorema de Cauchy: versión intuitiva

1. *a*) -6 *b*) 0 *c*) 0 *d*) 0

3. 0, por el teorema de Cauchy aplicado a $z = z_0 + re^{i\theta}$.

5. La integral será 0 si γ encierra a las dos o a ninguna de las raíces de $z^2 + z + 1$, a saber, $-(1/2) \pm (\sqrt{3}/2)i$.

7. No; sea $f(z) = z$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (el círculo unitario). Entonces $\int_\gamma \operatorname{Re} f(z)\,dz = \pi i$, mientras que $\int_\gamma \operatorname{Im} f(z)\,dz = -\pi$.

9. $-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$

11. $4\pi i$

2.3. El teorema de Cauchy: versión precisa

1. Si así fuera, entonces el círculo $|z| = 1$ sería homotópico a un punto en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, así que $\int_{|z|=1} dz/z = 0$. Pero $\int_{|z|=1} dz/z = 2\pi i$. Esta contradicción muestra que $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ no es simplemente conexo.

3. Sea $\gamma:[a, b]$ una curva cerrada en A. Defina una homotopía H: $[a, b] \times [0, 1] \to A$ como $H(t, s) = s\gamma(t) + (1 - s)z_0$. H es claramente continua y está en A ya que A es en forma de estrella en z_0. Así, γ es homotópica mediante H al mapeo constante en z_0.

5. G contiene al segmento entre cada uno de sus puntos y el 0. Ejemplo de parte de una demostración: considere un punto c para el cual $0 < \operatorname{Re} c < 1$ y $0 < \operatorname{Im} c < 3$. Si $z = sc + (1 - s)0 = sc$, con $0 \le s \le 1$ está en el segmento entre c y 0, entonces $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(sc) = s\operatorname{Re} c$ e $\operatorname{Im} z = s \operatorname{Im} c$, así que $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ y $0 \le \operatorname{Im} z \le 3$. Por ende $z \in G$. Los puntos que están en otras partes de G, son manejados similarmente.

7. *a*) $2\pi i$ *b*) 0 *c*) 0 *d*) πi
9. *a*) $2\pi i$ *b*) $2\pi i$

2.4. La fórmula integral de Cauchy

1. *a*) $2\pi i$ *b*) $2\pi i$
3. Las desigualdades de Cauchy (2.4.7) muestran que $f^{(k)}(z)$ es idénticamente 0 para $k > n$. La conclusión se sigue del ejercicio 20 de la sección 1.5.
5. *a*) 0 *b*) $-\pi i/3$
7. Utilizando las desigualdades de Cauchy, $|f'(0)| \leq 1/R$ para toda $R < 1$. Por lo tanto, $|f'(0)| \leq 1$. Ésta es la mejor cota posible, como es claro a partir del ejemplo $f(z) = z$.
9. Sea $\tilde{\gamma}$ el círculo $\tilde{\gamma}(t) = z_1 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $|z_0 - z_1| < r$, γ es homotópica a $\tilde{\gamma}$ mediante $H(t, s) = s(z_1 + re^{it}) + (1 - s)(z_0 + re^{it})$. Ya que z_1 no está en la imagen de la homotopía,

$$I(\gamma, z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z - z_1} = 1$$

11. Por la proposición 1.5.3, f es analítica en $A\backslash\{0\}$, así que es continua allí. Puesto que

$$f(z_0) = F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

f también es continua en z_0. Por el corolario al teorema de Morera (2.4.11), f es analítica en A.
13. *a*) 0 *b*) 0 *c*) 0 *d*) $\pi i/2$.
15. $4\pi i$.
17. $1/f$ es entera y $|1/f(z)| \leq 1$ en $\mathbf{C}$. Por lo tanto, $1/f$ es constante por el teorema de Liouville. En consecuencia, f es constante.
19. *a*) $\pi/2 + i(\pi/2)$ *b*) 0
21. Escriba la fórmula integral de Cauchy para $f(z_1)$, $f(z_2)$ y $f'(z_0)$, sustituya en el lado izquierdo y simplifique.

2.5. Teorema del módulo máximo y funciones armónicas

1. e
3. Sea $A = \mathbf{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = e^z$
5. $f - g$ es continua en cl (A) y es analítica en A. $(f - g)(z) = 0$ para $z \in \text{fr}(A)$ y, por lo tanto, por el teorema del módulo máximo, $(f - g)(z) = 0$ para toda $z \in A$. En otras palabras, $f(z) = g(z)$ para toda $z \in A$. Por lo tanto $f = g$ en todo elemento de cl $(A) = A \cup \text{fr}(A)$.
7. $|e^{z^2}|$ alcanza un valor máximo de e en ± 1.
9. *a*) $v(x, y) = -\cosh x \cos y$ *b*) $v = \arctan(y/x)$ o $-\arctan(x/y)$
c) $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$. (Observe que se puede agregar un valor constante a cada una.)
11. Si $z = x + iy$, Re $e^z = e^x \cos y$ e Im $e^z = e^x \operatorname{sen} y$. El vector normal a las curvas de nivel de estas funciones está dado por los vectores gradientes

$$(e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y) \quad \text{y} \quad (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y)$$

Puesto que éstos son ortogonales, las curvas también son ortogonales.
13. Ya que f es analítica y no constante en A, z_0 no puede ser un máximo relativo. Así, en

cada vecindad de z_0 y, en particular, en $\{z \text{ tal que } |z - z_0| < \varepsilon\}$, existe un punto z con $|f(z_0)| > |f(z_0)|$. Si $f(z_0) \neq 0$, entonces, por continuidad, $f(z) \neq 0$ en algún disco pequeño D centrado en z_0. Por ende, $1/f(z)$ es analítica en D. Por este último argumento, existe una ζ cercana a z_0 tal que

$$\left|\frac{1}{f(\zeta)}\right| > \left|\frac{1}{f(z_0)}\right|$$

Por lo tanto,

$$|f(\zeta)| < |f(z_0)|$$

15. $|g(0)| = |0| = 0$, y en consecuencia $g(0) = 0$. También, $|g(z)| = |z| < 1$ para toda $z \in \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$. Por ende, se aplica el lema de Schwarz y así $g(z) = cz$ con $|c| = 1$.

17. 0

Ejercicios de repaso del capítulo 2

1. *a*) 0 *b*) 0 *c*) $2\pi i$ *d*) $2\pi i \cos(1)$

3. Si $r_1 > r_2 > 1$, entonces γ_{r_1} es homotópica a γ_{r_2} en $\{z \text{ tal que } |z| > 1\}$ y por lo tanto, las integrales son iguales.

5. $-\frac{2}{3}$

7. Si $z_1 \in A$, sea γ una trayectoria en A desde z_0 hasta z_1. Por el lema de la distancia (1.4.21), existe una $\delta > 0$ tal que el conjunto $B = \{z \mid \text{existe un punto } w \text{ sobre } \gamma \text{ con } |z - w| < \delta\} \subset A$. El teorema del módulo máximo muestra que f es constante en esta subregión acotada y en particular $f(z_1) = f(z_0)$. Puesto que z_1 fue arbitraria, f es constante en A.

9. $v(x, y) = \dfrac{-y}{(x-1)^2 + y^2}$ en $\mathbf{C}\backslash\{1\}$

11. Considere $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}\,dz$ para obtener 2π.

13. i; $\log i = i(\pi/2) + 2\pi i n$; $\log(-i) = -i(\pi\backslash 2) + 2\pi i n$; $i^{\log(-1)} = -i$.

15. Por las fórmulas integrales de Cauchy, f' es analítica en A. Puesto que f no es 0 en A, f'/f es analítica en A y la integral es 0, por el teorema integral de Cauchy.

17. No; sea γ el círculo unitario. Entonces $\int_\gamma x\,dx + x\,dy = \pi$.

19. *a*) No. *b*) Sí. *c*) Sí.

21. $2e^{i\pi/6}$, $2e^{i5\pi/6}$ y $2e^{i3\pi/2}$.

23. Por la propiedad del valor medio para las funciones armónicas (2.5.9),

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})d\theta$$

Por la fórmula de Poisson (2.5.13),

$$u(re^{i\phi}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\theta})}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}\,d\theta$$

Utilizando estas igualdades obtenemos

$$\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(Re^{i\theta})}{R^2+2Rr+r^2}\,d\theta \le u(z) \le \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(Re^{i\theta})}{R^2-2Rr+r^2}\,d\theta$$

esto es,

$$\frac{(R+r)(R-r)}{(R+r)(R+r)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\,d\theta \le u(z) \le \frac{(R-r)(R+r)}{(R-r)(R-r)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\,d\theta$$

Por lo tanto,

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}u(0) \le u(z) \le \frac{R+|z|}{R-|z|}u(0)$$

3.1. Series convergentes de funciones analíticas

1. *a*) No converge. *b*) 0.

3. El límite es 1 y la convergencia no es uniforme.

5. Si $|z| \le r$, entonces $|z^n - 0| \le r^n$ y así $|z^n - 0| < \varepsilon$ siempre que $n > (\log \varepsilon)/(\log r)$. Esa n funciona para toda z en D_r, así que la convergencia es uniforme. La convergencia no es uniforme en $D(0; 1)$. Por ejemplo, si $z = r$, la n mínima requerida es $(\log \varepsilon)/(\log r)$, la cual resulta arbitrariamente grande conforme r se acerca a 1.

7. Ninguna de estas series converge absolutamente. Sin embargo, tanto la parte real como la imaginaria de cada una de ellas son series alternantes cuyos términos decrecen monótonamente a cero en valor absoluto y entonces son convergentes (por el criterio de series alternantes del cálculo).

9. La sucesión de sumas parciales converge uniformemente, entonces converge a una función continua y la afirmación se sigue.

11. Sea D cualquier disco cerrado en A. Entonces existe una $r > 1$ tal que $|z| > r$ para toda $z \in D$. Por lo tanto, $|1/z^n| < (1/r)^n$ para toda $z \in D$. Pero $\sum_{n=1}^{\infty}(1/r)^n$ converge, ya que $1/r < 1$. Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/z^n$ converge absoluta y uniformemente en D. Puesto que $1/z^n$ es analítica en A, el teorema de convergencia analítica (3.1.8) muestra que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/z^n$ es analítica en A.

13. Sea D un disco cerrado en A y sea δ su distancia desde la frontera $\operatorname{Im} z = \pm 1$. Para $z = x + iy \in D$, demuestre que $|e^{-n} \operatorname{sen}(nz)| \le e^{-n\delta}$.

15. Por el ejemplo resuelto 3.1.15, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente en los discos cerrados de A y entonces es analítica en A, con $\zeta'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\log n)n^{-z}$, que también converge uniformemente en los discos cerrados de A y es por tanto, analítica. Por inducción, $\zeta^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\log n)^k n^{-z}$ converge uniformemente en los discos cerrados de A y es entonces analítica en A. Por lo tanto, $(-1)^k\zeta^k(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^k n^{-z}$ es también analítica.

17. No; sea $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k/k^2$.

19. $\{z \text{ tal que } |2z - 1| < 1\} = \{z \text{ tal que } |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$

3.2. Series de potencias y el teorema de Taylor

1. *a*) 1 *b*) e *c*) e *d*) 1

3. *a)* $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} (e/n!)(z-1)^n$, que converge en todos lados.

b) $1/z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$; la serie converge para $|z-1|<1$.

5. *a)* $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z} = \operatorname{sen}(1) + [\cos(1) - \operatorname{sen}(1)](z-1)$

$$+\left[\frac{\operatorname{sen}(1)}{2} - \cos(1)\right](z-1)^2 + \left[\frac{5}{6}\cos(1) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(1)\right](z-1)^3 + \cdots$$

b) $z^2 e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+2}$ *c)* $e^z \operatorname{sen} z = z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \cdots$

7. *a)* $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}/n!$ *b)* $\sum_{n=0}^{\infty} [1 - 1/(2^{n+1})]z^n$

9. $\sqrt{z^2-1} = i - \frac{i}{2}z^2 - \frac{i}{8}z^4 + \cdots$

11. Para senh z, las derivadas impares son 1 y las derivadas pares son 0 en $z = 0$. Por lo tanto, por el teorema de Taylor,

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

El argumento para cosh z es similar.

13. $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ y $\dfrac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}$

15. Si $|z| < R$, entonces $\Sigma a_n z^n$ converge absolutamente; esto es, $\Sigma |a_n|\,|z|^n$ converge. Pero $|(\operatorname{Re} a_n)z^n| \le |a_n|\,|z_n|$, así que $\Sigma |(\operatorname{Re} a_n)z^n| \le \Sigma |a_n|\,|z^n|$ y, por lo tanto, $\Sigma (\operatorname{Re} a_n)z^n$ converge. Puesto que $\Sigma(\operatorname{Re} a_n)z^n$ converge para cualquier $|z| < R$, el radio de convergencia debe ser $\ge R$.

17. La región para la primera serie es $A = \{z \text{ tal que } |\operatorname{Im}(z)| < \log 2\}$.
La segunda serie no es analítica en ningún lado.

19. *a)* Suponga que la serie de Taylor para f, $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n/n!$, tiene radio de convergencia R y converge a una función $g(z)$ en $D(z_0; R)$. Sea R_0 el radio de D. Por el teorema de Taylor (3.2.7), la restricción de g a D es igual a f y $R \ge R_0$. La función g es analítica y, por lo tanto, continua en $D(z_0; R)$. Si R fuera $> R_0$, entonces g sería continua y en consecuencia acotada en el disco cerrado compacto $\operatorname{cl}(D) = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \le R_0\}$. Pero g y f son la misma en D, y f no es acotada en D, así que R no es mayor que R_0 y por lo tanto $R = R_0$.

b) Las ramas de $\log(1+z)$ pueden ser definidas con el corte de plano a lo largo de cualquier rayo desde -1 hasta ∞. Para la rama principal esto es a lo largo del eje negativo. Estas determinaciones difieren por la suma de una constante que depende del ángulo entre el rayo y el eje real. Las expansiones en series alrededor de $z_0 = -2 + i$ difieren únicamente en los términos constantes y, por lo tanto, tienen el mismo radio de convergencia, al cual le podemos llamar R. Si escogemos el rayo que parte de -1 y es directamente opuesto a z_0, entonces $D(z_0; \sqrt{2})$ está en la región de analiticidad y, por lo tanto, $R \ge \sqrt{2}$. Pero $D = D(z_0; 1)$ es el disco más grande centrado en z_0 que está contenido en la región de analiticidad de la rama principal de $\log(1+z)$, y $\sqrt{2} > 1$.

21. Suponga que $|h(z)| \le M$ para z en B y sea $\varepsilon > 0$. Si $g(z) = \Sigma_i g_i(z)$, entonces la convergencia uniforme nos da una N tal que $|g(z) - \sum_{i=m+1}^{n} g_i(z)| < \varepsilon/M$ siempre que $n \ge N$ y $m \ge$

Por ende,

$$\left| h(z)g(z) - \sum_{i=m+1}^{n} h(z)g_i(z) \right| = |h(z)| \left| g(z) - \sum_{i=m+1}^{n} g_i(z) \right| < \varepsilon$$

23. $$\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z_n}{n!}\right] = (2x - 2z)e^{2xz - z^2} = (2x - 2z)\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{z^n}{n!}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n(x)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2xH_n(x)\frac{z_n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} 2H_{n-1}(x)\frac{z^n}{(n-1)!}$$

$$H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{n+1}(x)\frac{z^n}{n!} = 2xH_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)]z^n/n!$$

Al igualar los coeficientes obtenemos los resultados deseados.

25. $f(z) = 1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{5}{4}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^n = \frac{5e^{2z} - 2z - 1}{4}$

3.3. Series de Laurent y clasificación de singularidades

1. *a)* $\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots,\ 0 < |z| < \infty$

b) $\frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - z^4 + \cdots,\ 0 < |z| < 1$

c) $z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - \cdots,\ |z| < 1$

d) $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \cdots,\ 0 < |z| < \infty$

3. $z/(z+1) = 1/(1 + 1/z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (1/z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}$ para $|z| > 1$

5. Sea γ_3 un segmento radial desde γ_2 hasta γ_1 que no pase por z. Sea $\gamma_4 = \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_3$ como se indica en la figura A.3.3.5. Sea γ_5 un círculo pequeño alrededor de z que esté entre γ_1 y γ_2 y que no cruza a γ_3.

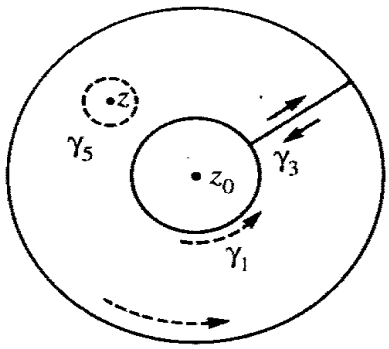


Figura A.3.3.5. Solución del ejercicio 3.3.5.

Entonces γ_4 es claramente homotópica a γ_5 en la región de analiticidad de $f(t)$ y de $f(t)/(t-z)$. Por lo tanto, por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_5}\frac{f(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_4}\frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

7. Utilice el hecho de que existe una función analítica ϕ definida en una vecindad de z_0 tal que $\phi(z_0) \neq 0$ y $f(z) = \phi(z)/(z-z_0)^k$.

9. *a*) No *b*) No *c*) Sí

11. $\dfrac{1}{e^z-1} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12}z - \dfrac{1}{720}z^3 + \cdots$

13. $\cot z = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{3}z - \dfrac{1}{45}z^3 - \dfrac{2}{945}z^5 + \cdots$

15. Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/(z-z_0)^n$ converge para $|z-z_0| = (R+r)/2 > R$, $b_n/(z-z_0)^n \to 0$ para $|z-z_0| = (R+r)/2$. Esto es, $2^n|b_n|/(R+r)^n \to 0$ y, por lo tanto, es acotada. En consecuencia, por el lema de Abel-Weierstrass, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ converge uniforme y absolutamente en $A_\rho = \{z \text{ tal que } |z-z_0| \leq \rho\}$ si $\rho < 2/(R+r)$. Al tomar $\rho = 1/r < 2/(R+r)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ converge uniforme y absolutamente en $\{z \text{ tal que } |z-z_0| \leq 1/r\}$. En particular, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n$ converge. Si $z \in F_r$, $|z-z_0| > r$ y por lo tanto, $\left|\dfrac{b_n}{(z-z_0)^n}\right| < \dfrac{|b_n|}{r^n}$. Así $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/(z-z_0)^n$ converge uniformemente en F_r, por el criterio M de Weierstrass.

17. $\cos(1/z)$ tiene un 0 de orden 1 en

$$\frac{1}{z} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

esto es, en

$$z = \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

Por ende, $1/\cos(1/z)$ tiene polos simples en esos puntos y $z = 0$ no es una singularidad aislada.

19. *a*) $\frac{1}{2}$ *b*) $\frac{1}{2}$ *c*) 1 *d*) 0

Ejercicios de repaso del capítulo 3

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(z-1)^n/n$

3. $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{4n}$

7. Suponga que $w \in \mathbf{C}, w \neq 0$. Resuelva $e^{1/z} = w$ para z, como sigue:

$$\frac{1}{z} = \log w = \log|w| + i(\arg w + 2\pi n)$$

$$z = \frac{1}{\log|w| + i(\arg w + 2\pi n)}$$

En cualquier vecindad agujerada del origen está un número infinito de estas soluciones.

9. *a*) $\frac{1}{2}$ *b*) 1

11. Los coeficientes para cualquier serie están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

donde γ es el círculo de radio 2 centrado en el origen.

13. Se aplica el lema de Schwarz con lo que da $|f(z)| \leq |z|$ para toda $|z| < 1$. También, $|f(z)| = |z|$ para cualquier $|z| < 1$ implica que $f(z) = cz$ una constante c, con $|c| = 1$.

15. $-2\pi i/3$

17. *a*) $= \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + z^7 - \cdots$ *b*) $= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7} - \frac{1}{z^9} + \frac{1}{z^{11}} - \cdots$

19. Sí. Usted puede basar su argumento en el hecho de que una composición de funciones analíticas es analítica.

21. Puesto que f es acotada cerca de z_0, z_0 no es un polo ni es una singularidad esencial.

23. 2π

25. *a*) Polos de orden 1 en $z = 1$ y $z = 5$.
b) Singularidad removible en $z = 0$.
c) Polo de orden 1 en $z = 0$.
d) Polo de orden 1 en $z = 1$.

27. $2\pi i$.

29. *a*) $a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = 0, a_2 = (4 - \pi^2)/8$

b) El denominador tiene ceros de orden 2 en los enteros impares. El numerador tiene ceros de orden 1 en ± 1 y, por lo tanto, la función tiene polos simples en ± 1 y polos de orden 2 en todos los otros enteros impares

c) Las singularidades más cercanas a 0 están en ± 1. El radio de convergencia es 1.

31. No; sen z.

33. *a*) 2π *b*) $B_n = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i(n-1)\theta}}{e^{e^{i\theta}} - 1} d\theta$

35. 1

37. $a_0 + z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \cdots$, donde $a_0 = f(0)$. Muestre la unicidad demostrando que los coeficientes están determinados de manera única.

39. $|f(z)| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right|$ para toda z. Pero

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} |z|^k \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |z|^k \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = e^{|z|},$$

y, por lo tanto, el límite no es mayor que $e^{|z|}$.

4.1. Cálculo de residuos

1. *a)* 0 *b)* 1 *c)* -1 *d)* $\frac{1}{6}$ *e)* 0

3. Sea $f(z) = 1/z$.

5. El residuo correcto es 2.

7. *a)* Res $(f, 0) = \frac{1}{64}$, Res $(f, -4) = -\frac{1}{64}$ *b)* Res $(f, -1) = 0$

c) Res $(f, \sqrt[3]{3}) = 3^{-5/3}$, Res $(f, \sqrt[3]{3}e^{2\pi i/3}) = 3^{-5/3} e^{-4\pi i/3}$, Res $(f, \sqrt[3]{3}e^{4\pi i/3}) = 3^{-5/3} e^{-2\pi i/3}$.

9. $\frac{1}{6}$

11. Res $(f_1 f_2, z_0) = a_1$ Res $(f_2, z_0) + a_2$ Res (f_1, z_0) donde a_i es el término constante en la expansión de f_i.

13. *a)* 0 *b)* $-e/2$ *c)* Res $(f, 0) = 1$, Res $(f, 1) = -1$

d) Res $(f, 0) = 1$, Res $(f, 1) = -e/2$.

4.2. El teorema del residuo

1. *a)* 0 *b)* 0.

3. 0.

5. $-12\pi i$

7. *a)* 0 *b)* 0

9. *a)* $2\pi i$ *b)* $2\pi i$.

11. $-\int_{\gamma} g\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} dz = \int_{\tilde{\gamma}} g(w)\, dw$ donde $\tilde{\gamma}$ es la curva $1/\gamma$

13. *a)* -8. *b)* $2\pi i$.

15. $-\pi i$

4.3. Evaluación de integrales definidas

1. $\pi/\sqrt{3}$

3. $\frac{\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$

5. $\frac{\pi e^{-m/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{m}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen} \frac{m}{\sqrt{2}} \right)$ si $m > 0$ $\frac{\pi e^{m/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{m}{\sqrt{2}} - \operatorname{sen} \frac{m}{\sqrt{2}} \right)$ si $m < 0$

7. $\pi e^{-1}/2$

9. $-\pi i/(a-1)^2$

11. La función es par y se aplica la línea 3 de la tabla 4.3.1.

13. 0

15. $-\pi i/2$ (o $\pi i/2$ si se usa una rama diferente). Construya $\sqrt{z^2-1}$ en mucho como en el ejemplo 4.3.15, pero haga el corte de rama para que el factor $\sqrt{z-1}$ vaya de 1 hasta $-\infty$ y el de $\sqrt{z+1}$ de -1 a ∞. Al cruzar el eje real en x, con $|x|>1$ se requiere cruzar ambos cortes o ninguno. El producto es analítico en $\mathbb{C}\setminus\{z \mid \operatorname{Im} z = 0 \text{ y } |\operatorname{Re} z| \le 1\}$, como en el ejemplo 4.3.15.

17. $\pi e^{-ab}/a$

19. Utilice el ejercicio **18**; Res $((-z)^{a-1}f(z), 1) = (e^{\pi i})^{a-1}$.

21. Después de verificar que todas las integrales existen y que las operaciones están justificadas, calcule

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\pi(0-1) = \pi$$

y, por lo tanto, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

23. $2\pi(97\sqrt{3}-168)/3$

25. *a*) $\sqrt{\pi i}$

4.4. Evaluación de series infinitas y expansiones en fracciones parciales

1. Como en la demostración de la proposición 4.4.2, $\displaystyle\int_{C_N} \frac{\pi\cot\pi z}{z^4}\,dz \to 0$ conforme $N \to \infty$. El residuo en $n \neq 0$ es $1/n^4$. Calcule los primeros términos de la serie de Laurent $\cot z = 1/z - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \cdots$ para encontrar que el residuo en 0 es $-\pi^4/45$, así que

$$\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{\pi^4}{45} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4}\sum_{n=-1}^{N}\frac{1}{(-n)^4}\right] = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{\pi^4}{45} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4}\right)$$

y entonces $\sum_1^{\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$.

3. Aplique el teorema de la adición (4.4.1) y la proposición 4.4.2.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi z}{z^2+a^2}, \pm ai\right) = -\frac{\pi}{2a}\coth\pi a$$

(verifique esto), y así

$$\frac{\pi}{a}\coth\pi a = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\coth\pi a$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \coth \pi a$$

5. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) =$ – [suma de los residuos de $\pi \csc \pi z f(z)$ en los polos de f]. Aquí f debe obedecer algunas condiciones como: Existen $R > 0$ y $M > 0$ tales que para $|z| > R$, $|f(z)| \leq M/|z|^{\alpha}$, donde $\alpha > 1$. Si alguno de los polos de f estuviera en los enteros, la técnica puede aún ser usada. Después de verificar que

$$\int_{C_N} \frac{\pi f(z)}{\operatorname{sen} \pi z}\, dz \to 0 \text{ conforme } N \to \infty$$

tendríamos

$$-\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ no es un polo de } f}}^{\infty} (-1)^n f(n) = \text{[suma de los residuos de } \pi \csc \pi z f(z) \text{ en los polos de } f\text{]}.$$

7. Considere $f(z) = \cot z - 1/z$. Entonces $\lim_{z \to 0} f(z) = 0$ y f es analítica en 0. Verifique que tiene polos simples en $z = n\pi$ para $n \neq 0$, con residuo 1 en cada uno. Sea C_N el cuadrado con esquinas en $\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi(\pm 1, \pm i)$. A lo largo de C_N tenemos $\cot z = \cot(-z)$, y $-z$ está en C_N cuando z lo está. Entonces, es suficiente verificar $|\cot z|$ para $y = \operatorname{Im} z \geq 0$. Si $z = x + iy$, $y > 0$, entonces

$$|\cot z| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right|$$

$$= \left| \frac{e^{2ix-2y} + 1}{e^{2ix-2y} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{2ix-2y} - 1|}$$

sobre la horizontal superior del cuadrado $y = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi > 1$ y, por lo tanto, $|\cot z| \leq 2/(1 - e^{-2}) \leq 4$. Sobre los lados verticales, $x = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$ y, por lo tanto, $e^{2ix} = -1$, y $|\cot z| \leq \left| \frac{2}{-e^{-2y} - 1} \right| < 2$. En cualquiera de los casos, $|f(z)| \leq 4 + 2/\pi$ para z sobre C_N y, en consecuencia, con $R = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$, $M = 4 + 2/\pi$, y $S = 8$, las condiciones del teorema de fracciones parciales (4.4.5) se satisfacen y los datos en los polos se pueden introducir para dar la fórmula deseada.

9. No se conoce una respuesta exacta a este aparentemente simple problema. La suma es $\zeta(3)$, donde ζ es la función zeta de Riemann, importante en el análisis y en teoría de números y una fuente de varios problemas abiertos famosos en matemáticas. El método del teorema de la adición (4.4.1) puede ser usado para sumar $\zeta(p) = \sum_{1}^{\infty} (1/n^p)$ para p par, como en la proposición 4.4.3 y el ejercicio 1. Uno obtiene

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1} (2\pi)^{2m} \frac{B_{2m}}{2(2m)!}$$

donde las B_{2m} son los números de Bernoulli involucrados en la expansión de la función cotangente. (Véase también el ejercicio de repaso 33 del capítulo 3.) Este método falla para p impar básicamente porque $1/(-n)^p + 1/n^p = 0$, no a $2/n^p$. Un valor aproximado es $\zeta(3) \approx 1.2020569$, no se sabía si $\zeta(3)$ era irracional. Esto se mostró en 1978 por R. Apery (véase *Mathematical Intelligencer*, vol. 1 (1979), pp. 195-203.) Aun cuando la irracionalidad $\zeta(p)$ es todavía desconocida para otros valores impares de p.

Ejercicios de repaso del capítulo 4

1. $2\pi/\sqrt{3}$

3. $(\pi\sqrt{2})/2$

5. $\frac{\pi}{2}\left[2-\frac{1}{e}-\cos(1)\right]$

7. $\pi/\sqrt{5}$

9. 2π

11. $2\pi i \operatorname{sen}(1)$

13. *a)* $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots+\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n+\cdots$

b) $\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\frac{15}{z^5}+\cdots+\frac{2^n-1}{z^{n+1}}+\cdots$

15. $\pi/2$

17. *a)* Res $(f, 0) = -1$. Los otros residuos están en z, con $z^2 = 2\pi ni$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, y son son iguales a $-\frac{1}{2}$.

b) Res $(f, n\pi) = 2\pi n \cos(n^2\pi^2)$ *c)* $\cos(1)$

19. Res $\left(\frac{f''}{f'}, z_0\right) = k-1$ y Res $\left(\frac{f''}{f}, z_0\right) = \frac{2k}{k+1}\cdot\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{f^{(k)}(z_0)}$ para $k \neq 0, 1$

21. $\frac{1}{1+(z-1)}$ ha sido expandida incorrectamente.

23. $-\pi i$

25. *a)* El radio de convergencia es infinito.

b) El radio de convergencia es 1 (utilice el criterio de la raíz).

NOTA: Para usar el criterio de la razón, se utilizan los siguientes hechos:

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

(ii) En la serie de potencias $\Sigma a_n z^n$, los coeficientes a_n tienden a un límite finito distinto de cero, entonces el radio de convergencia debe ser 1.

27. *a)* $1+3z+6z^2+10z^3+\cdots+\frac{(n+1)(n+2)}{2}z_n+\cdots$

b) $-\frac{1}{z^3}-\frac{3}{z^4}-\frac{6}{z^5}-\cdots-\frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{1}{z^{n+3}}-\cdots$

c) $-\frac{1}{8}+\frac{3}{16}(z+1)+\frac{6}{32}(z+1)^2+\cdots+\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}}(z+1)^n+\cdots$

d) $\frac{-1}{(z-1)^3}$

29. *a)* Use $\operatorname{sen}^3 x = (3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x)/4$. Utilice un argumento parecido al del valor principal de Cauchy, verificando directamente que

$$\int_\gamma \frac{3e^{iz}-e^{3iz}}{z^3} \to -3\pi i \quad \text{conforme} \quad \rho \to 0$$

donde γ es un semicírculo en el semiplano superior desde $-\rho$ hasta ρ.

b) Use la línea 5 de la tabla 4.3.1.

31. Utilice el ejercicio 5 de la sección 4.4. $F(z) = (\pi \csc \pi z)/(z + a)^2$ tiene un polo en $z = -a$ con residuo $-\pi^2 \csc(\pi a) \cot(\pi a)$.

33. La última igualdad es errónea porque se omite la integral a lo largo del semicírculo. No podemos concluir que la integral a lo largo del semicírculo se va a 0 conforme $R \to \infty$ y debe entonces evaluarse más cuidadosamente.

35. Es suficiente para f el que sea analítica en una región que contenga al eje real y al semiplano superior y que sea tal que la integral de $f(z)/(z - x)$, a lo largo del semicírculo superior de $|z| = R$, tiende a 0 conforme $R \to \infty$. Estas condiciones se satisfarán si $|f(z)| < M/R^{\alpha}$ para alguna $M > 0$ y $\alpha > 0$, para R suficientemente grande y para z que esté en el semiplano superior. Utilice el ejercicio 34 para la última parte.

37. $\dfrac{\pi}{2b} \tanh \dfrac{\omega\pi}{2b}$

5.1. Teoría básica de los mapeos conformes

1. Los primeros tres cuadrantes.

3. *a*) En todos lados excepto en $z = 0$ y $z = -\frac{2}{3}$.

b) En todos lados excepto en $z = -\frac{1}{5}$.

5. $v(x, y) = 1 - 2xy + \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

7. Sean g y h las funciones garantizadas por el teorema del mapeo de Riemann:

$$g: A \to D \quad \text{con} \quad g(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad g'(z_0) > 0$$
$$h: B \to D \quad \text{con} \quad h(w_0) = 0 \quad \text{y} \quad h'(w_0) > 0$$

Hágase $f(z) = h^{-1}(e^{i\theta} g(z))$ para $z \in A$ y verifique que f manda a A en forma uno a uno y sobre en B, que $f(z_0) = h^{-1}(e^{i\theta} g(z_0)) = h^{-1}(0) = w_0$, y que $f'(z_0) = e^{i\theta}[g'(z_0)/h'(w_0)]$.

9. De $f \circ f^{-1}(z) = z$ obtenemos $f'(f^{-1}(z)) \cdot (f^{-1})'(z) = 1$. Se sigue que $f'(z) \neq 0$, así que f es conforme, por el teorema del mapeo conforme (5.1.1).

11. No para ambas partes. Una función para *a*) es una función entera acotada. El teorema de Liouville dice que ésta debe ser constante y, por lo tanto, no puede transformar a $\mathbf{C}$ sobre D. La inversa de una función para *b*) es una función para *a*).

13. $A \cup \text{fr}(A)$ es cerrado. Si A es acotado entonces $A \cup \text{fr}(A)$ sería también acotado y, por lo tanto, compacto. Si hubiera una extensión continua de f a este conjunto compacto, su imagen sería compacta y no contendría al conjunto no acotado B.

5.2. Transformaciones fraccional lineal y de Schwarz-Christoffel

1. *a*) $\mathbf{R}\backslash\{1\}$ ($f(\infty) = 1$ y $f(-1) = \infty$)

b) El círculo que corta al eje real en ángulos rectos en 3 y $\frac{1}{3}$ $\left(\text{centro}\,\frac{5}{3}, \text{radio}\,\frac{4}{3}\right)$.

c) {eje imaginario} $\cup$ $\{\infty\}$ ($f(-1) = \infty$).

d) {el círculo unitario}$\backslash\{1\}$ ($f(\infty) = 1$)

3. *a*) $f(z) = (z + 1)/(z - 3)$ *b*) $f(z) = z - 2$

5. De acuerdo a la figura 5.2.11(vi), $z \mapsto -i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ manda al disco al semiplano superior

con $0 \mapsto i$. El mapeo $w \mapsto 2(w+1)$ manda al semiplano superior en sí mismo. Entonces,

$$f(z) = 2\left[1 - i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right]$$

hace lo que queremos.

7. $z \mapsto \dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z} = \dfrac{2z-1}{2-z}$ manda a D en D y a $\frac{1}{2}$ en 0. $w \mapsto \dfrac{3w-1}{3-w}$ manda a D en D y a $\frac{1}{3}$ en 0. Al resolver $\dfrac{3w-1}{3-w} = \dfrac{2z-1}{2-z}$ para w da $w = \dfrac{5z-1}{5-z}$ y, por lo tanto, $f(z) = \dfrac{5z-1}{5-z}$ es el mapeo que queremos.

9. $f(z) = e^{-3\pi i/4}\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)$

11. T es la composición de una traslación, una inversión en el círculo unitario, una reflexión en el eje real, una rotación, una amplificación y otra traslación.

13. $(2z-1)/(2-z)$. (Esto puede ser multiplicado por $e^{i\theta}$ para cualquier constante real θ).

15. $e^{i\theta}\dfrac{z-Rz_0}{R-\bar{z}_0 z}$

17. Suponga que T es tal mapeo. Defina W como

$$W(z) = T\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{z+1}{z-1}\right)$$

W transforma conformemente al círculo unitario sobre sí mismo. Utilice ahora la proposición 5.2.1.

19. $\dfrac{z^8-i}{z^8+i}$

21. Por la proposición 5.2.3, $T(\gamma_1)$ y $T(\gamma_2)$ son círculos o líneas rectas y puesto que T es conforme, por el teorema 5.1.1, éstos se intersectan ortogonalmente.

23. $|\tilde{z}-z_0|\,|z-z_0| = |\bar{\tilde{z}}-\bar{z}_0|\,|z-z_0|$

$$= \left|\left(\frac{\bar{z}_0 z + R^2 - |z_0|^2}{z-z_0} - \bar{z}_0\right)(z-z_0)\right|$$

$$= |\bar{z}_0 z + R^2 - |z_0|^2 - \bar{z}_0 z + \bar{z}_0 z_0| = |R^2| = R^2$$

25. $f(z) = \dfrac{1+e^z}{1-e^z}$

27. Utilice una rama del log definida en $\mathbf{C}\setminus\{\text{eje real no positivo}\}$ para $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$, donde $-\pi < \theta < \pi$.

29. Por la fórmula de Schwarz-Christoffel, la imagen es un polígono con cuatro lados, tres de cuyos ángulos son de 90°. Por lo tanto, la imagen es un rectángulo.

31. No. El mapeo

$$f(z) = \int_0^z (t-1)^{-\alpha_1} t^{-\alpha_2}\, dt$$

manda al semiplano superior en un triángulo con ángulos exteriores $\pi\alpha_1$, $\pi\alpha_2$, $\pi\alpha_3$.

33. Ambos círculos frontera van a 0 y $f(0) = \infty$. Puesto que f manda a **R** en **R**, los círculos van a líneas que pasan por $f(2)$ y $f(4)$ y que son otorgonales a **R**. Éstas son las líneas Re $z = 2$ y Re $z = 1$. Verifique el valor de $f(3)$ para estar seguros que la región es correcta.

35. $f(b) = 0$ y $f(d) = \infty$. Entonces un círculo a través de b y d debe transformarse en un círculo a través de 0 e ∞, esto es, una línea a través del origen. Puesto que

$$|f(z)| = \left|a\,\frac{z-b}{z-d}\right| = \left|\frac{z-b}{z-d}\right| |a|$$

tenemos

$$\left|\frac{z-b}{z-d}\right| = \frac{r}{|a|} \Leftrightarrow |f(z)| = r$$

Esto establece *a*) y *b*).

La manera más fácil para obtener la ortogonalidad es observar que las imágenes bajo el mapeo f son trivialmente ortogonales. Puesto que la inversa de una transformación fraccional lineal es de la misma forma, en consecuencia conforme, lo mismo debe haber sido cierto para la preimagen. (Para confirmar directamente esto, se requieren cálculos directos pero largos.)

5.3. Aplicaciones a la ecuación de Laplace: conducción del calor, electrostática e hidrodinámica

1. $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{4x^3y - 4xy^3}{x^4 - 6x^2y^2 + y^4} = \dfrac{4}{\pi}\arctan\dfrac{y}{x}$

3. $\phi(x, y) = 1 - \dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{\cos x \cdot \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen} x \cdot \cosh y - 1} + \dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{\cos x \cdot \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen} x \cdot \cosh y + 1}$

5. $F(z) = |\alpha|\left(e^{-i\theta}z + \dfrac{1}{e^{-i\theta}z}\right)$

En coordenadas polares,

$$\phi(r, \Theta) = |\alpha|\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos(\Theta - \theta)\right]$$

$$\psi(r, \Theta) = |\alpha|\left[\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}(\Theta - \theta)\right]$$

7. En coordenadas polares,

$$\phi(r, \theta) = \alpha r^4 \cos 4\theta \quad \text{y} \quad \psi(r, \theta) = \alpha r^4 \operatorname{sen} 4\theta$$

En coordenadas rectangulares,

$$\phi(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\alpha \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = (4x^3y - 4xy^3)\alpha$$

Ejercicios de repaso del capítulo 5

1. Cualquier región que no contenga al 0.
3. $(2z-i)/(2+iz)$. (Esta respuesta puede ser multiplicada por $e^{i\theta}$ para cualquier constante real θ.)
5. $f(z) = (2z-4)/z$ es una de éstas.
7. El primer cuadrante.
9. $f(z) = z + 1 - i$
11. No. La región $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$ no es simplemente conexa. La inversa mandaría a la región simplemente conexa en ella, lo cual es imposible, por el ejemplo resuelto 5.1.7.
13. No.
15. Utilice la proposición 5.2.2.
17. $F(z) = \sqrt{\dfrac{az^2+b}{cz^2+d}}$ donde a, b, c y d son reales y $ad > bc$
19. $f(z) = \sqrt{z^2+1}$ donde $\sqrt{\ }$ debe tomarse como la rama definida en $\mathbf{C}\backslash\{\text{eje real positivo}\}$, la cual toma valores en el semiplano superior. El potencial deseado es $\phi(z) = \dfrac{1}{\pi} \arg\left(\dfrac{\sqrt{z^2+1}-1}{\sqrt{z^2+1}+1}\right)$.
21. El potencial complejo deseado debe ser $F(z) = \alpha\sqrt{z^2+1}$. La fórmula

$$y^2 = \frac{K-1}{2x^2+K-1} + \frac{K-1}{2}$$

para $K > 1$, da líneas de ψ constante, las cuales son líneas de corriente.

23. $\phi(x, y) = 1 - \dfrac{1}{\pi} \arctan \dfrac{e^x \operatorname{sen} y}{e^x \cos y - 1}$. Los valores de arctan se escogen entre 0 y π.
25. $f(z) = \dfrac{h}{\pi}(\sqrt{z^2} - 1 + \cosh^{-1} z)$
27. $T(x, y) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{z}{a}\right)$
29. $\dfrac{\pi e^{-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$
31. $\sqrt{\rho; \rho^2}$

6.1. Continuación analítica y superficies elementales de Riemann

1. *a*) No, no lo es. Una condición importante del teorema de identidad (6.1.1) es que el punto límite z_0 debe estar en A.
   b) No. Sea A el disco unitario. Sea $u_1(z) = \operatorname{Im} z$ y $u_2(z) = \operatorname{Im} e^z$. Tanto u_1 como u_2 son armónicas en A y son cero a lo largo del eje real, pero éstas no son idénticamente 0, no coinciden una con otra en A.
3. Si f fuera constante en una vecindad z_2, sería constante en todo A, por el teorema de identidad. Esto obligaría a $f'(z_1)$ a ser 0, lo cual no es cierto.
5. Si $z = re^{2\pi ip/q}$, entonces $z^{n!} = r^{n!}$ siempre que $n \geq q$. Cualquier conjunto abierto que contenga a A, contiene un punto $e^{2\pi ip/q} = z_0$. Si f fuera continuada analíticamente para incluir a z_0, debería tener un límite finito en z_0, pero $\lim_{r \to 1} f(re^{2\pi ip/q}) = \infty$. Verifique esto utilizando la primera observación.

7. La unión de los conjuntos U_k es un conjunto abierto que contiene a γ. El lema de la distancia da una distancia positiva ρ de γ al complemento de A. Puesto que la continuación es analítica en cada U_k, el radio de convergencia es al menos ρ en cada punto a lo largo de γ. El lema de la trayectoria cubriente da una cadena finita de discos traslapados con centros a lo largo de γ, donde cada uno contiene el centro del siguiente, así que éstos pueden ser usados para implementar la continuación mediante series de potencias.
9. La situación es algo parecida a aquella para $\sqrt{z}$, excepto que ahora hay tres hojas, cada una copia del plano cortado a lo largo del, digamos, eje real negativo. Éstas se unen a lo largo de estos cortes de tal manera que al seguir una trayectoria que gira una vez alrededor de cero, uno es llevado desde la primera hoja hasta la segunda. Cuando la trayectoria gira una vez más alrededor del cero, uno es llevada a la tercera hoja; cuando la trayectoria gira una tercera vez alrededor del cero. uno es llevada de regreso a la primera hoja.
11. $f(z) = 1/(1 + z)$ la extiende a $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$.
13. Use el ejemplo resuelto 2.4.16. (El teorema de la función implícita puede usarse para asegurar que la mayoría de los rectángulos pequeños se intersecan con γ a lo más dos veces.)

6.2. El teorema de Rouché y el principio del argumento

1. Cinco. Considere $g(z) = z^6 - 4z^5 + z^2 - 1$ y $f(z) = -4z^5$ y utilice el teorema de Rouché.
3. Para R suficientemente grande, la curva γ_R mostrada, incluirá a cualquier número finito de posibles soluciones en el semiplano derecho. Sean $g(z) = z + e^{-z} - 2$ y $f(z) = z - 2$. A lo largo de γ_R, $|f(z) - g(z)| = e^{-\mathrm{Re}\, z} \leq 1 < |f(z)|$, y f tiene exactamente una solución. Por lo tanto, g tiene una solución.
5. Sean $h(z) = f(z) - z$ y $g(z) = -z$. Sobre el círculo $|z| = 1$, $|h(z)| - g(z)| = |f(z)| < 1 = |g(z)|$ y, por lo tanto, el teorema de Rouché muestra que h tiene un 0 en el interior de $\{z$ tal que $|z| = 1\}$. Un 0 de h es un punto fijo de f.
7. Sea $r_n = 1 - 1/n$ y $f_n(z) = f(r_n z)$. Utilice el ejercicio 5 para obtener z_n, con $f_n(z_n) = z_n$. (Utilice el teorema del módulo máximo para obtener $|f(r_n z)| < 1$ si $|z| = 1$.) Las z_n están todas en el disco cerrado $D = \{z$ tal que $|z| \leq 1\}$ y, por lo tanto, existe una subsucesión que converge a un punto $z_0 \in D$, digamos $z_{n_k} \to z_0$. Verifique lo siguiente: $r_{n_k} z_{n_k} \to z_0$ y por lo tanto $f(r_{n_k} z_{n_k}) \to f(z_0)$, pero $f(r_{n_k}, z_{n_k}) = z_{n_k} \to z_0$ y en consecuencia $f(z_0) = z_0$.
9. Sea $g(z) = a_n z^n$, estime $f(z) - g(z)$ a lo largo de círculos grandes, como en demostración del teorema fundamental del álgebra (2.4.9). y aplique el teorema de Rouché.
11. Use el método del teorema 6.2.1 para calcular el residuo de $f'(z)h(z)/f(z)$, obteniendo $kh(a_j)$ si f tiene un 0 de orden k en a_j, y $-kh(b_1)$ si f tiene un polo de orden k en b_1.
13. Aplique el ejercicio 11, con $h(z) = z$. (Los ceros se repiten en la suma de acuerdo a sus multiplicidades.)
15. Aplique el teorema fundamental del álgebra al polinomio $f(z) - w$.
17. No. Sea $f(z) = e^z - 1$. f tiene tres ceros en el interior de un círculo de radio 3π y centro en 0, pero $f'(z)$ no tiene ceros.
19. Cualquier r tal que $1 < r < 4$, dará el resultado deseado, el teorema de Rouché funciona con $r = 2$ y $g(z) = -4z^2$.
21. Suponga que $e^{i\theta}$ y $e^{i\Psi}$ están en el círculo frontera. Si $e^{i\Phi} \neq e^{i\Psi}$, entonces una ecuación $(e^{i\theta})^2 + 3(e^{i\theta}) = (e^{i\Psi})^2 + 3(e^{i\Psi})$ se convertiría en $(e^{i\theta})^2 - (e^{i\Psi})^2 = 3(e^{i\theta} - e^{i\Psi})$ o $(e^{i\theta} + e^{i\Psi})(e^{i\theta} - e^{i\Psi}) = 3(e^{i\theta} - e^{i\Psi})$, requiriendo que $e^{i\theta} + e^{i\Psi} = 3$. Esto no es posible ya que $e^{i\theta}$ y $e^{i\Psi}$ tienen ambas valor absoluto 1. La función es uno a uno en la frontera del círculo y, por lo tanto, en toda la región, por el teorema de la función uno a uno (6.2.10).
23. Considere $f(z) = 1/z$ y aplique el teorema de Rouché; usted obtendrá que -1 "es igual a" un número no negativo.

6.3. Propiedades de mapeo de las funciones analíticas

1. *a*) $\{z \text{ tal que } |z| < \frac{1}{2}\}$

b) $\{z \text{ tal que } |z - 1| < \frac{3}{2}\}$

3. Sea $f(z) = z^3$, $w_0 = z_0 = 1$, $r = 1$. Las raíces de $z^3 - 1$ están en 1, $e^{2\pi i/3}$ y $e^{4\pi i/3}$. De éstas, únicamente una está en $D = \{z \text{ tal que } |z - 1| < 1\}$. $f'(z) = 3z^2$ y es 0 únicamente en 0, que no está en D. Sin embargo, $f(re^{\pi i/3}) = f(re^{-\pi i/3}) = -r^3$, y para r suficientemente pequeño, estos puntos están en D.

5. Utilice la regla de la cadena para mostrar que $g(z) = f(z^n) - f(0)$ tiene un cero de orden n en $z_0 = 0$ y aplique el ejemplo resuelto 6.3.7.

7. Sea u armónica y no constante sobre una región A, $z_0 \in A$, y sea U cualquier vecindad abierta de z_0 contenida en A. Por el ejercicio 6, u es un mapeo abierto y, por lo tanto, $u(U)$ es una vecindad abierta de $u(z_0)$ en R. Esto significa que, arbitrariamente, cerca de z_0, u toma valores tanto mayores como menores que $u(z_0)$.

9. Sean $f(z) = e^{z-a} - z$ y $g(z) = -z$. Entonces, para $z = x + iy$ sobre el círculo unitario, $|f(z) - g(z)| = |e^{x+iy-a}| = e^{x-a} < 1 = |g(z)|$. Se aplica ahora el teorema de Rouché.

11. $|f|$ tiene un mínimo en algún lugar de D, ya que es continua. Éste no está en la frontera puesto que $f(0) = 1 < 2$. El mínimo está en un punto interior z_0 de D. Si $f(z)$ nunca fuera cero, entonces $1/f$ sería analítica, con un máximo local en z_0. El principio del módulo máximo diría que $1/f$, y por lo tanto, también f, sería constante. Pero esto no es cierto, ya que $f(0) = 1$ y $|f(1)| = 2$.

Ejercicios de repaso del capítulo 6

1. f es idénticamente 0 sobre $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$.

3. *a*) $g(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$ es entera y $g(a_k) = 0$ para toda k. Puesto que las a_k están acotadas, existe una subsucesión convergente a alguna a_0. Entonces, $g = 0$, por el teorema de identidad y, por lo tanto, $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ para toda z. Al tomar z real da el resultado.

b) Por la parte *a*), $f(x)$ es real para x real. Utilice el teorema del valor medio del cálculo, para obtener b_n, con $a_{2n+1} \le b_n \le a_n$ y $f'(b_n) = 0$. Verifique que $b_n \to 0$ y, por lo tanto, $f' = 0$, por el teorema de identidad. Concluya que f es constante.

5. Utilice el principio de reflexión de Schwarz para definir a f en el semiplano superior. La función f y su reflexión coinciden en la banda $\{z \mid 0 < \text{Im } z < 1\}$ y juntas definen una función entera acotada. Utilice ahora el teorema de Liouville.

7. Use el teorema de identidad para mostrar que $g(z) = f(z + 1) - f(z)$ es idénticamente igual a 0.

9. $\sqrt{5}$

11. Use la fórmula del conteo de raíces.

13. Use $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} I(\gamma, \alpha_j)$.

15. Sea $0 < r < 1$, $D(0, r) = \{z \text{ tal que } |z| < r\}$, $\gamma_r = \{z \text{ tal que } |z| = r\}$. Por suposición, f es uno a uno sobre γ_r, así que $f(\gamma_r)$ es una curva cerrada simple. Puesto que f es acotada sobre A, f debe transformar a $D(0, r)$ en el interior de γ_r. El teorema de la función uno a uno (6.2.10), muestra ahora que f es uno a uno en $D(0, r)$. Dado que esto se satisface para cualquier $r < 1$, f es uno a uno en A.

17. Sea $h(z) = f(z) - g(z)$ y utilice el principio del máximo para funciones armónicas.

19. *a*) Cierto; *b*) cierto; *c*) cierto: *d*) cierto; *e*) falso; *f*) falso; *g*) cierto; *h*) falso; *i*) cierto; *j*) cierto;

21. No.

23. *a*) Sí. *b*) No.

25. $\frac{1}{2}$

7.1. Productos infinitos y la función gamma

1. Los productos parciales son

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{(N-1)}{N}\cdot\frac{(N+1)}{N}=\frac{1}{2}\,\frac{N+1}{N}$$

que converge a $\frac{1}{2}$ conforme $N\to\infty$

3. Muestre que para ε pequeña y n grande,

$$0<(1-\varepsilon)|z_n|\le|\log(1+z_n)|\le(1+\varepsilon)|z_n|$$

y use la parte (iii) del teorema de convergencia para productos (7.1.2).

5. Hágase $z=\frac{1}{2}$ en $\operatorname{sen}\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)$ para obtener

$$1=\frac{\pi}{2}\prod^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n)^2}\right]=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots$$

7. $G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}=1\ (1+z/n)e^{-z/n}$ tiene ceros en $-1, -2, -3, \ldots$, y, por lo tanto, $\Gamma(z)=[ze^{\gamma z}G(z)]^{-1}$ tiene polos en $0, -1, -2,..$ Sabemos que $G(z-1)=ze^{\gamma}G(z)$, así que

$$\Gamma(z+1)=\frac{1}{(z+1)e^{\gamma z}e^{\gamma}G(z+1)}=\frac{1}{e^{\gamma z}G(z)}=\frac{z}{ze^{\gamma z}G(z)}=z\Gamma(z)$$

en tanto permanezcamos fuera de los polos.

9. $$zG(z)G(-z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}$$

$$=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi}$$

por el ejemplo resuelto 7.1.10. Utilizando el ejercicio 7,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=-z\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-z}{ze^{\gamma z}G(z)(-z)e^{-\gamma z}G(-z)}=\frac{1}{zG(z)G(-z)}=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$$

11. Empiece con la tercera línea de demostración de la fórmula de Euler:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n\to\infty} n^{-z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{z}{n^z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+z}{k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n^z \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}$$

13. Utilice la expansión de Laurent y Res $(\Gamma, -m) = (-1)^m/m!$.

15. Una manera es proceder como sigue: Primero, muestre que $1 + y \le e^y \le (1-y)^{-1}$ para $0 \le y \le 1$ usando series de potencias o cálculo. Haga $y = t/n$ para obtener $0 \le e^{-t} - (1 - t/n)^n$ y concluya que $e^{-t} - (1 - t/n)^n \le e^{-t}[1 - (1 - t^2/n^2)^n]$. Utilice la desigualdad $(1-k)^n \ge 1 - nk$, con $0 \le k \le 1$ para obtener

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \le \frac{t^2}{n}$$

para $0 \le t \le n$.

17. Γ tiene polos simples en $0, -1, -2, \ldots$ y es analítica en el resto. Por lo tanto,

$$\int_\gamma \Gamma(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(\Gamma, 0) = 2\pi i \lim_{z\to 0} z\Gamma(z)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \Gamma(z+1) = 2\pi i \Gamma(1) = 2\pi i$$

19. Sea $r < 1$ el radio de la parte circular de C. Para $n > 1$, considere $f_n(z) = \int_{C \atop |t|\le n} (-t)^{z-1} e^{-t}\,dt$.

a) Use el ejemplo resuelto 2.4.15 para mostrar que $f_n(z)$ es entera.

b) Estime la parte de la integral, con $|t| > n$ para mostrar que la integral impropia converge y que la convergencia de f_n a esa integral es uniforme en los discos cerrados.

c) Concluya que la integral de Hankel es una función entera.

d) Utilice el teorema de Cauchy para mostrar que el valor es independiente de r y ε.

e) Use $\arg(-t) = -\pi$ en el lado superior del eje real y π en el lado inferior para mostrar que las porciones rectilíneas se combinan para dar $-2i \operatorname{sen} \pi z \int_r^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$.

f) La parte a lo largo del círculo se va a 0 conforme r se va a 0.

g) Utilice la integral de Euler para $\Gamma(z)$ y concluya que la fórmula se satisface para $\operatorname{Re} z > 0$.

h) Utilice el teorema de identidad para concluir que tiene sentido que las fórmulas coincidan en ambos lados; esto es, en $z \ne 0, 1, 2, \ldots$

i) Utilice $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/(\operatorname{sen} \pi z)$ para obtener la última afirmación.

21. Haga la primera integral para y positiva, con la sustitución $t = y^2$. Para la segunda, integre por partes, con $u = y$ y $dv = ye^{-y^2}\,dy$.

7.2. Expansiones asintóticas y el método del descenso más pronunciado

1. Existen constantes R_1, B_1, R_2 y B_2 tales que $|f(z)/h(z)| < B_1$ siempre que $|z| \ge R_1$ y $\alpha \le \arg z \le \beta$, y $|g(z)/h(z)| < B_2$ siempre que $|z| \ge R_2$ y $\alpha \le \arg z \le \beta$, así que si $|z| \ge R = \max(R_1, R_2)$ y $\alpha \le \arg z \le \beta$, entonces $|[af(z) + bg(z)]/h(z)| \le a|f(z)/h(z)| + b|g(z)/h(z)| \le aB_1 + bB_2$. En consecuencia, $af(z) + bg(z) = O(h(z))$.

3. Si $S_n(x) = \sum_2^n (a_k/x^k)$, entonces $f - S_n = o(1/x^n)$ y así, por la proposición 7.2.3(v), $\int_x^\infty f - \int_x^\infty S_n = o(1/x^{n-1})$. Esto es, $\int_x^\infty f - \sum_2^n [a_k/(k-1)x^{k-1}] = o(1/x^{n-1})$, o $\int_x^\infty f \sim (a_2/x) + (a_3/2x^2) + \cdots$, como se quería.

5. Utilice la serie geométrica y aplique la proposición 7.2.5.
7. Para el caso par de *a*), integre por partes repetidamente hasta reducir al caso en que $k = 0$. Luego cambie variables por $zy^2/2 = t^2$ y utilice $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. En la parte *b*) realice lo mismo o haga $z = 2$ en la parte *a*). Para los casos impares, el integrando es una función impar de y. Entonces, si la integral converge, lo debe hacer a 0. Verifique que ésta converge.
9. Para $S_4(10)$ el error es ≤ 0.00024 y para $S_5(10)$ es 0.00012. Para x fija, el término erróneo decrece conforme n crece hasta que n resulta más grande que x, en cuyo punto empieza a crecer otra vez. De hecho, para x fijo, nuestra cota en el término de error se va a infinito con n. Para n fija, $\lim_{x \to \infty} n!/x^{n+1} = 0$, así que el error se va a cero conforme x crece.
11. $f(z) \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}} \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{5!} \dfrac{1}{z^5} - \cdots \right)$
13. La trayectoria del descenso más pronunciado es el eje real.
15. $y = \log \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$
17. $f(z) \sim e^z \sqrt{\dfrac{2\pi}{z}}$
19. $f(z) \sim e^z (1 - i) \sqrt{\dfrac{\pi}{|z|}}$

7.3. La fórmula de Stirling y las funciones de Bessel

1. Diferencie cualquier fórmula conveniente para $J_n(z)$ dos veces y sustitúyala en la ecuación. Por ejemplo:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2} \right)^n \int_\gamma t^{-n-1} e^{t - (z^2/4t)} \, dt$$

3. De la ecuación (4), $J_0(z) = 1/\pi \int_0^\pi \cos(z \operatorname{sen} \theta) \, d\theta$ y, por lo tanto, $J_0'(z) = -1/\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}(z \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta$. Pero

$$J_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta - z \operatorname{sen} \theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos \theta \cos(z \operatorname{sen} \theta) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(z \operatorname{sen} \theta)] \, d\theta$$

Utilice la simetría en $\pi/2$ para demostrar que el primer término se anula.

5. De la ecuación (12) (la línea 8 de la tabla 7.2).

$$J_0'(z) = \frac{0}{z} J_0(z) - J_1(z) = -J_1(z)$$

y, por lo tanto,

$$J_0''(z) = -J_1'(z) = -\frac{1}{z} J_1(z) + J_2(z) = J_2(z) + \frac{1}{z} J_0'(z)$$

7. Por definición.

$$J_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{(1/2)+2k}}{2^{(1/2)+2k}\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)k!}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2k+2)} \text{ (por la fórmula de duplicación de Legendre)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{sen} z$$

9. Utilice el teorema de la fase estacionaria (7.2.10) con $\gamma = [0, \pi]$ $h(\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, $g(\theta) = e^{in\theta}$, $\theta_0 = \pi/2$ y $f(z) = \int_0^{\pi} e^{-iz\operatorname{sen}\theta + ni\theta} d\theta$. Claramente h es real sobre γ, con un mínimo estricto en $\pi/2 = \theta_0$; $h'(\theta_0) = 0$, $h''(\theta_0) = 1$. Todas las condiciones del teorema se cumplen, y así

$$f(z) \sim \frac{e^{izh(\theta_0)}\sqrt{2\pi}e^{\pi i/4}}{\sqrt{z}\sqrt{h''(\theta_0)}} g(\theta_0)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-iz} e^{\pi i/4} e^{in\pi/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-i(z - n\pi/2 - \pi/4)}$$

11. Sea $n \leq 0$ y $m = -n \geq 0$. El residuo en la expansión de la ecuación (5) es ahora $1/(k-m)!$, así que

$$J_n(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{n+2k}}{2^{n+2k}} \cdot \frac{1}{(k-m)!} \cdot \frac{1}{k!}$$

Hágase $j = k - m$ y $k = j + m$ para obtener

$$J_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+m} z^{n+2(j+m)}}{2^{n+2(j+m)}} \cdot \frac{1}{(j+m-m)!} \cdot \frac{1}{(j+m)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n} z^{m+2k}}{2^{m+2k}} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(k+m)!} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{m+2k}}{2^{m+2k} k!(m+k)!}$$

$$= (-1)^n J_m(z) = (-1)^n J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n} z^{-n+2k}}{2^{-n+2k} k!(k-n)!}$$

Ejercicios de repaso del capítulo 7

1. 2

3. Utilice $z = \pi/4$ y $z = \pi/2$ en el ejemplo resuelto 7.1.10 para obtener

$$\sqrt{2} = \frac{\prod_1^{\infty}(1 - 1/16n^2)}{\prod_1^{\infty}(1 - 1/4n^2)} = \frac{\lim_{N\to\infty} \prod_1^{N}(1 - 1/16n^2)}{\lim_{N\to\infty} \prod_1^{N}(1 - 1/4n^2)}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\prod_1^\infty (1 - 1/16n^2)}{\prod_1^N (1 - 1/4n^2)} = \lim_{N\to\infty} \prod_1^N \frac{(4n-1)(4n+1)}{(4n-2)(4n+2)}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{11}{10}\right)\left(\frac{13}{14}\right)\cdots$$

5. *a*) $\{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ *b*) $\{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$

7. $f(z) \sim e^{i(z-\pi/4)}\sqrt{2\pi}/\sqrt{z}$

9. $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)/3$

11. Primero establezca, por ejemplo, de la representación como producto para $1/\Gamma$, que $\Gamma(z)$ $\Gamma(z) = \Gamma(\bar{z})$. Con $z = \frac{1}{2} + iy$, esto da $|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)|^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2} - iy\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\cdot$ $\Gamma(1 - \frac{1}{2} + iy) = \pi/\operatorname{sen}(\pi\left(\frac{1}{2}\right) + iy) = 2\pi/(e^{-\pi y} + e^{\pi y})$ lo cual se va a 0 conforme $y \to \infty$

13. $$\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(1 - \frac{1\cdot 3}{2}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4!}\cdot\frac{1}{z4} - \cdots\right)$$

15. Aplique el teorema generalizado del descenso más pronunciado (7.2.9) después de escribir

$$J_n(iy) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} e^{-y\operatorname{sen}\theta}(\cos n\theta + 1)\,d\theta - \int_0^{2\pi} e^{-y\operatorname{sen}\theta}\,d\theta\right]$$

$$- \frac{i}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} e^{-y\operatorname{sen}\theta}(\operatorname{sen} n\theta + 1)\,d\theta - \int_0^{2\pi} e^{-y\operatorname{sen}\theta}\,d\theta\right]$$

y de usar $h(\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, $\theta_0 = 3\pi/2$ y $\gamma = [0, 2\pi]$.

17. De la parte *b*) del ejercicio 16,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot(2n)(2n-1)\cdots(n+1)\cdot x^n + (\text{términos de orden menor})$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + (\text{términos de orden menor})$$

8.1. Propiedades básicas de las transformadas de Laplace

1. $\tilde{f}(z) = \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z}$ $\quad \sigma(f) = 0$

3. $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z^2+1}$ $\quad \sigma(f) = 0$

5. $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z} + n\cdot\frac{1}{z^2} + n(n-1)\frac{1}{z^3} + \cdots + n!\frac{1}{z^{n+1}}$ $\quad \sigma(f) = 0$

7. $\tilde{f}(z) = \frac{2az}{(z^2+a^2)^2}$ $\quad \sigma(f) = |\operatorname{Im} a|$

9. $\tilde{f}(z) = \dfrac{z^2 - a^2}{(z^2 + a^2)^2}$ $\qquad \sigma(f) = |\text{Im } a|$

11. $\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \cos at\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t(z-ia)}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t(z+ia)}\, dt$. Para Re $(z - ia) > 0$, la primera integral converge a $1/2(z - ia)$. Para Re$(z + ia) > 0$, la segunda converge a $1/2(z + ia)$. (Véase el ejemplo resuelto 8.1.11.) Así, para Re $z >$ |Im a| $f(z)$ converge a $\frac{1}{2}[1/(z - ia) + 1/(z + ia)] = z/(z^2 + a^2)$.

13. Para z real y positivo, hágase $u = zt$ para obtener $\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{(a+1)-1}/z^{a+1}\, du$. Puesto que $a > -1$, esto converge a $\Gamma(a + 1)/z^{a+1}$ y, por lo tanto, $f(z)$ converge sobre el eje real positivo. El lema 8.1.8 nos da la convergencia sobre el semiplano derecho abierto. El teorema de identidad muestra que $f(z) = \Gamma(a + 1)/z^{a+1}$ para Re $z > 0$ y el ejemplo resuelto 8.1.13 muestra que $\sigma(f) = 0$.

15. $\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-zt} f(t)\, dt$. En la n-ésima integral hágase $u = t - np$. Entonces $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^p e^{-z(u+np)} f(u + np)\, du = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-zpn}\right) \int_0^p e^{-zu} f(u)\, du$, y puesto que $|e^{-zp}| < 1$, esto es $\left[\int_0^p e^{-zt} f(t)\, dt\right]/(1 - e^{-zp})$.

17. $\tilde{g}(z) = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{(z+1)^2 + 1}$; $\quad \tilde{f}(z) = -\dfrac{3z^2 + 4z + 2}{(z^3 + 2z^2 + 2z)^2}$

19. Suponga que f es de orden exponencial ρ y sea $g(T) = \int_0^T f(s)\, ds$. Para $\varepsilon > 0$, existe una A, con $|f(s)| \le Ae^{(\rho+\varepsilon)s}$ para toda $s \ge 0$. Entonces $|g(T)| \le A\int_0^T e^{(\rho+\varepsilon)}\, ds = A\,(e^{(\rho+\varepsilon)T} - 1)/(\rho + \varepsilon)$. Si $\rho \ge 0$, entonces $e^{(\rho+\varepsilon)T} > 1$ y, por lo tanto, $|g(T)| \le 2Ae^{(\rho+\varepsilon)T}/(\rho + \varepsilon)$ y así $\rho(g) \le 0$. En cualquier caso, $\rho(g) \le$ máx$[0, \rho(f)]$. Si f es continua a trozos, entonces g es continua y C^1 a trozos. Para Re $z \ge$ máx$[0, \rho(f)]$, lo anterior da que Re $z > \rho(g)$ y la proposición 8.1.3 da $(g')^{\sim}(z) = zg(z) - g(0)$. Pero $g'(t) = f(t)$ y, por lo tanto, $g(0) = 0$, así que $f(z) = zg(z)$ y entonces $g(z) = f(z)/z$.

21. Si $B > 0$ y $t \ge 0$, entonces $-e^t \le -1$ y $|f(t)| < e^{-1} < e^{Bt}$.
Si $B < 0$, sea $A =$ máx $(1/e, e^{B - B\log(-B)})$, y sea $g(t) = ****t + Bt + \log A$. Entonces $g(0) = 1 + \log A \ge 0$. También, $g'(t) = 0$ únicamente en $t = \log(-B)$ y $g(\log(-B)) = -B + B\log(-B) + \log A \ge 0$ y, por lo tanto, $-e^{-t} \le Bt + \log A$ para $t \ge 0$ y $|f(t)| \le Ae^{Bt}$. Así, $\rho(f) = -\infty$ y, por lo tanto, $\sigma(f) = -\infty$.

8.2. La fórmula de inversión compleja

1. *a*) cos t *b*) $f(t) = te^{-t}$ *c*) $f(t) = [e^t + 2e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}\,t/2)]/3$

3. La ecuación (1) en la fórmula de la inversión compleja (8.2.17) no se puede aplicar, ya que no existen constantes M y R para las cuales $|e^{-z}/z| < M/|z|$ siempre que $|z| > R$.

5. *a*) $f(t) = 2e^{-2t} - e^{-t}$.

b) senh z no tiene transformada inversa de Laplace. Si $\tilde{f}(z) =$ senh z, hágase $g(t) = tf(t)$ y $h(t) = tg(t)$. Entonces $\tilde{g}(z) = -\cosh z$ y $\tilde{h}(z) =$ senh $z = \tilde{f}(z)$. Esto forzaría a que $f(t) = h(t) = t^2 f(t)$ y en consecuencia $\tilde{f}(z) =$ senh $z = 0$ lo cual no es cierto.

c) $f(t) = t^2 e^{-t}/2$.

7. $g(t) = \displaystyle\int_0^t [\text{sen}\,(t - s)] f(s)\, ds$

9. $f(t) = (6te^{-3t} - e^{-3t} + 1)/9$

8.3. Aplicación de las transformadas de Laplace a las ecuaciones diferenciales ordinarias

1. $y(t) = (5e^{2t} + 3e^{-2t})/4$

3. $$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{9}[1 - \cos(3t - 3)] & t \ge 1 \end{cases}$$

5. $y(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t)$ donde

$$g_1(t) = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{3}}\left(3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$g_2(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 2 \\ -\dfrac{e^{-(t-2)/2}}{\sqrt{3}} 2\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-2) & t \ge 2 \end{cases}$$

$$\text{y } g_3(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ \dfrac{e^{-(t-1)/2}}{\sqrt{3}} 2\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-1) & t \ge 1 \end{cases}$$

7. *a)* $y_1(t) = (e^t + e^{-t})/2 = \cosh t$; $y_2(t) = -(e^t - e^{-t})/2 = -\operatorname{senh} t$
b) $y_1(t) = -3t$, $y_2(t) = 3[(1+t)^2 - 1]/2$

9. $y(t) = [(t+4)\operatorname{sen} t - t^2\cos t]/4$

11. Si sustituimos la expresión para ϕ de la página 523, en las condiciones de frontera que siguen, obtenemos cuatro ecuaciones simultáneas que involucran a A, B, R y T. Después de algunas manipulaciones algebraicas, muestre que obtenemos la ecuación (10), así como

$$R = \frac{T}{2ic_1c_2}(c_2^2 - c_1^2)e^{ia\omega/c_1}\operatorname{sen}\frac{a\omega}{c_2}$$

Juntas, éstas nos dan $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

13. $$\frac{1}{\sqrt{x_0 + iy_0}} = -\frac{i}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{x - z_0}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

(Al hacer el cambio de variabales $w = \sqrt{x}$, usted puede evaluar directamente el lado derecho de la última ecuación para verificar la igualdad.)

Ejercicios de repaso del capítulo 8

1. $\tilde{f}(z) = e^{-z}/(z^2 + 1)$, $\sigma(f) = 0$.

3. $\tilde{f}(z) = \dfrac{1 - e^{-z}}{z^2}$

5. $\tilde{f}(z) = \log\left(\dfrac{z}{z-1}\right), \sigma = 1.$

7. $f(t) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ \operatorname{sen}(t-1) & t > 1 \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} -te^{-t} + e^{-t} & t < 1 \\ -e^{-t} + e^{-t} + 1 & t > 1 \end{cases}$

11. *a)* $y(t) = (-15 + 23\cos 2\sqrt{2t})/8$ *b)* $y(t) = 3(1 - e^{-t})$

13. *a)* $y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ 1 - \cos(t-1) & t \ge 1 \end{cases}$ *b)* $y(t) = 2te^{-t} + e^{-t}$

15. Cada término tiene una singularidad de tipo logarítmico en $j = \alpha$. Pero

$$F(j) = \frac{1}{1 - g\log(j-\alpha)}$$

Así, además de la singularidad de tipo logarítmico en $j = \alpha$, $F(j)$ tiene también una singularidad de polo simple cuando el denominador se anula, en $j = \alpha + e^{1/g}$.

Índice analítico

Abscisa de convergencia, 496
Adición
  reglas de la, 16
  teorema de la, 322
Álgebra, teorema fundamental del, 165, 173
Amplitud de dispersión, 523
Análisis complejo, 12-13
  ventaja, 109
Analiticidad de productos finitos, 438
Ángulo, 36
  de desfasamiento, 490
  entre dos curvas, 78
Antiderivada, 143
  teorema de la, 133, 156
Argand, J. R., 12
Argano, J. F., 13
Argumento
  principio del, 404
  rama del, 24
Autenticidad de las series de potencias, 228

Bandas de periodicidad, 48
Bisección, proceso de, 141
Biyección, 83
Blanchard, P., 431

Cálculo
  integral de línea del, 110
  para integrales de contorno, teorema fundamental del, 116
  teorema del, 77
  fundamental del, 116
Campo
  conservativo, 121
  eléctrico, 368-369
  no conmutativo, 18
  reglas para un, 15-16
Cardano, G., 11-12
Carga imagen, 372
Cauchy, A., 12, 173n
Cero de orden, 251-252
Cerradura, 188
Círculo(s)
  de Apolonio, 371
  de convergencia, 226
  de Steiner, 371
  principio de reflexión de Schwarz para un, 388
  reflexión en un, 348
  transformación fraccional lineal que preserva reflexiones en, 349
Comparación, criterio de, 206, 214
Comportamiento local de las funciones analíticas, 417-418
Conforme, 336
Conjugación compleja, 28
  propiedades de la, 29
Conjunto
  abierto, 53-54, 188
    conexos, propiedad de los, 117
    propiedades de los, 54-55
  cerrado, 188
    propiedades de los, 58
  compactos, 63-64
    propiedades de los, 63
  conexo, 60-62, 150
    por trayectorias, 60
  de Julia, 431-432
  de los números complejos, 1
  fractal, 431-432
  imagen, 63-64
  simplemente conexo, 150
Constante de Euler, 441
Conteo de raíces
  fórmula del, 403, 417
  y polos, teorema del, 402
Continuación analítica, 385-386, 389
  por continuidad, 388
  principio de, 384
    aplicación, 385
Continuidad, continuación analítica por, 388
Contorno, teorema fundamental del cálculo para integrales de, 116
Convergencia
  abscisa de, 496
  analítica, teorema de, 211-212
  círculo de, 226
  de series de potencias, teorema de, 226
  ecuación del teorema de, 498

para las transformadas de Laplace, teorema de, 496
para productos, teorema de, 437-438, 447
puntual y uniforme, diferencia, 206
radio de, 226, 392
semiplano de, 496
uniforme, 194, 206-208
y puntual, diferencia, 206
Convolución de las funciones, 500
teorema de, 500
Coordenadas polares, 22
representación en, 23
Corriente, función de, 373
Coseno, 36, 40-41
y seno de Fourier, transformaciones, 292
Criterio
de Cauchy, 208, 217
de comparación, 206, 214
de la raíz, 206, 214, 229
de la razón, 206, 214, 229
de p-series, 206, 214
M de Weierstrass, 208-209
Cubierta, 63-64
de una trayectoria, lema de la, 67
Curva(s), 139
cerrada(s)
curvas homotópicas como, 149
simple(s)
fórmula para una, 403
teorema del residuo para, 275
de Jordan, teorema de la, 128, 161-162
geométrica orientada para evaluar la integral, 114
homotopía de una, 148
homotópica
como curvas cerradas, 149
con extremos, 147-148
interior de una, 168
lemniscatas, 371
opuesta, 111
parametrizadas, distancia entre dos, 158
por tramos, 112
unión de dos, 111
Debye, P., 466
Definición generalizada, 514
Deformación
suave, 157
teorema de, 160
teorema de, 130, 151-152, 160-161
Derivada(s), 73
fórmula integral de Cauchy para las, 171
Descenso más pronunciado
método del, 466-467
teorema, 467
generalizado del, 472
trayectoria del, 467
Desfasamiento, ángulo de, 490
Desigualdad(es)
de Cauchy, 172
del triángulo, 30-31
Devany, R. L., 430f-431
Diferenciabilidad, 79-80
de integrales del tipo de Cauchy, 170, 175
Diferenciación
de series de potencias, 228
logarítmica, 405
Dinámica caótica, 432
Dirichlet, P., 12
Disco
de Cauchy-Goursat, teorema para un, 139
teorema
de Cauchy para un, 154
fortalecido de Cauchy-Goursat para un, 147
Dispersión
amplitud de, 523
doble relación de, 528
problema de, 522
relaciones de, 525
Distancia
entre dos curvas parametrizadas, 158
lema de la, 65
Divergencia, 363
Dominio, 55
Duplicación de Legendre, fórmula de, 445

Ecuación
de Bessel, 488
de movimiento, 526
de onda, 517
de solución del problema de Dirichlet, 365
del teorema de convergencia, 498
funcional para la función gamma, 442-443
Ecuaciones de Cauchy-Riemann, 80, 82-83
Eje
imaginario, 13, 22
real, 22
Energía potencial, 121
Error
asintótico, 463
relativo, 463
Esfera de Riemann, 68-69
Estimación de integrales, 115-116
Euler, L., 12, 440
Evaluación de integrales definidas, 309t-310t
Expansión
asintótica, 458
de Heaviside, teorema de, 512
de Laurent, 243-244
teorema de, 243
Expansiones
asintóticas, 456
propiedades de las, 460
comunes, 231t
Extremos, curva homotópica con, 147-148

Familia(s)
de iteraciones, 432
normal(es), 424
teorema de Montel sobre, 424
Fase estacionaria, 473
teorema de la, 472-473
Fatou, P., 431
Flujo, líneas de, 366, 368
Fórmula
asintótica para las funciones de Bessel, 489-490
cuadrática, 12
de Cauchy para las derivadas, 171
de De Moivre, 27
de duplicación de Legendre, 445

de Gauss, 443
de inversión
compleja, 509
de Fourier, 518
de Leonhard Euler, 321
de Poisson, 194, 196
de Schwarz-Christoffel, 350-351
de Stirling, 456, 484
del conteo de raíces, 417
integral de Cauchy, 169
para el conteo de raíces, 403
para una curva cerrada simple, 403
Fracciones parciales, 326-327
teorema del desarrollo en, 328
Frontera, 188
aislada, 366
natural, 387
Función, 42, 55, 143
abierta, 419
analítica, 97, 100-102, 133, 203, 280, 409
transformada en forma uno a uno, 428
armónica, 86, 191
composición continua, 57
con serie asintótica, 462
conforme y biyectiva, 336
continua, 57, 66
de corriente, 373
de Green, 520
de Heaviside. *Véase* Función de salto unitario
de orden exponencial, 496
de salto unitario, 499
diferenciable, 73-74
entera, 97, 100
exponencial, 37-38
propiedades de la, 38
gamma, 440
ecuación funcional para la, 442-443
propiedades de la, 451t
generadora, 487
inversa
para funciones de variable real, teorema de la, 84
regla de la, 77
teorema de la, 83-84, 419
logaritmo, 43
meromorfa, 248, 327
multivaluada, 44
periódica, 38
potencia, 46-47
propiedades globales de una, 66
raíz
cuadrada, 47
n-ésima, 45, 101
rama de la, 45
uniformemente continua, 66
uno a uno, teorema de la, 409
Funciones
analíticas, comportamiento local de las, 417-418
armónicas
conjugadas, 86-87, 192
ortogonalidad de las, 87-88
principio del máximo para, 193
propiedad del valor medio para, 192
asintóticamente equivalentes, 462
convolución de las, 500
de Bessel, 486-487
fórmula asintótica para las, 489-490
propiedades de las, 486t
de variación acotada, propiedades de las, 476-477
de variable real, teorema de la función inversa para, 84
enteras acotadas, 173
meromorfas, 402
multivaluadas, 307
trigonométricas, 36

Gauss, K. F., 12, 173n, 440
Goursat, E., 128, 139-140
Grado *k*, polinomio de, 280
Grupo, 336

Hamilton, W. R., 12
Homotopía
de una curva, 148
suave, 155

Incompresible, 373
Independencia
con respecto de la trayectoria, teorema de la, 118-119
de la trayectoria, 132
Índice, 166-167
teorema del, 168
Infinitesimalmente, 78
Integral(es), 110
convergente, 302
curva geométrica orientada para evaluar la, 114
de contorno, teorema fundamental del cálculo para, 116
de Euler, 445
de línea del cálculo, 110
definidas, 288-289
evaluación de, 309t-310t
del tipo de Cauchy, 170
diferenciabilidad de, 170, 175
estimación de, 115-116
gaussiana, 291
independiente de la trayectoria, 118
para evaluar sumas, 321
segundo teorema del valor medio para, 478
trigonométricas, 296
Interior de una curva, 168
Intuición geométrica, 22
Inversión
compleja, fórmula de, 509
de Fourier, fórmula de, 518
Inverso multiplicativo, 14-15
Iteraciones, familia de, 432

Julia, G., 431

Lema
de Abel-Weierstrass, 227
de la cubierta de una trayectoria, 67
de la distancia, 65
de Schwarz, 190
Leyes físicas, 365-366
Límite(es), 55-56, 68, 73
de las series dobles infinitas, 323
de las sumas parciales simétricas, 323
de una sucesión, 57-58
operaciones con, 68
para sucesiones, 68
Línea(s)
de flujo, 366, 368
del cálculo, integral de, 110
isotérmicas, 366

Logaritmo, 37, 41
rama de, 134, 405
principal del, 98-99
Longitud del vector, 22

Mandelbrot, B., 431
Mandestam, S., 528
Mapeo
abierto, teorema del, 419
conforme, 78, 335
teorema del, 79, 335-336
de Riemann, teorema del, 337, 339
teorema del, 418-419
Marsden, J., 36
Matriz, 81
jacobiana, 79
Máximo para funciones armónicas, principio del, 193
Mayberry, C., 430f
Método
básico para los problemas de Dirichlet y de Neumann, 364
de las transformadas de Laplace, 516
del descenso más pronunciado, 466-467
Mittag-Leffler, G., 329
Módulo máximo, teorema del, 185, 189, 419-420
Monodromía, principio de, 392
Movimiento, ecuación de, 526
Multiplicación
compleja, 13
de números complejos, 13, 25
reglas de la, 16

Número(s)
finito de singularidades, 281
imaginario puro, 14
primos, teorema de los, 456
propiedades de los, 14
reales, 14
desarrollo histórico, 11-12
negativos, raíces cuadradas de, 16-17
sistema de los, 11
Número(s) complejo(s), 13, 22
conjunto de los, 18
multiplicación de, 14, 25
producto de dos, 24-25
raíces cuadradas de un, 17
representación polar de un, 40
sistema de los, 13
valor absoluto de un, 29

O
chica, 475
grande, 475
Onda, ecuación de, 517
Operaciones con límites, 68
Órbita, 431
Orden
cero de, 251-252
exponencial, función de, 496
polos de segundo, 265-266
superior, polos de, 267-269
Ortogonalidad de las funciones armónicas conjugadas, 87-88

Parte
imaginaria, 14
real, 14
Periodicidad, 48
Picard, C. E., 252
Plano
en sí mismo, transformación lineal del, 26
xy, 13
Polinomio de grado *k*, 280
Polo(s), 248
de orden, 248
superior, 267-269
de segundo orden, 265-266
residuo del, 264
simple, 248, 263
y raíces, teorema del conteo de, 402
Potencial
complejo, 373
requerido, 374
eléctrico, 368
Potencias
autenticidad de las series de, 228
diferenciación de series de, 228
series de, 226
teorema de convergencia de series de, 226
unicidad de la serie de, *228*
Principio
de continuación analítica, 384
aplicación, 385
de Lindelöf, 191
de monodromía, 392
de reflexión de Schwarz, 387-388
para un círculo, 388
del argumento, 404
del máximo para funciones armónicas, 193
Problema(s)
de dispersión, 522
de Neumann, 362-363
Problema(s) de Dirichlet, 133, 193, 362
aplicaciones, 335
ecuación de solución del, 365
teorema de unicidad para el, 362
unicidad para el, 193
y de Neumann, método básico para los, 364
Proceso de bisección, 141
Producto(s)
canónico(s), 439
teorema sobre, 439, 449
convergente, 437
uniformemente, 438
de dos números complejos, 24-25
finito(s), 436-437
analiticidad de, 438
regla del, 75
teorema de convergencia para, 437-438, 447
Propiedad(es)
de la conjugación compleja, 29
de la función
exponencial, 38
gamma, 451t
de la superficie de Riemann, 395
de las expansiones asintóticas, 460
de las funciones
de Bessel, 486t
de variación acotada, 476-477
de las transformaciones fraccionales lineales, 343-347
de los conjuntos
abiertos, 54-55

cerrados, 58
compactos, 63
conexos, 117
de los números complejos, 14
del valor
absoluto, 29
medio, 185
para funciones armónicas, 192
globales de una función, 66
local, 66
P-series, criterio de, 206, 214
Punto(s)
fijo, 431
atractor, 431
repulsor, 431
periódico, 431
atractor, 431
repulsor, 431
rama, 392
singular, 336
sucesión de, 59

Radio de convergencia, 226, 392
Raíces
cuadradas
de números reales negativos, 16-17
de un número complejo, 17
fórmula
del conteo de, 403, 417
n-ésimas, 27-28
y polos, teorema del conteo de, 402
Raíz, criterio de la, 206, 214, 229
Rama
de la función raíz n-ésima, 45
del argumento, 24
del logaritmo, 134, 405
principal del logaritmo, 98-99
Razón, criterio de la, 206, 214, 229
Rectángulo, teorema de Cauchy-Goursat para un, 140, 145-146
Recurrencia, relaciones de, 489
Reflexión, 194
de Schwarz
para un círculo, principio de, 388
principio de, 387-388
en un círculo, 348
Región
estrellada, 151
exterior, 161
interior, 161
simplemente conexa, 131-132
teorema de Cauchy para una, 156
Regiones, 339
conformes, 337
simplemente conexas, teorema de Cauchy en términos de, 132
Regla(s)
de la adición, 16
de la función inversa, 77
de la multiplicación, 16
del producto, 75
para un campo, 15-16
Relación de dispersión, doble, 528
Relaciones
de dispersión, 525
de recurrencia, 489
Reparametrización, 112
Representación
en coordenadas polares, 23
polar de un número complejo, 40
Residuo, 271
Residuo(s)
del polo simple, 264
para curvas cerradas simples, teorema del, 275
técnicas para encontrar, 269t-270t
teorema del, 261, 275
Riemann, G. F. B., 12, 394

Salto unitario, función de, 499
Semiplano de convergencia, 496
Seno, 36, 40-41
y coseno de Fourier, transformaciones, 292
Serie(s)
asintótica, función con, 462
convergente, 205, 214
de Laurent, 204
de Maclaurin, 37, 204
de Taylor, 203-204, 230, 243
divergentes, 457
dobles infinitas, límites de las, 323
geométrica, 205
Serie(es) de potencias, 226
autenticidad de las, 228
diferenciación de, 228
teorema de convergencia de, 226
unicidad de la, 228
Singularidad(es), 129
aislada, 247-250
esencial, 248, 270
número finito de, 281
removible, 248, 262
Sistema de los números
complejos, 13
reales, 11
Small, C., 430f
Smith, S., 430f
Solución del problema de Dirichlet, ecuación de, 365
Soluciones generalizadas, 514
Subconjunto
abierto relativo, 59
cerrado, 58
relativo, 59
Subcubierta, 64
Sucesión
convergente, 205
de Cauchy, 58
de puntos, 59
límite de una, 57-58
Sucesiones, límites para, 68
Sumas
de Riemann, 124-125
integrales para evaluar, 321
parciales simétricas, límite de las, 323
Superficie
de Riemann, 394-397
propiedad de la, 395
hoja. *Véase* Superficie de Riemann

Técnicas para encontrar residuos, 269t-270t
Temperatura, 367
Teorema
de Casorati-Weierstrass, 252
de Cauchy, 109, 126-128, 155, 162, 166
en términos de regiones simplemente conexas, 132
un disco, 154

para una región simplemente conexa, 156
de Cauchy-Goursat para un rectángulo, 140, 145-146
de Cauchy-Riemann, 80
de convolución, 500
de deformación, 130, 151-152, 160-161
suave, 160,
de expansión
de Heaviside, 512
de Laurent, 243
de Gauss, 363
de Green, 127-128
de Hurwitz, 407-408
de identidad. *Véase* Principio de continuación analítica
de la adición, 322
de la antiderivada, 133, 156
de la curva de Jordan, 128, 161-162
de la fase estacionaria, 472-473
de la función
inversa, 83-84, 419
para funciones de variable real, 84
uno a uno, 409
de la independencia con respecto de la trayectoria, 118-119
de la transformada de Hilbert, 523-524
de Liouville, 173
de los números primos, 456
de mapeo conforme, 335-336
de Mittag-Leffler, 329
de Montel, 424
sobre familias normales, 424
de Morera, 174
de Osgood-Caratheodory, 340
de Picard, 252
de Rouché, 406
de Taylor, 226, 230, 233
de traslación, primer, 499
de unicidad
para el problema de Dirichlet, 362
para las transformadas de Laplace, 497
de Watson, 465-466
del cálculo, 77
del conteo de raíces y polos, 402
del desarrollo en fracciones parciales, 328
del descenso más pronunciado, 467
del índice, 168
del mapeo, 418-419
abierto, 419
conforme, 79
de Riemann, 337, 339
del módulo máximo, 185, 189, 419-420
del residuo, 261, 275
para curvas cerradas simples, 275
del valor
extremo, 65, 189
medio para integrales, segundo, 478
fortalecido de Cauchy-Goursat para un disco, 147
fundamental
del álgebra, 165, 173
del cálculo, 116
para integrales de contorno, 116
generalizado del descenso más pronunciado, 472
para un disco de Cauchy-Goursat, 139
sobre productos canónicos, 439, 449
Teorema de convergencia
analítica, 211-212
de series de potencias, 226
ecuación del, 498
para productos, 437-438, 447
para las transformadas de Laplace, 496
Términos de regiones simplemente conexas, teorema de Cauchy en, 132
Tramos, curvas por, 112
Transformación
fraccional
lineal, 343
que preserva reflexiones en círculos, 349
uso, 347-348
lineal del plano en sí mismo, 26
Transformaciones
de Joukowski, 375
fraccionales lineales, propiedades de las, 343-347
seno y coseno de Fourier, 292
Transformada(s)
de Fourier, 292, 517-519
de Hilbert, teorema de la, 523-524
de Mellin, 297-298
Transformada(s) de Laplace, 95, 464, 497
comunes, 505t-506t
método de las, 516
teorema
de convergencia para las, 496
de unicidad para las, 497
utilidad, 497
Traslación, primer teorema de, 499
Trayectoria(s)
conjunto conexo por, 60-61
del descenso más pronunciado, 467
diferenciable, 62
independencia de la, 132
integral independiente de la, 118
lema de la cubierta de una, 67
rectangular, 143-144
teorema de la independencia con respecto de la, 118-119
Triángulo, desigualdad del, 30-31

Unicidad, 245
de la serie de potencias, 228
para el problema de Dirichlet, 193
teorema de, 362
para las transformadas de Laplace, teorema de, 497
Unión de dos curvas, 111

Valor
absoluto
de un número complejo, 29
propiedades del, 29
extremo, teorema del, 65, 189

medio
para funciones armónicas, propiedad del, 192
para integrales, segundo teorema del, 478
propiedad del, 185
principal de Cauchy, 301-304
Variación
acotada, 475-476
propiedades de las funciones de, 476-477
relativa, 475
total, 475
Vecindad, 54
agujerada, 54
Vector, longitud del, 22
Watson, G. N., 173n
Weierstrass, K., 12, 211
Weierstrass, A., 246
Weinstein, A., 36
Wessel, C., 12
Whittaker, E. T., 173n